Adam ŻUCHOWSKI
POLITECHNIKA SZCZECIŃSKA
WYDZIAŁ ELEKTRYCZNY
INSTYTUT AUTOMATYKI PRZEMYSŁOWEJ

Uwagi o metodzie identyfikacji dynamiki na podstawie pomiarów początku odpowiedzi skokowej

Prof. dr hab. inż. Adam R. ŻUCHOWSKI profesor zwyczajny w Instytucie Automatyki Przemysłowej Politechniki Szczecińskiej. Ze szkolnictwem wyższym związany zawodowo od 1955 r. (Politechnika Wrocławska, Politechnika Szczecińska). Jest współtwórcą polskiej szkoły miernictwa dynamicznego. Posiada w dorobku 230 publikacji z dziedziny miernictwa i automatyki.

Streszczenie

W artykule podjęto próbę przedstawienia teorii błędów i optymalizacji procesu identyfikacji dynamiki obiektów na podstawie pomiarów początku odpowiedzi skokowej, przy zastosowaniu metody regresji.

Abstract

An attempt of presenting the error theory and optimization of a process of identification of the dynamics of different objects on the basis of measurements of the beginning of a step response using the regression method.

Wstęp

Metoda identyfikacji dynamiki na podstawie pomiarów początku odpowiedzi skokowej – bardzo interesująca z punktu widzenia możliwości zastosowań w układach samo nastrajających się prowadzi zwykle do wyników obarczonych znacznymi błędami z powodu występowania zakłóceń. Błędy te są zależne od wielu czynników, w tym od długości wykorzystywanego odcinka czasowego przebiegu. Jak dotąd nie podjęto próby opracowania teorii tych błędów i optymalizacji procesu pomiaru. Niniejszy artykuł stanowi próbę wypełnienia tej luki.

Szczegółowy opis metody opracowanej przez S. Skoczowskiego i jej zastosowań do identyfikacji dynamiki obiektów wieloinercyjnych, oscylacyjnych i innych znajdzie Czytelnik w cytowanych pracach [1...6], powtórzymy tu jedynie to, co będzie istotne dla dalszych rozważań. Jeśli transmitancja badanego obiektu ma postać:

$$K(s)=\frac{b_m s^m+b_{m-1}s^{m-1}+\ldots+b_0}{a_n s^n+a_{n-1}s^{n-1}+\ldots+a_0} \tag{1}$$

przy $n > m$, to wykonując dzielenie licznika przez mianownik poczynając od najwyższych potęg s otrzymuje się:

$$K(s)=\frac{b_m}{a_n}s^{m-n}+\left(\frac{b_{m-1}}{a_n}-\frac{a_{n-1}}{a_n}\frac{b_m}{a_n}\right)s^{m-n-1}+\ldots$$

i charakterystykę skokową $h(t)$ w postaci:

$$h(t)=A_0t^N+A_1t^{N+1}+A_2t^{N+2}+\ldots \tag{2}$$

gdzie $N = n-m$ będzie dalej nazywane zastępczym rzędem dynamiki. Na ogół ciąg modułów współczynników $|A_0|, |A_1|, |A_2|, \ldots$ maleje ze wzrostem wskaźnika i tym samym dla krótkich czasów t_i i t_j wolno przyjąć:

$$h(t_i)\cong A_0t_i^N,\quad h(t_j)\cong A_0t_j^N$$

skąd wynika zależność

$$N_{i,j}\cong\frac{\ln\ h(t_j)-\ln\ h(t_i)}{\ln\ t_j-\ln\ t_i}$$

Istnienie zakłóceń oraz dalszych członów szeregu (2) wprowadza błąd, ponieważ jednak rzeczywiste N przyjmuje wyłącznie wartości całkowite, dodatnie – wartość poprawna może być wyznaczona poprzez uśrednienie odpowiedniej liczby wyników obliczeń dla wielu par próbek oraz zaokrąglenie:

$$N=Ent\left\{\overline{N}_{i,j}\right\} \tag{3}$$

W [1...6] wskazano, że taka metoda pozwala wyznaczać dokładną wartość N. W cytowanych pracach wyznacza się dalej parametry transmitancji (1) bezpośrednio lub przez wyznaczenie współczynników a_n, $a_{n-1}, \ldots$ wykorzystując pary próbek $h(t_i)$, $h(t_j)$ i uśredniając wyniki. Autor metody dokonuje oszacowań błędów w konkretnych realizacjach procesu, ale uzyskanie jakichkolwiek ogólniejszych zależności analitycznych przy takim podejściu wydaje się bardzo trudne.

Ponieważ jednak N znane jest dokładnie – można też problem identyfikacji sprowadzić do wyznaczenia współczynników A_0, A_1, ... A_k z wzoru (2) wykorzystując metodę regresji [7], a następnie wyznaczać bądź współczynniki a_i, b_j wzoru (1), bądź bezpośrednio parametry transmitancji w konkretnych warunkach, a więc stałe czasowe, współczynnik wzmocnienia, stopnie tłumienia, pulsacje drgań swobodnych itp. Oszacowania błędów przy metodzie regresji są znacznie łatwiejsze i choć wyniki takich oszacowań najprawdopodobniej nie będą identyczne z wynikami uzyskanymi przez S. Skoczowskiego – powinny być zbliżone, gdyż metoda regresji również stosuje uśrednianie.

Wyznaczanie współczynników A_0^x , A_1^x ... A_n^x

Załóżmy, że został wykonany pomiar charakterystyki skokowej w obecności zakłóceń z(t) i w przedziale czasowym $0 \le t \le T$ oraz że znany jest zastępczy rząd dynamiki N. Utworzymy funkcjonał:

$$U=\int_0^T\left\{h^x(t)-A_0^xt^N-A_1^xt^{N+1}-A_2^xt^{N+2}-\ldots\right\}^2dt \tag{4}$$

i wyznaczymy współczynniki z warunku minimum funkcjonału:

$$\frac{\partial U}{\partial A_i^x}=0=-2\int_0^T\left\{h^x(t)-A_0^xt^N-A_1^xt^{N+1}-A_2^xt^{N+2}-\ldots\right\}t^{N+i}dt \tag{5}$$

$$i=0,1,\ \ldots\ k-1$$

gdzie k jest liczbą wyznaczanych współczynników. Wzór (5) prowadzi do prostego układu N równań liniowych, a obliczone współczynniki A_i^x różnią się od współczynników rzeczywistych A_i z powodu występowania zakłóceń z(t), z powodu błędów całkowania numerycznego przy skończonym kroku, a także z powodu ograniczonej liczby k. Oznaczając:

$$\frac{1}{T}\int_0^T t^N h^x(t)dt = \overline{t^N h^x}$$

otrzymamy układ równań:

$$A_0^x \frac{T^{2N+i}}{2N+1+i} + A_1^x \frac{T^{2N+1+i}}{2N+2+i} + A_2^x \frac{T^{2N+2+i}}{2N+3+i} + \ldots = \overline{t^{N+i} h^x} \tag{6}$$

dla $i = 0,1,2,\ldots k-1$

Oszacowanie zależności $\overline{T^M h^x}$

Przyjmiemy dla zakłóceń model:

$$z(t) = z_0 + \sum_{r=1}^{\infty} z_r \sin(\omega_r t + \phi_r) \tag{7}$$

i uwzględniając, że $h^x(t) = h(t) + z(t)$ oraz wzór (2) obliczymy:

$$\overline{t^M h(t)} = \sum_{r=0}^{\infty} A_r \frac{T^{M+N+r}}{M+N+r+1} \tag{8}$$

$$\overline{t^M z_0} = \frac{z_0}{M+1} T^M \tag{9}$$

Oszacowanie składnika sumy $\overline{t^M z_r \sin(\omega_r t + \phi_r)}$ można dokonać w następujący sposób:

$$\frac{1}{T}\int_0^T t^M z_r \sin(\omega_r t + \phi_r)dt = \frac{z_r}{\omega_r^M}\frac{1}{x}\int_0^x x^M \sin(x + \phi_r)dx =$$

$$= \frac{z_r}{\omega_r^M}\left\{\sin \phi_r \frac{1}{x}\int_0^x x^M \cos x\, dx + \cos \phi_r \frac{1}{x}\int_0^x x^M \sin x\, dx\right\} =$$

$$= \frac{z_r}{\omega_r^M} \sin(\phi_r + \phi_x)\sqrt{\left(\frac{1}{x}\int_0^x x^M \cos x\, dx\right)^2 + \left(\frac{1}{x}\int_0^x x^M \sin x\, dx\right)^2}$$

$$\text{gdzie} x = \omega_r T, \quad tg\ \phi_x = \left\{\int_0^x x^M \sin x\, dx\right\}\left\{\int_0^x x^M \cos x\, dx\right\}^{-1}$$

Wynika stąd oszacowanie:

$$\overline{t^M z_r \sin(\omega_r t + \phi_r)} \le \frac{|z_r|}{\omega_r} T^{M-1} F_M(x)_{\max} \tag{10}$$

$$\text{gdzie} F_M(x) = x^{-M}\sqrt{\left(\int_0^x x^M \cos x\, dx\right)^2 + \left(\int_0^x x^M \sin x\, dx\right)^2}$$

oraz

$$F_1(x)_{\max} = 1{,}26, \quad F_2(x)_{\max} = 1{,}06, \quad F_M(x)_{\max} = 1 \ dla\ M \ge 3$$

Oszacowanie $\overline{t^M z(t)}$ wyrażenia jako sumy składników (9) i (10) jest zbyt pesymistyczne, dlatego pomijając składowa stałą z_0 przyjmiemy dalej, że:

$$\overline{t^M z(t)} = \overline{\left(\frac{z}{\omega}\right)}\, T^{M-1} Q \tag{11}$$

gdzie $\overline{\left(\frac{z}{\omega}\right)}$ stanowi pewien parametr zakłóceń, a Q jest stałym współczynnikiem.

Oszacowanie błędów metody

Jak już wspomniano – wartości modułów kolejnych współczynników A_0, A_1, ... we wzorze (2) maleją najczęściej wraz ze wzrostem ich wskaźnika, to też we wzorze (8) można ograniczyć się do dwóch pierwszych składników sumy. Postępując w ten sposób i wykorzystując (11) w wyniku żmudnych obliczeń uzyskuje się z układu równań (6) wzory przybliżone określające błędy metody. Wykorzystując układ k równań (6) można wyznaczyć parametry A_{0k}^x, A_{1k}^x, ... A_{kk}^x z błędami oznaczonymi odpowiednio jako

$$D_{rk} = \frac{A_{rk}^x - A_r}{A_r} \tag{12}$$

przy tym:

$$D_{01} \le (2N+1)\left\{T\left|\frac{A_1}{A_0}\right|\frac{1}{(2N+2)} + \left|\overline{\left(\frac{z}{\omega}\right)}\right|\frac{Q_{01}}{|A_0|}T^{-(N+1)}\right\}$$

$$D_{02} \le (2N+1)(2N+2)\left\{T^2\left|\frac{A_2}{A_0}\right|\frac{1}{(2N+3)(2N+4)} + \left|\overline{\left(\frac{z}{\omega}\right)}\right|\frac{Q_{02}}{|A_0|}T^{-(N+1)}\right\} \tag{13}$$

$$D_{03} \le (2N+1)(2N+2)(2N+3)\left\{T^3\left|\frac{A_3}{A_0}\right|\frac{4}{(2N+4)(2N+5)(2N+6)} + \left|\overline{\left(\frac{z}{\omega}\right)}\right|\frac{Q_{03}}{|A_0|}T^{-(N+1)}\right\}$$

$$D_{12} \le (2N+2)(2N+3)\left\{T\left|\frac{A_2}{A_1}\right|\frac{2}{(2N+3)(2N+4)} + \left|\overline{\left(\frac{z}{\omega}\right)}\right|\frac{Q_{12}}{|A_1|}T^{-(N+2)}\right\}$$

$$D_{13} \le (2N+2)(2N+3)(2N+4)\left\{T^2\left|\frac{A_3}{A_1}\right|\frac{3}{(2N+4)(2N+5)(2N+6)} + \left|\overline{\left(\frac{z}{\omega}\right)}\right|\frac{Q_{13}}{|A_1|}T^{-(N+2)}\right\}$$

$$D_{23} \le (2N+3)(2N+4)(2N+5)\left\{T\left|\frac{A_3}{A_2}\right|\frac{3}{(2N+4)(2N+5)(2N+6)} + \left|\overline{\left(\frac{z}{\omega}\right)}\right|\frac{Q_{23}}{|A_2|}T^{-(N+3)}\right\}$$

Nie uwzględniono tutaj błędów numerycznego całkowania, które można zmniejszać poprzez skracanie długości kroku. Z przeglądu zależności przybliżonych (13) wynika, że błędy D_{rk} maleją ze wzrostem k, natomiast rosną ze wzrostem r, ponadto w każdym z rozpatrywanych przypadków istnieje pewna optymalna wartość T_{rk} (długość przedziału obserwacji $h^x(t)$) minimalizująca błąd. Obliczenie tej wartości $T_{rk\ opt}$ jest niemożliwe wobec nieznanej wartości Q_{rk}, można jednak uciec się do badań symulacyjnych wykonanych dla różnych wartości $\left(\frac{z}{\omega}\right)$, z, ω i N.

Badania symulacyjne

Wykonano badania symulacyjne przyjmując charakterystyki skokowe h(t) jak dla obiektów inercyjnych o transmitancjach:

$$K(s) = \frac{1}{(1+2s)^N}$$

gdzie N = 1, 2 i 3, oraz dla zakłóceń odpowiadających (7) bez składowej stałej $z_0 = 0$. Zmiany z uzyskiwano przez jednoczesną zmianę wszystkich składowych z_r (w tej samej skali), zmianę ω – przez zmianę wszystkich ω_r (w tej samej skali).

Wartości z i ω zmieniano w stosunku $\left(\frac{z}{\omega}\right) = (1{:}1,\ 4{:}1,\ 4{:}4)\ 10^{-4} sek.$ Różne realizacje uzyskiwano zmieniając kombinacje znaków poszczególnych składowych z_r, przy zachowaniu ich stałych wartości.

Zgrubnej oceny stosunku $\left(\frac{z}{\omega}\right)$ można dokonać rejestrując przebieg całki po czasie z sygnału $h^x(t)$ w stosunkowo niewielkim przedziale czasu 0 ... T, gdyż: $h^x(t) = h(t) + z(t)$,

$$\int_0^T h(t)dt \cong 0, \ \ oraz \ \int_0^T z(t)dt = \sum_{r=1}^{\infty} -\frac{z_r}{\omega_r}\left[\cos\phi_r - \cos(\omega_r T + \phi_r)\right]$$

skąd wynika, że średnia amplituda zmian całki jest zależna od stosunku $\left(\frac{z}{\omega}\right)$, którego średnią wartość w eksperymentach oceniano jako 10^{-4} s. Przeprowadzono obliczenia bezwzględnych wartości błędów $D_{r,k}$ (T) w funkcji długości przedziału obserwacji T, dla różnych N = 1, 2 i 3 i ośmiu różnych realizacji zakłóceń. W każdej grupie przypadków stwierdzono istnienie pewnego „średniego" minimum bezwzględnej wartości błędu. Odpowiednie obliczenia wykonane w oparciu o zależności przybliżone (13) prowadzą do wzorów:

$$\begin{gathered}
T_{01}^{(N+2)} = 2(N+1)^2\overline{\left(\frac{z}{\omega}\right)}\frac{Q_{01}}{|A_1|}, \quad T_{02}^{(N+3)} = (N+1)(N+2)(2N+3)\overline{\left(\frac{z}{\omega}\right)}\frac{Q_{02}}{|A_2|} \\
T_{03}^{(N+4)} = (N+1)(N+2)(N+3)(2N+5)\overline{\left(\frac{z}{\omega}\right)}\frac{Q_{03}}{|A_3|} \\
T_{12}^{(N+3)} = (N+2)^2(2N+3)\overline{\left(\frac{z}{\omega}\right)}\frac{Q_{12}}{|A_2|}, \quad T_{13}^{(N+4)} = (N+2)^2(N+3)(2N+5)\overline{\left(\frac{z}{\omega}\right)}\frac{Q_{13}}{|A_3|} \\
T_{23}^{(N+4)} = (N+2)(N+3)^2(2N+5)\overline{\left(\frac{z}{\omega}\right)}\frac{Q_{23}}{|A_3|}
\end{gathered} \tag{14}$$

a dla współczynników Q otrzymano wartości średnie:

$$Q_{01} = Q_{02} \cong 2.3, \quad Q_{03} = Q_{12} \cong 4.2, \quad Q_{13} = Q_{23} \cong 3.9$$

Optymalne długości czasów T_{rk} obliczone w oparciu o tak przyjęte wartości współczynników Q_{rk} i wzory (14) odpowiadają w przybliżeniu lokalizacji minimum błędów D_{rk}, natomiast obliczenia wartości błędów minimalnych w oparciu o wzory (13) i wyliczone wartości T_{rk} prowadzą do rezultatów zbyt pesymistycznych. Najprawdopodobniej przyczyną takiego stanu rzeczy jest uwzględnianie we wzorach (13) tylko dwóch pierwszych składników sumy (8).

Wnioski

Wyniki badań symulacyjnych potwierdzają w pełni, że błędy minimalne (przy optymalnie dobranych czasach $T_{r,k}$) oznaczone symbolem $D_{r,k\,min}$ maleją ze wzrostem k, a rosną ze wzrostem r. Z tych względów można by uznać za celowe korzystanie z procedur obliczeniowych co najmniej dla k = 3, warto jednak zauważyć, że długości optymalnych czasów $T_{r,k}$ rosną ze wzrostem r i k, co jest sprzeczne z ideą metody (identyfikacja na podstawie pomiaru początku odpowiedzi skokowej). Stosunkowo niewielkie błędy $D_{r,k\,min}$ dla rzędów dynamiki $N = 2$ lub $N = 3$ otrzymuje się nawet przy $k = 3$ tylko dla współczynnika A_0^x i wyjątkowo dla A_1^x, tym samym nawet przy niewielkich zakłóceniach od tej metody nie należy oczekiwać innych możliwości co pokrywa się z uwagami zawartymi w pracach [1...6]. Optymalne długości czasów obserwacji T_{03} i T_{13} są zbliżone do siebie to też można w praktyce wykorzystywać wzór na optymalny czas T_{03}. Zależy on od nieznanego a priori współczynnika A_3^x, to też można zastosować następujący algorytm postępowania:

(i) Dokonuje się rejestracji $h^x(t)$, oraz $\int_0^T h^x(t)dt$

(ii) W oparciu o pewną liczbę dyskretnych próbek R wyznacza się rząd dynamiki N (wzór 3), przybliżoną wartość $\left(\frac{z}{\omega}\right)$oraz przybliżoną wartość A_3^x z układu równań (6).

(iii) Wyznacza się czas $T_{03\,opt}$ ze wzorów (14). Jeżeli z porównania długości T i $T_{03\,opt}$ wynika, że liczba użytych próbek jest zbyt mała – uwzględnia się dodatkowych R kolejnych próbek i powtarza się kroki (ii) oraz (iii). Jeśli liczba użytych próbek jest odpowiednia, lub nawet zbyt duża – oblicza się współczynniki kończąc tym całą procedurę.

Znając wartości N, A_0^x i A_1^x, oraz dysponując ewentualnymi dodatkowymi informacjami o budowie transmitancji (1) można – jak to pokazano w cytowanych pracach – wyznaczać inne parametry transmitancji (stałe czasowe, współczynnik wzmocnienia, stopnie tłumienia itp.), należy jednak pamiętać, że wobec na ogół znacznych błędów $D_{o,k}$ i $D_{1,k}$ dokładność wyznaczonych parametrów jest niewielka. W symulowanych przykładach, dla rzędu dynamiki $N = 2$ błąd $D_{0,3}$ jest rzędu 3%, błąd $D_{1,3}$ jest rzędu 18%, błąd $D_{2,3}$ jest rzędu 60%, a optymalny czas T_{03} = 2,4 s jest zbliżony do długości stałej czasowej identyfikowanego obiektu (2 sekundy). Wyniki te uzyskano dla konkretnej postaci zakłóceń (7) i konkretnej wartości $\left(\frac{z}{\omega}\right)$ to też trudno je porównywać z wynikami cytowanymi w pracach /1/ ... /6/, jednak proporcje błędów wydają się zbliżone, a stosunkowo płaskie minimum zależności $|D_{rk}\ (T)|$ pozwala przyjąć w praktyce czas T_{03} krótszy od obliczonego z wzorów (14) i tym samym bliższy oszacowaniom Autora metody.

Proponowany algorytm postępowania jest dość skomplikowany, a odpowiednie obliczenia wymagają najprawdopodobniej dłuższego czasu niż w przypadku metody S. Skoczowskiego, która tym samym dla układów samo nastrajających się może być korzystniejsza.

LITERATURA

[1] S. SKOCZOWSKI: Metoda uproszczonej identyfikacji parametrów modelu Strejca na podstawie pierwszych próbek odpowiedzi skokowej. Kwartalnik Elektrotechniki i Telekomunikacji 1992, nr 2/3, str. 193–203.

[2] S. SKOCZOWSKI: Identyfikacja praktyczna modeli transmitancyjnych na podstawie początkowej fazy odpowiedzi skokowej. Kwartalnik Elektrotechniki i Telekomunikacji 1955, nr 1, str. 5–29.

[3] S. SKOCZOWSKI: Identyfikacja rzędu dynamiki na podstawie pomiarów dyskretnych początkowej fazy odpowiedzi skokowej. Materiały VI Sympozjum Modelowanie i Symulacja Systemów Pomiarowych, Krynica, 24–27 września 1996, str. 53–62.

[4] S. SKOCZOWSKI: Evaluation of Order and Spread of Time Constans for Aperiodic Processes using Step Response. Control Eng. Practice, Vol 5, No 8, pp. 1077–1089, 1997.

[5] S. SKOCZOWSKI: Przybliżona identyfikacja modeli procesów elektrotermicznych z uwzględnieniem nieliniowości. Materiały VII Sympozjum Modelowanie i Symulacja Systemów Pomiarowych, Krynica 23–26 września 1997 r. str. 21–28.

[6] S. SKOCZOWSKI: Modele procesów periodycznych budowane na podstawie pomiarów początku odpowiedzi skokowej. Materiały VIII Sympozjum Modelowanie i Symulacja Systemów Pomiarowych, Krynica 21–25 września 1998, str. 18–24.

[7] Siegmund BRANDT: Analiza danych. PWN, Warszawa 1998.

Artykuł recenzowany