Tadeusz KACZOREK
POLITECHNIKA WARSZAWSKA
WYDZIAŁ ELEKTRYCZNY

Utrzymanie wektora stanu w zadanym obszarze przestrzeni i stabilizacja układów za pomocą sprzężeń zwrotnych

Prof. dr hab. inż. Tadeusz KACZOREK

Uzyskał dyplom magistra inżyniera elektryka w roku 1956 na Wydziale Elektrycznym Politechniki Warszawskiej. Na tym samym Wydziale w roku 1962 uzyskał stopień naukowy doktora nauk technicznych, a w roku 1964 doktora habilitowanego. Tytuł naukowy profesora nadzwyczajnego nadała Mu Rada Państwa w roku 1971, a profesora zwyczajnego w 1974 r. Członkiem korespondentem PAN został wybrany w 1986 roku, a członkiem rzeczywistym w 1998. Od czerwca 1999 r. jest również członkiem zwyczajnym Akademii Inżynierskiej w Polsce.
W latach 1969-1970 był dziekanem Wydziału Elektrycznego, a w latach 1970-1979 prorektorem d/s nauczania Politechniki Warszawskiej. W latach 1970-1981 był dyrektorem Instytutu Sterowania i Elektroniki Przemysłowej Politechniki Warszawskiej. W latach 1988-1991 był dyrektorem Stacji Naukowej PAN w Rzymie. Jest autorem 18 książek, w tym 5-ciu wydanych za granicą oraz ponad 500 artykułów i rozpraw naukowych opublikowanych w czasopismach krajowych i zagranicznych. Główne kierunki badań naukowych to analiza i synteza układów sterowania i systemów, a w szczególności układy wielowymiarowe, układy singularne i układy dodatnie.

Streszczenie

Sformułowano i rozwiązano następujący problem. Dany jest układ liniowy ciągły ze sprzężeniem zwrotnym od wektora stanu. Należy tak dobrać macierz sprzężeń zwrotnych, aby wektor stanu układu zamkniętego dla wszystkich chwil większych od chwili początkowej pozostał w pierwszej dodatniej ćwiartce przestrzeni stanów dla każdego warunku początkowego z tej ćwiartki i układ ten był stabilny asymptotycznie. Podano kryteria doboru i metodę wyznaczania tej macierzy sprzężeń zwrotnych.

Abstract

The following holdability and stabilizability problem for linear continuous-time systems by state-feedbacks is formulated and solved. Given a linear system $\dot{x} = Ax + Bu$, $A \in R^{n\times n}, B \in R^{n\times m}$, find a state-feedback $u=Kx$ such that the state vector of the closed-loop system $\dot{x} = (A+BK)x$ satisfied the conditions:

1) $x(t) = e^{(A+BK)t}x_0 \in R_+^n$ for $t \geq 0$ and every $x_0 \in R_+^n$

2) $\lim\limits_{t\to\infty} e^{(A+BK)t}x_0 \in R_+^n$ for every $x_0 \in R_+^n$

where R_+^n is the set of n-dimensional vectors with non-negative components.

1. Wprowadzenie

W pracy [6] Rumchev rozwiązał następujący problem. Dany jest standardowy układ dyskretny ze sprzężeniem zwrotnym od wektora stanu. Należy tak dobrać macierz sprzężeń zwrotnych, aby wektor stanu układu zamkniętego dla wszystkich chwil większych od chwili początkowej pozostał w pierwszej dodatniej ćwiartce przestrzeni stanów dla każdego warunku początkowego z tej ćwiartki. Problem ten w literaturze angielsko-amerykańskiej nazywa się „feedback holdability". Dla układów ciągłych był on rozpatrywany w pracach [1, 2]. Dla dyskretnych układów singularnych został on rozwiązany w pracy [5].

W pracy tej zostanie sformułowany i rozwiązany problem ogólniejszy, który zawiera w sobie, jako podzadanie, problem „feedback holdability" dla układów ciągłych.
Dany jest standardowy układ ciągły ze sprzężeniem zwrotnym od wektora stanu. Należy tak dobrać macierz sprzężeń zwrotnych, aby wektor stanu układu zamkniętego dla wszystkich chwil większych od chwili początkowej pozostał w pierwszej dodatniej ćwiartce przestrzeni stanów dla każdego warunku początkowego z tej ćwiartki i układ ten był stabilny asymptotycznie. Zostaną podane kryteria doboru i metoda wyznaczania tej macierzy sprzężeń zwrotnych.

2. Sformułowanie zadania

Niech R^{nxm} będzie zbiorem macierzy o wymiarach nxm i elementach rzeczywistych oraz $R^n = R^{nx1}$. Zbiór macierzy rzeczywistych o wymiarach nxm i nieujemnych elementach oznaczać będziemy przez $R_+^{n\times m}$ oraz $R_+^n := R_+^{n\times 1}$.
Weźmy pod uwagę układ liniowy ciągły opisany równaniami

$$\dot{x} = Ax + Bu, \; x(0) = x_0 \tag{1}$$

przy czym $\dot{x} = \frac{dx}{dt}$, $x(t) = x \in R^n$ jest wektorem stanu, $u(t) = u \in R^m$ jest wektorem wymuszeń (sterowań), $A \in R^{n\times n}$ i $B \in R^{n\times m}$.

Definicja 1. Układ (1) nazywamy dodatnim (dokładniej wewnętrznie dodatnim [4]), jeżeli dla każdego warunku początkowego $x_0 \in R_+^n$ oraz wszystkich wymuszeń $u(t) \in R_+^m, t \geq 0$ mamy $x(t) \in R_+^n$ dla $t \geq 0$.
Macierz $A = [a_{ij}] \in R_+^{n\times n}$ nazywamy macierzą Metzlera, jeżeli $a_{ij} \geq 0$ dla $i \neq j$ (elementy $a_{ii} = 1, \ldots, n$ mogą być dowolne).

Twierdzenie 1. [4] Układ (1) jest dodatni wtedy i tylko wtedy, gdy A jest macierzą Metzlera, a $B \in R_+^{n\times m}$.

Definicja 2. Układ dodatni (1) nazywamy stabilnym asymptotycznie, jeżeli dla każdego $x_0 \in R_+^n$ rozwiązanie

$$x(t) = e^{At}x_0 \tag{2}$$

równania

$$\dot{x} = Ax \tag{3}$$

zanika do zera dla $t \to \infty$, tzn.

$$\lim_{t\to\infty} e^{At}x_0 = 0 \quad \text{dla każdego} \quad x_0 \in R_+^n \tag{4}$$

Analogicznie jak dla układów standardowych (niedodatnich) układ dodatni (1) jest stabilny asymptotycznie wtedy i tylko wtedy, gdy macierz A ma wartości własne λ_k o ujemnych częściach rzeczywistych, tzn. [4]

$$\mathrm{Re}\,\lambda_k < 0 \quad \text{dla} \quad k = 1,\ldots,n \tag{5}$$

Weźmy pod uwagę układ (1) ze sprzężeniem zwrotnym od wektora stanu

$$u = Kx, \quad K \in R^{m\times n} \tag{6}$$

Podstawiając (6) do (1) otrzymamy układ zamknięty o postaci

$$\dot{x} = (A+BK)x \tag{7}$$

Zadanie nasze można sformułować następująco. Dane są macierze A i B układu (1). Należy tak dobrać macierz K sprzężenia zwrotnego (6), aby wektor stanu układu zamkniętego (7) spełniał następujące dwa warunki:

$$x(t) = e^{(A+BK)t}x_0 \in R_+^n \text{ dla } t \geq 0 \text{ oraz każdego } x_0 \in R_+^n \tag{8a}$$

$$\lim_{t\to\infty} e^{(A+BK)t}x_0 = 0 \text{ dla każdego } x_0 \in R_+^n \tag{8b}$$

3. Rozwiązanie zadania

Rozwiązanie tego zadania jest oparte na następujących dwóch twierdzeniach [4].

Twierdzenie 2. Macierz $e^{At} \in R_+^{n\times n}$ wtedy i tylko wtedy, gdy A jest macierzą Metzlera.

Twierdzenie 3. Układ dodatni (1) jest stabilny asymptotycznie wtedy i tylko wtedy, gdy jest spełniony jeden z niżej podanych warunków:

1) Wszystkie współczynniki wielomianu

$$\det[Is - A] = s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0 \tag{9}$$

są dodatnie.

2) Wszystkie minory główne macierzy $-A$ są dodatnie, tzn.

$$|-a_{11}| > 0, \begin{vmatrix} -a_{11} & -a_{12} \\ -a_{21} & -a_{22} \end{vmatrix} > 0, \ldots, \det[-A] > 0 \tag{10}$$

Z twierdzenia 2 wynika, że warunek (8a) będzie spełniony wtedy i tylko wtedy, gdy macierz $A_z = A + BK$ będzie macierzą Metzlera. Warunek (8b) natomiast jest spełniony, gdy macierz A_z ma wartości własne λ_{zk} o ujemnych częściach rzeczywistych

$$\mathrm{Re}\,\lambda_{zk} < 0 \text{ dla } k = 1,\ldots,n \tag{11}$$

Zostało więc udowodnione następujące twierdzenie.

Twierdzenie 4. Wektor stanu układu zamkniętego (7) spełnia warunki (8) wtedy i tylko wtedy, gdy macierz $A_z = A + BK$ jest macierzą Metzlera i jej wartości własne spełniają warunek (11).

Rozwiązanie zadania sprowadza się zatem do wyznaczania macierzy K takiej, że

1) macierz $A_z = A + BK = [\overline{a}_{ij}]$ ma nieujemne wszystkie elementy leżące poza główną przekątną

$$\overline{a}_{ij} \geq 0 \text{ dla } i \neq j,\ i,j = 1,\ldots,n \tag{12}$$

2) części rzeczywiste wartości własnych λ_{zk} macierzy A_z są ujemne, tzn. spełniają warunek (11).

Korzystając z twierdzenia 3 możemy warunek (11) zastąpić warunkiem, aby wszystkie współczynniki wielomianu

$$\det[Is - (A + BK)] = s^n + \overline{a}_{n-1}s^{n-1} + \cdots + \overline{a}_1 s + \overline{a}_0 \tag{13}$$

były dodatnie lub warunkiem, aby wszystkie minory główne macierzy $-A$ były dodatnie.

$$|-\overline{a}_{11}| > 0, \begin{vmatrix} -\overline{a}_{11} & -\overline{a}_{12} \\ -\overline{a}_{21} & -\overline{a}_{22} \end{vmatrix} > 0, \ldots, \det[-A_z] > 0 \tag{14}$$

Tak więc rozwiązanie zadania sprowadza się do wyznaczania macierzy K spełniającej warunki (12) i (13) lub warunki (12) i (14).

Z powyższych rozważań wynika następująca procedura wyznaczania macierzy K.

Procedura.

Krok 1. Dobieramy macierz K tak, aby był spełniony warunek (12). Zbiór macierzy K spełniających warunek (12) oznaczamy przez Ω_k.

Krok 2. Dobieramy macierz $K \in \Omega_k$ tak, aby by spełniony warunek (14) (lub równoważnie warunek (13)).

Twierdzenie 5. Jeżeli i-ty wiersz A_i, $i = 1, \ldots, n$ macierzy A zawiera przynajmniej jeden element ujemny $a_{ij} < 0$, $i \neq j$, to macierz K spełniająca warunek (12) istnieje tylko wtedy, gdy i-ty wiersz B_i macierzy B zawiera przynajmniej jeden element niezerowy.

Dowód. Jeżeli przynamniej jeden element $a_{ij} < 0$, $i \neq j$ oraz $B_i = 0$ $A_i + B_i K = A_i + 0K = A_i$ i nie istnieje K takie, że jest spełniony warunek (12). W tym przypadku zbiór Ω_k jest pusty. □

W przypadku szczególnym, gdy $m = 1$ (układ ma jedno wejście), $B = b = [b_1\ b_2\ \ldots\ b_n]^T$ (T oznacza transpozycję) i warunek (12) jest równoważny warunkowi

$$\overline{a}_{ij} = a_{ij} + b_i k_j \geq 0 \text{ dla } i \neq j,\ i,j = 1,\ldots,n \tag{15}$$

Korzystając ze znanych własności wyznacznika możemy warunek (14) przedstawić w postaci

$$(-1)^i \det\begin{bmatrix} a_{11} + b_1 k_1 & \cdots & a_{1i} + b_1 k_i \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i1} + b_i k_1 & \cdots & a_{ii} + b_i k_i \end{bmatrix} = (-1)^i \left\{ \det\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1i} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{ii} \end{bmatrix} + k_1 \det\begin{bmatrix} b_1 & a_{12} & \cdots & a_{1i} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_i & a_{i2} & \cdots & a_{ii} \end{bmatrix} + \right.$$

$$\left. k_2 \det\begin{bmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} & \cdots & a_{1i} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & b_i & a_{i3} & \cdots & a_{ii} \end{bmatrix} + \cdots + k_i \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,i-1} b_1 \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{i,i-1} b_i \end{bmatrix} \right\} > 0 \text{ dla } i = 1,\ldots,n \tag{16}$$

Uwaga. Jeżeli i-ta kolumna $[a_{1i}\ a_{2i}\ \ldots\ a_{ni}]^T$ macierzy A zawiera przynajmniej dwa elementy $a_{ji} < 0, a_{ki} < 0$ oraz odpowiednie elementy macierzy b mają znaki przeciwne $b_j b_k < 0$, to zbiór Ω_k jest pusty i zadanie nie ma rozwiązania.

4. Przykłady

Przykład 1. Dany jest układ (1), którego macierze A i B mają postacie

$$A = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 \\ -2 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & -1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Wyznaczyć macierz $K \in R^{2\times 3}$ sprzężenia zwrotnego (5) tak, aby wektor stanu układu zamkniętego spełniał warunki (8).

W tym przypadku wiersz drugi macierzy A zawiera jeden element ujemny -2, a wiersz drugi macierzy B jest zerowy. Zgodnie z twierdzeniem 5 nie istnieje macierz K spełniająca warunek (12). Zadanie to nie ma więc rozwiązania.

Przykład 2. Dany jest układ (1), którego macierze mają postacie

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -3 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Wyznaczyć macierz $k = [k_1\ k_2\ k_3]$ sprzężenia zwrotnego (5) tak, aby wektor stanu układu zamkniętego spełniał warunki (8).

W tym przypadku druga kolumna macierzy ma dwa elementy ujemne $a_{12} = a_{32} = -1$, a odpowiednie elementy macierzy B mają znaki przeciwne $b_1 = 1$, $b_3 = -1$.

Zgodnie z Uwagą zbiór Ω_k jest pusty i zadanie nie ma rozwiązania.

Przykład 3. Dany jest układ (1), którego macierze A i B mają postacie

$$A = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \\ -1 & -2 & -3 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} \tag{17}$$

Wyznaczyć macierz $K = k = [k_1\ k_2\ k_3]$ tak, aby wektor stanu układu zamkniętego spełniał warunki (8).

W tym przypadku

$$A_z = A + BK = \begin{bmatrix} k_1 - 1 & k_2 - 1 & k_3 \\ 2 & -1 & 1 \\ 2k_1 - 1 & 2(k_2 - 1) & 2k_3 - 3 \end{bmatrix} \in R_+^{3\times 3} \tag{18}$$

wtedy i tylko wtedy, gdy $k_1 \geq 0.5$, $k_2 \geq 1$ i $k_3 \geq 0$.

Wobec tego zbiór Ω_k ma postać

$$\Omega_K := \{k : k_1 \geq 0.5; k_2 \geq 1; k_3 \geq 0\} \tag{19}$$

Korzystając z zależności (16) otrzymamy

dla $i = 1$

$$a_{11} + b_1 k_1 = -1 + k_1 < 0 \text{ czyli } k_1 < 1$$

dla $i = 2$ (na następnej stronie)

$$\det\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} + k_1 \det\begin{bmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{bmatrix} + k_2 \det\begin{bmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} + k_1 \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} + k_2 \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = 3 - k_1 - 2k_2 > 0$$

oraz dla $i = 3$

$$\det\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} + k_1 \det\begin{bmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} + k_2 \det\begin{bmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{bmatrix} + k_3 \det\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{vmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \\ -1 & -2 & -3 \end{vmatrix} + k_1 \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & -3 \end{vmatrix} + k_2 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & -3 \end{vmatrix} + k_3 \begin{vmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ -1 & -2 & 2 \end{vmatrix} = -10 + 3k_1 + 3k_2 + k_3 < 0 \tag{20}$$

Macierz k należy do zbioru (19) i spełnia warunki (20) dla $0.5 \le k_1 < 1, k_2 \ge 1, k_3 \ge 0$ oraz $k_1 + 2k_2 < 3$ i $3(k_1 + k_2) + k_3 < 10$. Przyjmując $k_1 = 0.5, k_2 = 1$ i $k_3 = 1$ otrzymamy $k = [0.5 \;\; 1 \;\; 1]$ oraz

$$A_z = \begin{bmatrix} -0.5 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \tag{21}$$

Macierz (21) jest macierzą Metzlera, której wielomian charakterystyczny ma postać

$$A_z = \begin{bmatrix} -0.5 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Układ zamknięty jest więc stabilny asymptotycznie, a jego wektor stanu spełnia warunki (8).

5. Uwagi końcowe

Podano kryteria doboru i metodę wyznaczania macierzy sprzężeń zwrotnych tak, aby wektor stanu układu zamkniętego dla wszystkich chwil większych od chwili początkowej pozostał w pierwszej dodatniej ćwiartce przestrzeni stanów dla każdego warunku początkowego z tej ćwiartki oraz układ ten był stabilny asymptotycznie. Wyniki tej pracy z niewielkimi zmianami można przenieść na dyskretne układy liniowe. Problemem otwartym jest podanie warunków koniecznych i wystarczających istnienia macierzy *K* spełniającej warunki (8). Problemem otwartym jest również uogólnienie wyników tej pracy na singularne układy ciągłe i dyskretne oraz na układy dwuwymiarowe standardowe i singularne [4].

Literatura

[1] BERMAN A., STERN R., Linear feedback, irreducibility and M-matrices, Linear Algebra Appl., 97, 1987, pp. 1-11.

[2] BERMAN A., NEUMANN M., STERN R., Nonnegative matrices in dynamic systems, Wiley & Sons, New York, etc. 1989.

[3] CACCETTA L., FOULDS L.R., RUMCHEV V.G., Positive Linear Discrete-Time System Model of Capacity Planning and its Controllability Properties, Mathematical and Computer Modelling, 2001 (in press).

[4] KACZOREK T., Dodatnie układy jedno- i dwuwymiarowe, Oficyna Wydawnicza Politechniki Warszawskiej, Warszawa, 2000.

[5] KACZOREK T., Feedback holdability of singular discrete-time linear systems, Proc. of Institute of Mathematic, NAS of Belarus, Minsk, 2001, vol. 7, (in press).

[6] RUMCHEV V.G., Feedback and positive feedback holdability of discrete-time systems, Systems Science 2001 (in press).

Artykuł recenzowany