

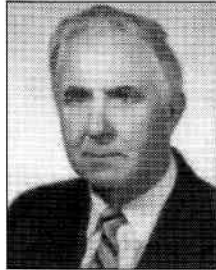
Tadeusz KACZOREK

POLITECHNIKA WARSZAWSKA  
WYDZIAŁ ELEKTRYCZNY

## Wpływ długości kroku dyskretyzacji na dodatniość i stabilność liniowych układów dynamicznych

**Prof. dr hab. inż. Tadeusz KACZOREK**

uzyskał dyplom magistra inżyniera elektryka w 1956 r. na Wydziale Elektrycznym Politechniki Warszawskiej. Na tym samym wydziale w 1962 r. uzyskał stopień doktora nauk technicznych, a w 1964 r. doktora habilitowanego. Tytuł profesora nadzwyczajnego uzyskał w 1971 r., a profesora zwyczajnego w 1974 r. Członkiem korespondentem PAN został wybrany w 1986 r., a członkiem rzeczywistym w 1998 r. W 1986 r. otrzymał Nagrodę Państwową Indywidualną Drugiego Stopnia za monografię „Dwuwymiarowe układy liniowe”. W latach 1969-70 był dziekanem Wydziału Elektrycznego, a w latach 1970-79 prorektorem ds. nauczania PW. W latach 1970-81 był dyrektorem Instytutu Sterowania i Elektroniki Przemysłowej PW. W latach 1988-91 był dyrektorem Stacji Naukowej PAN w Rzymie.



### Streszczenie

Przeprowadzono analizę wpływu długości kroku dyskretyzacji na dodatniość wewnętrzną i zewnętrzną oraz stabilność asymptotyczną układu dyskretnego otrzymanego w wyniku dyskretyzacji z liniowego układu ciągłego.

Wykazano, że:

- 1) Układ dyskretny jest wewnętrźnie dodatni wtedy i tylko wtedy, gdy układ ciągły jest również wewnętrźnie dodatni i długość kroku jest wystarczająco mała (spełnia warunek (7));
- 2) Układ dyskretny jest zewnętrźnie dodatni wtedy, gdy układ ciągły jest wewnętrźnie dodatni i długość kroku jest wystarczająco mała (spełnia warunek (7));
- 3) Układ dyskretny jest stabilny asymptotycznie wtedy i tylko wtedy, gdy układ ciągły jest stabilny asymptotycznie i długość kroku jest wystarczająco mała (spełnia warunek (17)).

### Abstract

Influence of value of the discretisation step on positivity and stability of linear dynamic systems.

An analysis of the influence of value of the discretisation step on internal and external positivity and asymptotic stability of discrete-time system obtained by discretisation from continuous time one is presented. It is shown that:

- 1) The discrete-time system is internally positive if and only if the continuous-time system is also internally positive and the value of discretisation step is small enough (satisfies the condition (7)).
- 2) The discrete-time system is externally positive if the continuous-time system is internally positive and the value of discretisation step is small enough (satisfies the condition (7)).
- 3) The discrete-time system is asymptotically stable if and only if the continuous-time system is also asymptotically stable and the value of discretisation step is small enough (satisfies the condition (17)).

### Wprowadzenie

W ostatnim dziesięcioleciu obserwuje się dynamiczny rozwój teorii układów dodatnich [1, 2, 4, 7, 8, 12, 14-17]. W układach dodatnich zmienne stanu i odpowiedzi na nieujemne wymuszenia i warunki początkowe przyjmują również tylko wartości nieujemne. Wiele wielkości występujących w różnych dziedzinach techniki, ekonomii, medycyny, na przykład takie jak ciśnienie, koncentracja pierwiastka w roztworze, zysk, porcja lekarstwa, itp., przyjmują tylko wartości nieujemne. W kla-

sycznej teorii układów liniowych podstawowy aparat matematyczny stanowią teoria przestrzeni liniowych (wektorowych) i teoria operatorów liniowych. W teorii układów dodatnich zamiast przestrzeni liniowych korzystamy z teorii przestrzeni stożków, gdyż różnica dwóch liczb nieujemnych nie musi być liczbą nieujemną. Teoria układów dodatnich jest więc dziedziną znacznie trudniejszą i jej rozwój jest mniej zaawansowany. Teoria liniowych układów dodatnich ma pewne elementy wspólne z teorią układów standardowych liniowych oraz teorią układów nieliniowych, ale zawiera również wiele nowych zagadnień nie objętych tymi teoriami. Ograniczenie rozważań do pierwszej ćwiartki przestrzeni wskazuje, że teoria układów dodatnich ma wiele elementów wspólnych z teorią układów nieliniowych.

Celem tej pracy jest analiza długości kroku dyskretyzacji na wewnętrzną i zewnętrzną dodatniość oraz stabilność asymptotyczną układu dyskretnego otrzymanego w wyniku dyskretyzacji z liniowego układu ciągłego.

Autorowi nie są znane prace, w których byliby rozpatrywane to zagadnienie.

W pracy tej zostanie pokazane między innymi, że układ dyskretny jest wewnętrźnie dodatni wtedy i tylko wtedy, gdy układ ciągły jest również wewnętrźnie dodatni i długość kroku dyskretyzacji jest wystarczająco mała. Dla każdego wewnętrźnie dodatniego układu ciągłego można zawsze dobrać odpowiednio dużą długość kroku dyskretyzacji, aby układ dyskretny nie był wewnętrźnie dodatni. Pokażemy również, że układ dyskretny jest stabilny asymptotycznie wtedy i tylko wtedy, gdy układ ciągły jest stabilny asymptotycznie i długość kroku dyskretyzacji jest wystarczająco mała.

### Podstawowe definicje i twierdzenia oraz sformułowanie zadania

Niech  $R^{p \times n}$  będzie zbiorem macierzy o wymiarach  $p \times n$  i elementach rzeczywistych oraz  $R^p := R^{p \times 1}$ . Zbiór macierzy o wymiarach  $p \times n$  i elementach nieujemnych oznaczamy będziemy przez  $R_+^{p \times n}$ .

Weźmy pod uwagę liniowy układ ciągły opisany równaniami

$$\dot{x} = Ax + Bu, \quad x(0) = x_0 \quad (1a)$$

$$y = Cx + Du \quad (1b)$$

gdzie  $\dot{x} = \frac{dx}{dt}$ ,  $x \in R^n$ ,  $u \in R^m$ ,  $y \in R^p$  są odpowiednio wektorem stanu, wymuszenia i odpowiedzi, a  $A \in R^{n \times n}$ ,  $B \in R^{n \times m}$ ,  $C \in R^{p \times n}$  i  $D \in R^{p \times m}$ .

Układ (1) nazywamy wewnętrźnie dodatnim, jeżeli dla każdego  $x_0 \in R_+^n$  i wszystkich wymuszeń  $u(t) \in R_+^m$ ,  $t \geq 0$  zachodzi  $x(t) \in R_+^n$  oraz  $y(t) \in R_+^p$  dla  $t \geq 0$ .

Macierz  $A \in R^{n \times n}$  nazywamy macierzą Metzlera, jeżeli wszystkie jej elementy leżące poza główną przekątną są nieujemne.

W pracy [4, 7] pokazano, że  $e^{At} \in R_+^{n \times n}$  wtedy i tylko wtedy, gdy  $A \in R^{n \times n}$  jest macierzą Metzlera.

Układ (1) jest wewnętrznie dodatni wtedy i tylko wtedy, gdy  $A$  jest macierzą Metzlera, a  $B \in R_+^{n \times m}$ ,  $C \in R_+^{p \times n}$  i  $D \in R_+^{p \times m}$  [4, 16].

Układ (1) nazywamy zewnętrznie dodatnim, jeżeli dla zerowych warunków początkowych  $x_0 = 0$ , odpowiedź układu przyjmuje wartości nieujemne  $y(t) \in R_+^p$  dla  $t \geq 0$  na każde nieujemne wymuszenie,  $u(t) \in R_+^m$ ,  $t \geq 0$ .

Układ (1) jest zewnętrznie dodatni wtedy i tylko wtedy, gdy jego macierz charakterystyk impulsowych spełnia warunek [4.16]

$$y(t) \in R_+^{p \times m} \text{ dla } t \geq 0 \quad (2)$$

Z porównania powyższych definicji wynika natychmiast, że każdy ciągły układ wewnętrznie dodatni jest również zewnętrznie dodatni. Układ (1) może być zewnętrznie dodatni, ale nie musi być układem wewnętrznie dodatnim [4].

Weźmy z kolei pod uwagę liniowy układ dyskretny opisany równaniami

$$x_{i+1} = Fx_i + Gu_i \quad i \in Z_+ = \{0, 1, 2, \dots\} \quad (3a)$$

$$y_i = Cx_i + Du_i \quad (3b)$$

gdzie,  $x_i \in R^n$ ,  $u_i \in R^m$ ,  $y_i \in R^p$  są odpowiednio wektorem stanu, wymuszenia i odpowiedzi w chwili dyskretnej  $i$ , a  $F \in R^{n \times n}$ ,  $G \in R^{n \times m}$ ,  $C \in R^{p \times n}$  i  $D \in R^{p \times m}$ .

Układ (3) nazywamy wewnętrznie dodatnim, jeżeli dla każdego  $x_0 \in R_+^n$  i wszystkich ciągów  $u_i \in R^m$ ,  $i \in Z_+$ , zachodzi  $x_i \in R_+^n$  oraz  $y_i \in R_+^p$  dla  $i \in Z_+$ .

Układ (3) jest wewnętrznie dodatni wtedy i tylko wtedy, gdy [4]

$$F \in R_+^{n \times n}, \quad G \in R_+^{n \times m}, \quad C \in R_+^{p \times n} \text{ i } D \in R_+^{p \times m} \quad (4)$$

Układ (3) nazywamy zewnętrznie dodatnim, jeżeli dla zerowych warunków początkowych  $x_0 \in R_+^n$ , odpowiedź układu przyjmuje wartości nieujemne  $y_i \in R_+^p$ ,  $i \in Z_+$ , na każde wymuszenie nieujemne  $u_i \in R_+^m$ ,  $i \in Z_+$ .

Układ (3) jest zewnętrznie dodatni wtedy i tylko wtedy, gdy jego macierz charakterystyk impulsowych spełnia warunek [4, 16]

$$g_i \in R_+^{p \times m} \text{ dla } i \in Z_+ \quad (5)$$

Z porównania powyższych definicji wynika natychmiast, że każdy dyskretny układ wewnętrznie dodatni jest również zewnętrznie dodatni. Układ (3) może być zewnętrznie dodatni, ale nie musi być układem wewnętrznie dodatnim [4, 16]

Zastępując w (1a) pochodną  $\dot{x} = \frac{dx}{dt}$  ilorazem różnicowym

wym  $\frac{x_{i+1} - x_i}{\Delta t}$  z równań (1) otrzymamy równania (3), przy

czym  $x_i = x(i\Delta t)$ ,  $u_i = u(i\Delta t)$ ,  $y_i = y(i\Delta t)$  oraz

$$F := I_n + \Delta t A, \quad G = \Delta t B \quad (6)$$

a  $I_n$  jest macierzą jednostkową stopnia  $n$ .

W pracy tej przeanalizujemy wpływ długości kroku dyskretyzacji  $\Delta t$  na dodatniość wewnętrzną i zewnętrzną oraz stabilność asymptotyczną układu dyskretnego otrzymanego w wyniku dyskretyzacji z układu ciągłego.

## Wpływ długości kroku dyskretyzacji na dodatniość układu

Założmy, że układ ciągły (1) jest wewnętrznie dodatni. Powstaje pytanie czy układ dyskretny (3) otrzymany w wyniku dyskretyzacji o długości kroku  $\Delta t$  jest również układem wewnętrznie dodatnim dla każdej wartości  $\Delta t$ . Odpowiedź na to pytanie daje następujące:

**Twierdzenie 1.** Układ dyskretny (3) jest układem wewnętrznie dodatnim wtedy i tylko wtedy, gdy układ ciągły (1) jest wewnętrznie dodatni i długość kroku  $\Delta t$  spełnia warunek

$$\Delta t \leq \frac{1}{\max_i |a_{ii}|} \quad (i=1, 2, \dots, n) \quad (7)$$

przy czym  $a_{ii}$  jest  $i$ -tym elementem głównej przekątnej macierzy  $A$ .

**Dowód.** Z zależności  $F = I_n + \Delta t A$  wynika, że macierz  $F \in R_+^{n \times n}$  tylko wtedy, gdy macierz  $A$  ma nieujemne elementy poza główną przekątną, czyli gdy jest macierzą Metzlera.

Założmy najniekorzystniejszy przypadek, że dla pewnego  $i$  element  $a_{ii} < 0$ . Wtedy macierz  $F$  ma wszystkie elementy nieujemne, gdy zachodzi (7). W tym przypadku układ dyskretny jest wewnętrznie dodatni, jeżeli układ ciągły (1) jest wewnętrznie dodatni  $\square$ .

Z twierdzenia 1 wynika, że jeżeli  $\Delta t > \frac{1}{\max_i |a_{ii}|}$ , to w wyniku dyskretyzacji z dodatniego wewnętrznie układu ciągłego (1) otrzymamy układ dyskretny (3) niedodatni wewnętrznie.

Niech układ ciągły (1) będzie wewnętrznie dodatni. Powstaje pytanie, czy układ dyskretny (3) otrzymany z układu (1) w wyniku dyskretyzacji o długości kroku  $\Delta t$  będzie również układem zewnętrznie dodatnim dla każdej wartości  $\Delta t$ . Odpowiedź na to pytanie daje następujące twierdzenie.

**Twierdzenie 2.** Układ dyskretny (3) jest układem zewnętrznie dodatnim wtedy, gdy układ ciągły (1) jest wewnętrznie dodatni i długość kroku  $\Delta t$  spełnia warunek (7).

**Dowód.** Jeżeli układ ciągły (1) jest wewnętrznie dodatni i macierz  $A$  jest macierzą Metzlera, to  $F \in R_+^{n \times n}$ , gdy  $\Delta t$  spełnia warunek (7). Macierz charakterystyk impulsowych układu (3) jest określona zależnością [11, 4]

$$g_i = \begin{cases} D & \text{dla } i=0 \\ CF^{i-1}G & \text{dla } i \geq 1 \end{cases} \quad i \in Z_+ \quad (8)$$

Z (8) wynika, że  $g_i$  spełnia warunek (5), gdy  $D \in R_+^{p \times m}$ ,  $C \in R_+^{p \times n}$ ,  $F \in R_+^{n \times n}$ ,  $G \in R_+^{n \times m}$  czyli gdy układ ciągły (1) jest wewnętrznie dodatni.

Jeżeli  $\Delta t > \frac{1}{\max_i |a_{ii}|}$ , to w wyniku dyskretyzacji z dodatniego wewnętrznie układu ciągłego (1) otrzymamy macierz  $F$ ,

której niektóre elementy na głównej przekątnej będą ujemne, co może spowodować, że macierz  $g_i$  nie będzie spełniać warunku (5).

**Przykład 1.** Dany jest układ ciągły (1) wewnętrznie dodatni, którego macierze są równe

$$A = \begin{bmatrix} -4 & 1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (9)$$

Korzystając z (6) otrzymamy dla  $\Delta t = 0.1$

$$F_1 = I_n + \Delta t A = \begin{bmatrix} 0.6 & 0.1 \\ 0 & 0.8 \end{bmatrix}, \text{ a dla } \Delta t = 0.49 \text{ odpowiednio}$$

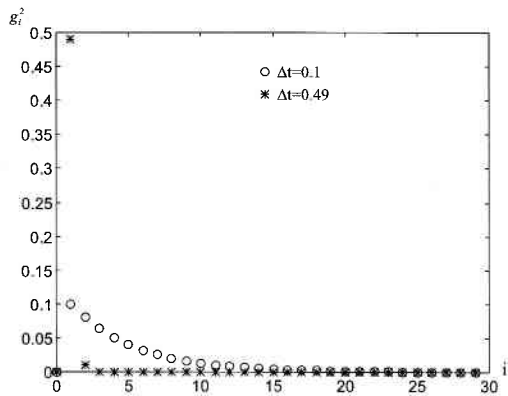
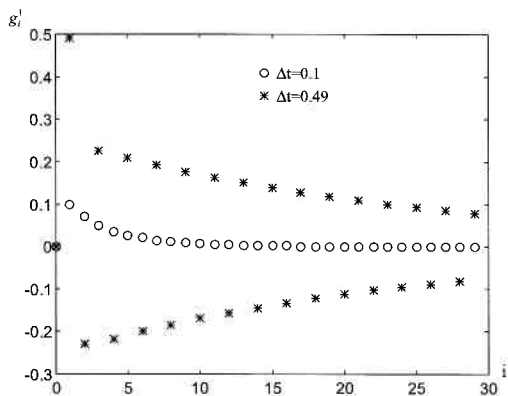
$$F_2 = I_n + \Delta t A = \begin{bmatrix} -0.96 & 0.49 \\ 0 & 0.02 \end{bmatrix}$$

Zgodnie z twierdzeniem 2 dla  $\Delta t = 0.1$  układ dyskretny (3) jest wewnętrznie dodatni, a dla  $\Delta t = 0.49$  nie jest wewnętrznie dodatni. Korzystając ze wzoru (8) otrzymamy dla  $\Delta t = 0.1$

$$g_0 = D = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, g_1 = CG = \begin{bmatrix} 0.1 \\ 0.1 \end{bmatrix}, g_2 = CF_1 G = \begin{bmatrix} 0.07 \\ 0.08 \end{bmatrix}, g_3 = CF_1^2 G = \begin{bmatrix} 0.05 \\ 0.064 \end{bmatrix}, \dots$$

a dla  $\Delta t = 0.49$  odpowiednio

$$g_0 = D = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, g_1 = CG = \begin{bmatrix} 0.49 \\ 0.49 \end{bmatrix}, g_2 = CF_2 G = \begin{bmatrix} -0.2303 \\ 0.0098 \end{bmatrix}, g_3 = CF_2^2 G = \begin{bmatrix} 0.22589 \\ 0.000196 \end{bmatrix}, \dots$$



Rys. 1

Na rys. 1. Pokazano przebiegi elementów  $g_i^1$  i  $g_i^2$  macierzy

charakterystyk impulsowych  $g_i = \begin{bmatrix} g_i^1 \\ g_i^2 \end{bmatrix}$  w funkcji  $i \in Z_+$ .

### Wpływ długości kroku dyskretyzacji na stabilność asymptotyczną

Weźmy pod uwagę ciągły układ liniowy opisany równaniem

$$\dot{x} = Ax, x(0) = x_0 \quad (10)$$

przy czym  $A \in R^{n \times n}$ .

Rozwiązanie równania (10) ma postać [11]

$$x(t) = e^{At} x_0 \quad (11)$$

Układ (10) nazywamy asymptotycznie stabilnym, jeżeli rozwiązanie (11) spełnia warunek

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0 \text{ dla każdego } x_0 \in R^n \quad (12)$$

Układ ten jest stabilny asymptotycznie wtedy i tylko wtedy, gdy wszystkie wartości własne macierzy  $A$  (pierwiastki równania  $\det[Is-A]=0$ ) mają ujemne części rzeczywiste  $\text{Re}(s_k) < 0$  dla każdego  $k = 1, 2, \dots, n$ . [ 11 ]

Weźmy z kolei pod uwagę dyskretny układ liniowy opisany równaniem

$$x_{i+1} = Fx_i, i \in Z_+ \quad (13)$$

przy czym  $F \in R^{n \times n}$ .

Rozwiązanie równania (13) ma postać [11]

$$x_i = A^i x_0, i \in Z_+ \quad (14)$$

Układ ten nazywamy asymptotycznie stabilnym, jeżeli rozwiązanie (14) spełnia warunek

$$\lim_{i \rightarrow \infty} A^i = 0 \text{ dla każdego } x_0 \in R^n \quad (15)$$

Układ (13) jest stabilny asymptotycznie wtedy i tylko wtedy, gdy wszystkie wartości własne macierzy  $F$  mają moduły mniejsze od 1,  $|z_k| < 1$  dla  $k = 1, 2, \dots, n$ . [11]

Założmy, że układ (10) jest stabilny asymptotycznie. Powstałą pytania:

- 1) czy układ dyskretny (13) otrzymany w wyniku dyskretyzacji o długości kroku  $\Delta t$  z układu (10) jest również stabilny asymptotycznie dla każdej wartości  $\Delta t$ ?
- 2) czy dobierając odpowiednio długość kroku  $\Delta t$  możemy z niestabilnego asymptotycznie układu ciągłego (10) otrzymać stabilny asymptotycznie układ dyskretny (13)?

Wykażemy, że układ dyskretny (13) może być stabilny asymptotycznie tylko wtedy, gdy układ ciągły (10) jest stabilny asymptotycznie oraz, że przez dobór długości kroku  $\Delta t$  nie można otrzymać stabilnego asymptotycznie układu dyskretnego (13), jeżeli układ ciągły (10) jest niestabilny asymptotycznie.

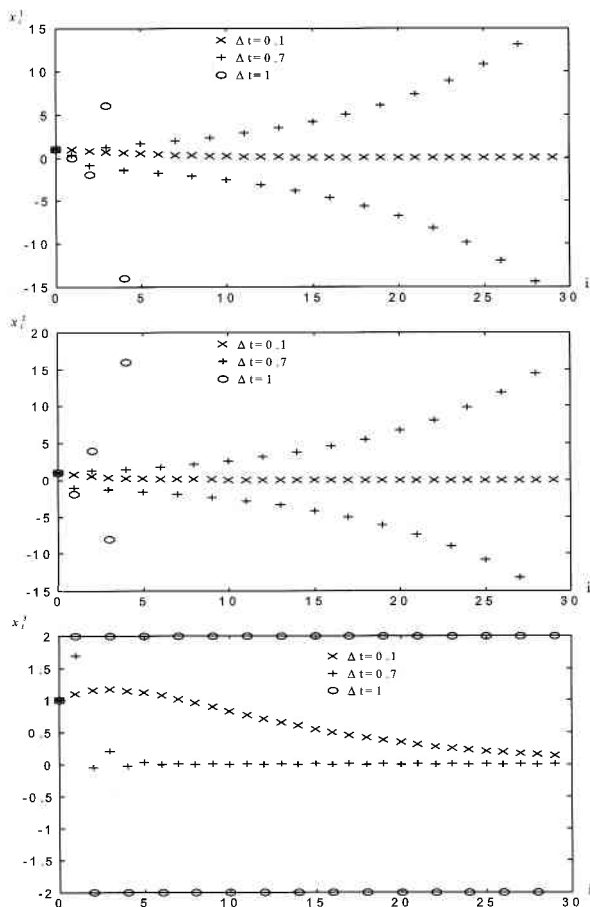
Bez straty ogólności rozważań zakładamy, że macierz  $A$  ma postać kanoniczną Frobeniusa [11]. Wtedy

$$\det[Is - A] = \begin{vmatrix} s & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & s & -1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & s & -1 \\ a_0 & a_1 & a_2 & \dots & a_{n-2} & s + a_{n-1} \end{vmatrix} = s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \dots + a_1s + a_0 \quad (16)$$

Zależność (16) wynika z lematu 4 (udowodnionego w dodatku) dla  $k=1$ .

**Twierdzenie 3.** Układ dyskretny (13) jest stabilny asymptotycznie wtedy i tylko wtedy, gdy układ ciągły (10) jest stabilny asymptotycznie i długość kroku  $\Delta t$  spełnia warunek

$$\Delta t < \min_i \frac{2\alpha_i}{\alpha_i^2 + \beta_i^2} \quad (17)$$



Rys. 2

przy czym:  $s_i = -\alpha_i + j\beta_i$  jest  $i$ -tą ( $i=1,2,\dots,n$ ) wartością własną macierzy  $A$ .

**Dowód.** Z lematu 2 wynika, że jeżeli  $s_i$ ,  $i=1,2,\dots,n$  są wartościami własnymi macierzy  $A$ , to  $\Delta t s_i$ ,  $i=1,2,\dots,n$  są wartościami własnymi macierzy  $\Delta t A$ . Wobec tego zgodnie z lematem 1,  $1+\Delta t s_i$ ,  $i=1,2,\dots,n$  są wartościami własnymi macierzy  $F=I_n+\Delta t A$ . Układ dyskretny (13) jest stabilny wtedy i tylko wtedy, gdy wartości własne  $z_i=1+\Delta t s_i$ ,  $i=1,2,\dots,n$  spełniają warunek  $|z_i|=|1+\Delta t s_i|=|1-\Delta t \alpha_i + j\Delta t \beta_i| < 1$ , czyli  $(1-\Delta t \alpha_i)^2 + (\Delta t \beta_i)^2 < 1$  dla każdego  $i=1,2,\dots,n$ . Rozwiązując tę nierówność względem  $\Delta t$  otrzymamy warunek (17). Jeżeli chociażby jedna wartość własna  $s_i$  macierzy  $A$  ma nieujemną część rzeczywistą, to dla dowolnego  $\Delta t > 0$  wartości tej odpowiada wartość własna macierzy  $F$  niespełniająca warunku  $|z_i| < 1$ .

Jeżeli wszystkie wartości własne macierzy  $A$  są rzeczywiste ( $\beta_i=0$  dla  $i=1,2,\dots,n$ ), to warunek (17) upraszcza się do postaci

$$\Delta t < \min_i \frac{2}{\alpha_i} \quad (17a)$$

**Przykład 2.** Dany jest układ ciągły (10) o macierzy

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \quad (18)$$

Wielomian charakterystyczny tej macierzy ma postać

$$\det[I_n s - A] = \begin{vmatrix} s+2 & -1 & 0 \\ 0 & s+3 & 0 \\ -1 & -1 & s+1 \end{vmatrix} = (s+1)(s+2)(s+3) = s^3 + 6s^2 + 11s + 6$$

a jej wartości własne są równe:  $s_1=-1$ ,  $s_2=-2$ ,  $s_3=-3$ . Układ ciągły jest więc stabilny asymptotycznie.

Niech  $\Delta t=0.1$ . W tym przypadku warunek (17a) jest spełniony, gdyż  $\min_i \frac{2}{\alpha_i} = \frac{2}{3} > \Delta t$ , a macierz  $F$  układu dyskretnego (13) ma postać

$$F = I_n + \Delta t A = \begin{bmatrix} 0.8 & 0.1 & 0 \\ 0 & 0.7 & 0 \\ 0.1 & 0.1 & 0.9 \end{bmatrix} \quad (19)$$

Wielomian charakterystyczny macierzy (19) o postaci

$$\det[I_n z - F] = \begin{vmatrix} z-0.8 & -0.1 & 0 \\ 0 & z-0.7 & 0 \\ -0.1 & -0.1 & z-0.9 \end{vmatrix} = (z-0.7)(z-0.8)(z-0.9) = z^3 - 0.24z^2 + 1.9z - 0.503$$

ma następujące miejsca zerowe:  $z_1=0.7$ ,  $z_2=0.8$ ,  $z_3=0.9$ .

Dla  $\Delta t=0.1$  układ dyskretny (13) o macierzy (19) jest więc stabilny asymptotycznie.

Niech z kolei  $\Delta t=1$ . W tym przypadku warunek (17a) nie jest spełniony, a macierz  $F$  ma postać

$$F = I_n + \Delta t A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (20)$$

Wielomian charakterystyczny macierzy (20) o postaci

$$\det[I_n z - F] = \begin{vmatrix} z+1 & -1 & 0 \\ 0 & z+2 & 0 \\ -1 & -1 & z \end{vmatrix} = z(z+1)(z+2) = z^3 + 3z^2 + 2z$$

ma następujące miejsca zerowe:  $z_1=0$ ,  $z_2=-1$ ,  $z_3=-2$ . Dla  $\Delta t=1$  układ dyskretny (13) o macierzy (20) jest więc niestabilny asymptotycznie.

Na rys. 2 podano przebiegi zmiennych stanu  $x_1^i, x_2^i, x_3^i$  układu dyskretnego (13) powstałego z układu ciągłego (10) o macierzy (18) dla trzech wartości kroku  $\Delta t = 0.1; 0.7; 1$ .

**Przykład 3.** Dany jest niestabilny układ ciągły (10) o macierzy

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \quad (21)$$

której wartości własne są równe:  $s_1=s_2=-1$ ,  $s_3=1$ .

Łatwo sprawdzić, że w tym przypadku macierz  $F$  ma postać

$$F = I_n + \Delta t A = \begin{bmatrix} 1-\Delta t & \Delta t & 0 \\ 0 & 1+\Delta t & 0 \\ \Delta t & \Delta t & 1-\Delta t \end{bmatrix} \quad (22)$$

a jej wartości własne są równe:  $z_1=z_2=1-\Delta t$ ,  $z_3=1+\Delta t$ .

Dla każdego dowolnie małego kroku  $\Delta t > 0$  mamy  $|z_3| > 1$ . Układ dyskretny jest więc również niestabilny asymptotycznie dla każdej długości kroku  $\Delta t$ .

## Uwagi końcowe i problemy otwarte

W pracy przeprowadzono analizę wpływu długości kroku dyskretyzacji  $\Delta t$  na dodatniość wewnętrzną i zewnętrzną oraz stabilność asymptotyczną układu dyskretnego, otrzymanego w wyniku dyskretyzacji z liniowego układu ciągłego.

Niektóre z tych rozważań dają się stosunkowo łatwo uogólnić na słabo dodatnie układy liniowe ciągłe, opisane równaniami [11, 12]

$$\begin{aligned} E\dot{x} &= Ax + Bu \\ y &= Cx + Du \end{aligned}$$

gdzie  $E \in R^{n \times n}$  jest macierzą osobiwą ( $\det E = 0$ ), a  $x, u, y$  oraz macierze  $A, B, C$  i  $D$  są określone tak samo, jak dla układu (1).

W pracy nie przeprowadzono analizy wpływu długości kroku dyskretyzacji na dodatniość zewnętrzną układu dyskretnego otrzymanego w wyniku dyskretyzacji z zewnątrz dodatniego układu ciągłego.

Problemem otwartym jest również analiza wpływu długości kroku dyskretyzacji na osiągalność, sterowalność i obserwowalność [13, 11] układu dyskretnego otrzymanego w wyniku dyskretyzacji z dodatniością wewnętrzną (z zewnątrz) układu ciągłego. Zagadnienia te będą przedmiotem oddzielnej pracy autora.

Zagadnieniem ważnym jest przeniesienie tych rozważań na dodatniość wewnątrz i zewnątrz układy dwuwymiarowe ciągłe [6, 9] i ciągło-dyskretno [3, 10].

**Dodatek**

W dodatku tym podano cztery lematy (wraz z dowodami), z których korzysta się w wykładzie podstawowego materiału pracy.

**Lemat 1.** Niech  $s_i, i = 1, 2, \dots, n$  będą wartościami własnymi macierzy  $A \in R^{n \times n}$ , czyli pierwiastkami równania  $\det[I_n s - A] = 0$ . Wtedy  $\bar{s}_i = s_i + 1, i = 1, 2, \dots, n$  są wartościami własnymi macierzy  $A + I_n$ .

**Dowód.** Z zależności

$$\det[I_n \bar{s} - (A + I_n)] = \det[I_n (\bar{s} - 1) - A] = \det[I_n s - A]$$

wynika, że  $\bar{s}_i = s_i - 1$  dla  $i = 1, 2, \dots, n$ .

**Lemat 2.** Jeżeli  $s_i, i = 1, 2, \dots, n$  są wartościami własnymi macierzy  $A \in R^{n \times n}, A \in R^{n \times n}$  to  $\hat{s}_i := ks_i$  są wartościami własnymi macierzy  $kA$ , przy czym  $k \in C$  jest dowolnym niezerowym skalarzem.

**Dowód.** Z zależności

$$\det[I_n \hat{s} - kA] = \det \left[ k \left( \frac{I_n \hat{s}}{k} - A \right) \right] = k^n \det \left[ I_n \frac{\hat{s}}{k} - A \right] = k^n \det [I_n s - A]$$

wynika, że  $\hat{s}_i = ks_i$  dla  $i = 1, 2, \dots, n$ . □

**Lemat 3.** Jeżeli  $s_i, i = 1, 2, \dots, n$  są pierwiastkami równania

$$s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \dots + a_1s + a_0 = 0 \tag{D.1}$$

to  $ks_i, i = 1, 2, \dots, n$  są pierwiastkami równania

$$s^n + ka_{n-1}s^{n-1} + \dots + k^{n-1}a_1s + k^n a_0 = 0 \tag{D.2}$$

**Dowód.** Niech  $s_i, i = 1, 2, \dots, n$  są pierwiastkami równania (D.1).

Wtedy

$$(s-s_1)(s-s_2)\dots(s-s_n) = s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \dots + a_1s + a_0 \tag{D.3}$$

przy czym

$$\begin{aligned} a_0 &= (-1)^n s_1 s_2 \dots s_n \\ a_1 &= (-1)^{n-1} (s_1 s_2 + s_1 s_3 + \dots + s_1 s_n + s_2 s_3 + \dots + s_{n-1} s_n) \\ a_{n-1} &= (-1)^1 (s_1 + s_2 + \dots + s_n) \end{aligned} \tag{D.4}$$

Analogicznie po uwzględnieniu (D.2)-(D.4) otrzymamy

$$(s-ks_1)(s-ks_2)\dots(s-ks_n) = k^n (-1)^n (s_1 s_2 \dots s_n) + k^{n-1} (-1)^{n-1} (s_1 s_2 + s_1 s_3 + \dots + s_1 s_n + s_2 s_3 + \dots + s_{n-1} s_n) s + \dots + k (-1)^1 (s_1 + s_2 + \dots + s_n) s^{n-1} + s^n = k^n a_0 + k^{n-1} a_1 s + \dots + k a_{n-1} s^{n-1} + s^n$$

Tak więc  $ks_i, i = 1, 2, \dots, n$  są pierwiastkami równania (D.2).

**Lemat 4.** Niech

$$A = \begin{bmatrix} 0 & k & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & k & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & k \\ -a_0 k & -a_1 k & -a_2 k & \dots & -a_{n-1} k \end{bmatrix}, k \in C \tag{D.5}$$

Wtedy  $\det[I_n s - A] = s^n + a_{n-1} k s^{n-1} + a_{n-2} k^2 s^{n-2} + \dots + a_0 k^n$  (D.6)

**Dowód.** Rozwijając wyznacznik  $\det[I_n s - A]$  według n-tego wiersza macierzy (D.5)

otrzymamy

$$\det[I_n s - A] = \begin{vmatrix} s & -k & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & s & -k & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & s & -k \\ a_0 k & a_1 k & a_2 k & \dots & a_{n-2} k & s + a_{n-1} k \end{vmatrix} =$$

$$a_0 k (-1)^{n-1} (-k)^{n-1} + a_1 k (-1)^{n+2} s (-k)^{n-2} + \dots + (s + a_{n-1} k) (-1)^{2n} s^{n-1} = a_0 k^n + a_1 k^{n-1} s + \dots + a_{n-1} k s^{n-1} + s^n \quad \square$$

**Literatura**

- [1] A. BERMAN and R. J. PLEMMOUS, Nonnegative Matrices in the Mathematical Computer, Academic Press, New York 1979.
- [2] M. P. FANTI, B. MAIONE and B. TURCHIANO, Controllability of multi-input positive discrete-time systems, Int. J. Control, 1990, vol. 51, No 6, pp. 1295-1308.
- [3] T. KACZOREK, Controllability and minimum energy control of 2-D continuous-discrete linear systems, Applied Mathematics and Computer Science, vol.5, No 1, 1995, pp. 5-21.
- [4] T. KACZOREK, Dodatnie układy jedno i dwuwymiarowe. Oficyna Wyd. Politechniki Warszawskiej, W-wa 2000 (w druku)
- [5] T. KACZOREK, Linear Control Systems, vol. 2, Research Studies Press and J. Wiley, New York, 1993.
- [6] T. KACZOREK, Local controllability and minimum energy control of continuous 2-D linear time- invariant systems, Multidimensional Systems and Signal Processing 6, 1995, pp. 69-75.
- [7] T. KACZOREK, Positive linear system and their relationship with electrical circuits, XX- SPETO, 1997, pp. 33-41
- [8] T. KACZOREK, Positive singular discrete linear systems, Bull. Pol. Acad. Sci. Techn., vol. 45, No 4, 1997, pp. 619-631.
- [9] T. KACZOREK, Singular continuous 2-D linear systems, Bull. Pol. Acad. Techn. Sci., vol. 42, No 4, 1994, pp. 565-577.
- [10] T. KACZOREK, Singular 2-D continuous-discrete linear systems, Dynamics of continuous, discrete and impulsive systems, Advances in Systems Science and Applications, pp. 103-108, 1995
- [11] T. KACZOREK, Teoria sterowania i systemów, PWN, Warszawa 1999.
- [12] T. KACZOREK, Weakly positive continuous-time linear systems, Bull. Pol. Acad. Sci. Techn., vol. 46, No 2, 1998, pp. 233-245.
- [13] J. KLAMKA, Sterowalność układów dynamicznych, PWN, Warszawa - Wrocław 1990.
- [14] H. MAEDA and S. KODAMA, Positive realization of difference equations, IEEE Trans. on Circuits and Systems, vol. CAS-28, No. 1, 1981, pp. 39-47.
- [15] H. MINC, Nonnegative matrices, J. Wiley, New York 1988.
- [16] S. RINALDI, L. FARINA, I sistemi lineari positivi, Citta Studi Edizioni, Milano, 1995
- [17] Z. TRZASKA, State-space/descriptor models and asymptotic behavior of continuous-time positive control systems, Computer Math. Applic. vo. 34, No. 12, 1997, pp. 1-10.