Bohdan S. BUTKIEWICZ
POLITECHNIKA WARSZAWSKA
INSTYTUT SYSTEMÓW ELEKTRONICZNYCH

System sterowania rozmytego z normami trójkątnymi w warunkach granicznych

Streszczenie

Do interpretacji „i", „lub", „oraz" podczas wnioskowania przybliżonego zastosowano różne matematyczne operacje. Przedstawiono nowe twierdzenie o zachowaniu się systemu w warunkach granicznych i podano interpretację fizyczną warunków jako stan ustalony systemu.

Abstract

Different mathematical operations are used during approximate reasoning for interpretation of „and", „or", „also" in fuzzy systems rules. New theorem about boundary behavior of the system is presented and proofed and physical interpretations of the theorem as steady--state of a system is shown.

Wprowadzenie

W pracy przedstawiono uogólnienie twierdzenia opublikowanego przez autora w [1]. Dowiedziono tam, że jeżeli stan ustalony systemu z rozmytym sterownikiem PD lub PI i obiektem liniowym lub nieliniowym istnieje, wówczas sygnał wyjściowy systemu dąży do tej samej wartości niezależnie od pary operacji typu norm trójkątnych zastosowanych do interpretacji „i" „lub" podczas wnioskowania przybliżonego. Tutaj własność tą uogólniono na systemy bardziej skomplikowane oraz badano również użyteczność innych operacji.

Opis systemu

Rozważmy system rozmyty opisany zmiennymi lingwistycznymi: wejściowymi X_1, X_2 , ... , X_n, wyjściową U i następującymi regułami

R1: jeżeli x_1 jest A_{11} i x_2 jest A_{12} i ... i x_n jest A_{1n} wtedy u jest U_1

oraz R2: jeżeli x_1 jest A_{21} i x_2 jest A_{22} i ... i x_n jest A_{2n} wtedy u jest U_2

....

oraz Ri: jeżeli x_1 jest A_{i1} i x_2 jest A_{i2} i ... i x_n jest A_{in} wtedy u jest U_i

....

oraz Rm: *jeżeli* x_1 jest A_{m1} i x_2 jest A_{m2} i ... i x_n jest A_{mn} wtedy *u jest* U_m

Wielkości A_{ik} $i = 1,...,m$ $k = 1,...,n$ są zbiorami rozmytymi opisującymi zmienne X_k. Niektóre z nich mogą być identyczne. Reguły mogą nie zawierać wszystkich składników „*i* x_k jest A_{ik} ". Niektóre z wniosków $U_1,...,U_m$ mogą być zbiorami identycznymi. W tym przypadku reguły z identycznymi wnioskami mogą być zagregowane do jednej reguły za pomocą łącznika „lub". Zamiast „oraz" można użyć „lub". W pracy dla „lub" „oraz" stosowano tę samą interpretację matematyczną s-normę (trójkątną *ko*-normę) lub operację B_{lub}. Dla „i" stosowano t-normę (normę trójkątną) lub B_i. Kilka przykładów norm trójkątnych podano w tabeli 1.

Rozważmy sytuację, gdy jedna z wielkości wejściowych, powiedzmy x_1, przybiera wartość gdzie $\mu_{i1}(x_1) \neq 0$, a inne wielkości wejściowe x_k $k = 2,...,n$ dążą do wartości gdzie $\mu_{ik}(x_k)$ przybierają wartości 0 lub 1. Przypuśćmy, że mamy regułę Ri, gdzie $\mu_{i1}(x_1) = a_i$. Wówczas waga w_i reguły Ri wyniesie

$$w_i = \mu_{i1}(x_1)\,\Delta\,\mu_{i2}(x_2)\,\Delta \ldots \Delta\,\mu_{in}(x_n) = a_1 \Delta 1 \Delta 1 \ldots \Delta 1 = a_i \quad (1)$$

Tabela 1

	t-norma	s-norma
iloczyn logiczny	$\min(\mu_x, \mu_y)$	
i suma		$\max(\mu_x, \mu_y)$
iloczyn algebraiczny	μ_x, μ_y	
i suma		$\mu_x+\mu_y-\mu_x\mu_y$
iloczyn Hamachera	$\mu_x\mu_y/(\mu_x+\mu_y-\mu_x\mu_y)$	
i suma		$(\mu_x+\mu-2\mu_x\mu_y)/(1-\mu_x\mu_y)$
iloczyn Yagera	$1-\min(1-[(1-\mu_x)^p+(1-\mu_y)^p]^{1/p})$	
i suma (p ł 1)		$\min[1-(\mu_x^{\,p}+\mu_y^{\,p})^{1/p}]$
iloczyn ograniczony	$\max(0,\ \mu_x+\mu_y-1)$	
i suma		$\min(1,\ \mu_x+\mu_y)$
modyfikowany iloczyn drastyczny $0{,}5 \le a \le 1$	0 dla $\mu_x, \mu_y < a$ μ_x dla $\mu_y \ge a$ μ_y dla $\mu_x \ge a$	
i suma		1 dla $\mu_x, \mu_y > 1-a$ μ_x dla $\mu_y \le 1-a$ μ_y dla $\mu_x \le 1-a$

gdzie Δ oznacza dowolną t-normę. Wartość ta jest niezależna od typu normy Δ użytej do wnioskowania przybliżonego, ponieważ dowolna t-norma musi spełniać

$\mu_x \Delta \mu_y = \mu_x \Delta \mu_y$ — warunek przemienności

$\mu_x \Delta (\mu_y \Delta \mu_z) = (\mu_x \Delta \mu_y) \Delta \mu_z$ — warunek łączności

$\mu_x \Delta 1 = \mu_x$ $\quad \mu_x \Delta 0 = 0$ — warunki graniczne

Każda t-norma spełnia również warunek monotoniczności, ale spełnienie go nie jest tu konieczne. Mogą zaistnieć teraz dwa przypadki:

– wszystkie inne reguły mają wagę równą zeru,
– istnieje wiele reguł z wagami większymi od zera.

Niektóre z tych reguł mogą mieć ten sam zbiór, na przykład U_l, jako konkluzję. Oznaczmy wagi tych reguł jako a_1, a_2, ..., a_j. Naturalnie wartości a_1, a_2, ..., a_j są równe odpowiednim wartościom funkcji przynależności $\mu_{ik}(x_i)$. Wszystkie reguły są połączone łącznikiem zdaniowym „oraz". Do matematycznej interpretacji „oraz" stosujemy s-normę oznaczaną tu przez ∇. Zatem funkcja przynależności dla zbioru U_l stanowiącego łączną konkluzję wynosi

$$a_1 \nabla a_2 \nabla \ ..., \nabla a_j \quad (2)$$

Powyższe j reguł z tą samą konkluzją U_1 można by pierwotnie zagregować do jednej reguły używając łącznika „lub". Jeżeli ta sama operacja stosowana jest dla „lub" co dla „oraz", to waga reguły zagregowanej wyniesie tyle samo co poprzednio

$$a_1 \nabla a_2 \nabla \ ..., \nabla a_j \quad (3)$$

Przypadek ogólny

Dyskusja prowadzona powyżej o zastosowaniu różnych norm może być podsumowana w postaci twierdzenia.

Twierdzenie 1 (system rozmyty w warunkach granicznych)
Niech system rozmyty będzie opisany zbiorem reguł postaci

Ri: jeżeli (S_1) i (S_2) i ... i (S_{ni}) wtedy u jest U_i

połączonych spójnikami „oraz" , gdzie S_j $j = 1, \ldots, n_i$ są zdaniami typu „x_j jest A_l". Wartości x_i są nie rozmyte, zbiory A_l są dowolnymi zbiorami rozmytymi, określonymi na osi x_j zmiennych lingwistycznych X_j. Jeżeli wszystkie wartości x_j z wyjątkiem jednej, powiedzmy x_1, przyjmują takie wartości, że odpowiadające im funkcje przynależności $\mu_j(x_j)$ są równe 0 lub 1, to rezultat wnioskowania przybliżonego, bazujący na normach trójkątnych, jest niezależny od pary norm użytych do matematycznej interpretacji „i" „lub". Jeżeli tę samą interpretację matematyczną zastosowano do „lub" i „oraz", to rezultat wnioskowania jest niezależny od tego czy reguły zostały zagregowane, czy nie. Rezultat wnioskowania może zależeć od przyjętej metody defuzzyfikacji.

Dowód

Z warunku przemienności wynika, że dla dowolnej kolejności zdań „x_j jest A_l" waga reguły Ri jest taka sama. Reguły są połączone spójnikiem „oraz". Z warunku łączności wynika, że porządek reguł nie jest istotny. Ten sam fakt jest prawdziwy, jeżeli zastosowano zagregowaną formę reguł i przyjęto tę samą interpretację matematyczną dla „lub" co dla „oraz". Ponadto funkcja przynależności $\mu_l(u)$ konkluzji, otrzymanej dla zupełnego podzbioru j reguł mających ten sam zbiór U_l jako konkluzję, musi być identyczna, tj. niezależna od sposobu agregacji reguł. Zatem ostateczny rezultat otrzymany dla funkcji przynależności $\mu_l(u)$ dla dowolnego zbioru rozmytego U_l stanowiącego wniosek jest równy

$$\mu_l(u) = \mu_{l1}(u)\ \nabla\ \mu_{l2}(u)\ \nabla \ldots \nabla\ \mu_{lj}(u) \qquad (4)$$

gdzie przez $\mu_{l1}(u)$, $\mu_{l2}(u)$, ... $\mu_{lj}(u)$ oznaczono wagi wszystkich j reguł z tym samym wnioskiem U_l. Wagi $\mu_{lk}(u)$ mogą być równe 0, 1 lub $\mu_{lk}(x_1)$. Zatem z warunków granicznych wynika, że rezultat $\mu_l(u)$ może być równy 0, 1 lub μ_l zależnie jedynie od wartości $\mu_{lk}(x_1)$.

Rozważmy teraz przypadek ogólniejszy, gdy podczas wnioskowania przybliżonego zastosowano nieco inne operacje, nazywane tu B-operacjami (*basic operation*) dla systemu.

Definicja (B-operacje)

Operacje podstawowe B_i, B_{lub} dla systemu rozmytego spełniają dla x, y ' X (przestrzeń rzeczywista)

$\mu_x B \mu_y = \mu_y B \mu_x$ warunek przemienności dla obu B_i, B_{lub}

$(\mu_x B \mu_y) B \mu_z = \mu_x B(\mu_y B \mu_z)$ warunek łączności dla obu B_i, B_{lub}

$\mu_x B i 1 = \mu_x$, $\mu_x B_i 0 = 0$ warunki graniczne dla operacji B_i

$\mu_x B_{lub} 1 = 1$, $\mu_x B_{lub} 0 = \mu_x$ warunki graniczne dla operacji B_{lub}

Jak widać różnią się one od norm trójkątnych tym, że nie spełniają warunku monotoniczności.

Twierdzenie 2 (system rozmyty z B-operacjami)

Rozważmy system opisany w Twierdzeniu 1, ale teraz normy trójkątne Δ ∇ zostały odpowiednio zastąpione operacjami podstawowymi B_i B_{lub}. System z B-operacjami spełnia tezę Twierdzenia 1.

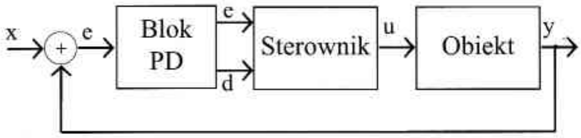
Dowód

Warunek monotoniczności, którego spełnienie jest konieczne dla norm trójkątnych, nie był wykorzystywany w dowodzie Twierdzenia 1, zatem Twierdzenie 2 jest słuszne.

W niektórych jednak przypadkach, np. dla norm trójkątnych drastycznych (dla $\alpha = 0$), pomimo że założenia Twierdzenia 1 są spełnione, symulacje pokazują, że dynamiczne zachowanie się systemu nie jest podobne jak dla innych norm trójkątnych. Jest to spowodowane silną nieciągłością w pobliżu stanu równowagi systemu, gdyż funkcje przynależności przyjmują wartości 0 lub 1. Z tego względu operacje drastyczne zostały tu zmodyfikowane. W zasadzie należy unikać podobnych operacji i stosować takie B-operacje, które są lokalnie ciągłe i monotoniczne w pobliżu stanu równowagi.

Przykład (sterownik rozmyty PD)

Przypuśćmy, że system składa się ze sterownika rozmytego typu PD i obiektu liniowego lub nieliniowego (rys. 1). Mamy dwie zmienne wejściowe e (proporcjonalną do uchybu ε), d (proporcjonalną do pochodnej ε) i zmienną wyjściową u. Niech wartościami lingwistycznymi wszystkich zmiennych będą zbiory NL, NS, NM, ZE, PS, PM, PL określone na przedziale [–10, 10], z funkcjami przynależności o kształcie trójkątnym i trapezowym na końcach przedziału, równomiernie rozłożone, o szerokości nośników równej 5. Niech system będzie stabilny (dla ograniczonego wejścia odpowiedź jest ograniczona) w pobliżu stanu równowagi, gdzie pochodna dε/d$t \to 0$ i zmienna lingwistyczna e jest ZE (nie koniecznie $\varepsilon = 0$). Niech reguły sterowania R1, R2, R3 w pobliżu punktu równowagi, w zagregowanej formie, mają postać jak na rys. 2.



Rys. 1. Rozmyty system sterowania

e \ d	NS	ZE	PS
PS	ZE		PS
ZE		ZE	
NS	NS		ZE

Rys. 2. Reguły sterowania w pobliżu punktu sterowania

Na przykład regułę R1 rozumiemy następująco:

jeżeli (e jest PS i (d jest ZE lub PS)) lub (e jest ZE i d jest PS) wtedy u jest PS

Przeprowadzono wiele symulacji z różnymi obiektami. Tutaj podano tylko rezultaty dla dwu obiektów. Liniowego o transmitancji

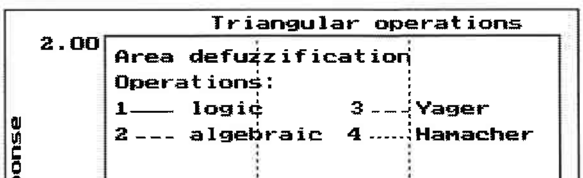
$$T_{(s)} = \frac{A}{(\tau_1 s+1)(\tau_2 s+1)(\tau_3 s+1)}$$

gdzie $A = 1$, $t_1 = 10$ s, $t_2 = 5$ s, $t_3 = 1$ s oraz nieliniowego opisanego równaniem różniczkowym

$$\frac{d^2y}{dt^2} + 2\varsigma\omega_n \frac{dy}{dt} + \omega^2_n = g_1 u(t-t_0) + g_2 u(t-t_0)\,|\,u(t-t_0)$$

gdzie ω_n=100 rd/s, $\zeta = 0{,}7$, $g_1 = 1$, $g_2 = -0{,}1$, $t_0 = 0{,}4$ ms. Okres próbkowania wynosił $T = 0{,}04$ ms.

Odpowiedź systemu z obiektem nieliniowym i różnymi parami norm trójkątnych podano na rys. 3.

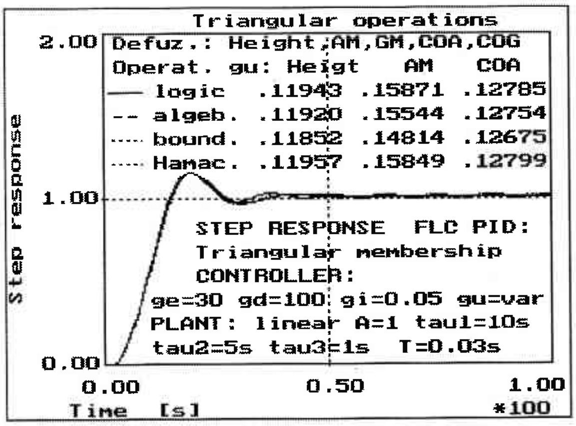


Rys. 3. Odpowiedź systemu z obiektem nieliniowym

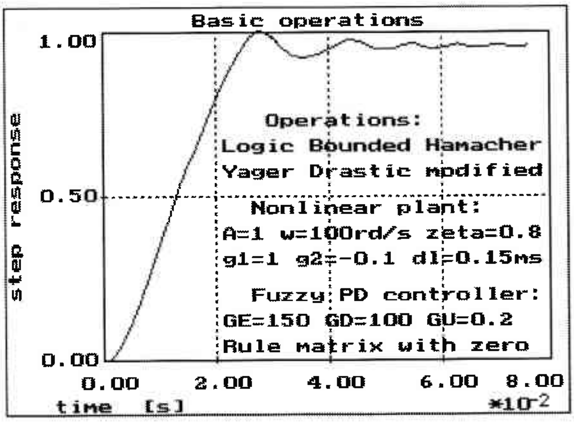
Współczynniki skalujące FPD wynosiły $g_e = 100$, $g_d = 100$, $g_u = 0{,}2$. Przy defuzzyfikacji zastosowano metodę pól. Jak widać nie tylko stan ustalony jest identyczny, ale również i dynamika bardzo podobna. Różnice są graficznie nierozróżnialne. W tabeli 2 podano charakterystyczne wartości odpowiedzi.

Normy trójkątne spełniają nierówności [1, 5]. Dolną granicę dla **Δ** uzyskuje się stosując iloczyn drastyczny, górną granicę stosując minimum. Dla **∇** górną granicą jest suma drastyczna, a dolną maksimum. Stosując tę właściwość możliwe jest ustalenie typowego przebiegu odpowiedzi dla różnych norm [3].

Przeprowadzono wiele eksperymentów symulacyjnych. Stosowano różne operacje i metody defuzzyfikacji jak: wysokości, pól, ciężkości, środka pola, środka ciężkości. Otrzymywano bardzo zbliżone rezultaty (rys. 4) dobierając współczynnik g_u, aby uzyskać przeregulowanie 15%. Porównaj również rys. 5.



Rys. 4. Odpowiedzi dla różnych operacji i metod defuzzyfikacji



Rys. 5. Odpowiedzi dla norm trójkątnych

Obszerniejsze porównanie autor przeprowadził w [2, 4].

Do wnioskowania stosowano również *B*-operacje, które utworzono z kombinacji norm trójkątnych tak, aby były niemonotoniczne i (albo) nieciągłe. Na przykład operacja $B1$ była określona jako

Tabela 2. Odpowiedź skokowa dla różnych norm trójkątnych

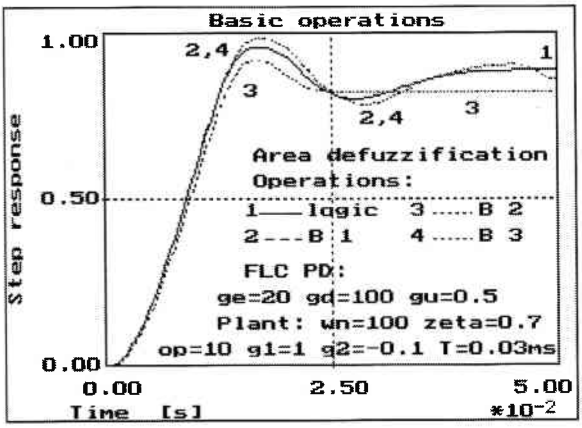
Parametr	Operacje			
	logiczne	algebraiczne	Yagera	Hamachera
Wartość dla t = 21,28 ms	0,99861	0,99889	0,99922	0,99859
Pierwsza oscyl.				
maksimum	1,02633	1,02682	1,02754	1,02623
czas [ms]	23,28	23,28	23,28	23,28
minimum	0,89240	0,8918	0,89077	0,89259
czas [ms]	31,68	31,68	31,68	31,68
Druga oscyl.				
maksimum	0,97308	0,97366	0,97450	0,97293
czas [ms]	40,88	40,88	40,88	40,88
minimum	0,93303	0,93270	0,93223	0,93310
czas [ms]	48,08	40,08	48,48	40,08
Ostatnia wartość dla t = 59,28 ms	0,94666	0,94683	0.94706	0,94661

Operacje $B2_i$ oraz $B2_{lub}$ są kombinacją norm ograniczonych,

$$B1_i = \begin{cases} \mu_x \mu_y & \text{dla } \mu_x, \mu_y < 0{,}1 \\ \min(\mu_x, \mu_y) & \text{dla } \mu_x, \mu_y \in [0{,}1,\ 0{,}2] \\ \mu_x + \mu_y - 1 & \text{dla } \mu_x, \mu_y > 0{,}2 \end{cases}$$

$$B1_{lub} = \begin{cases} \max(\mu_x, \mu_y) & \text{dla } \mu_x, \mu_y < 0{,}1 \\ \max(\mu_x + \mu_y - 1{,}0) & \text{dla } \mu_x, \mu_y \in [0{,}1,\ 0{,}2] \\ \min(\mu_x + \mu_y, 1) & \text{dla } \mu_x, \mu_y > 0{,}2 \end{cases}$$

Hamachera i Yagera. $B3$ to:
$B1 \times [1 + \sin(20\pi\mu_x)\sin(20\pi\mu_y)/5]$.
Wynik pokazuje rys. 6, a inne podano w [4].



Rys. 6. Odpowiedź dla B-operacji

Badano ponadto przydatność operacji takich jak średnie arytmetyczne, geometryczne, harmoniczne [2] i inne operacje, „fuzzy and", „fuzzy or" [3]. W wielu przypadkach mogą one być również stosowane.

Wnioski

Podane przykłady wskazują, że jeżeli zbiory i reguły są dobrane poprawnie, to dynamika systemu niewiele zależy od sposobu wnioskowania i defuzzyfikacji. W szczególności, jeśli parametry sterownika dobrano bliskie optymalnym. Jak pokazano, teoretycznie stan ustalony systemu jest często taki sam. Jeśli jednak nośniki wielu zbiorów wzajemnie się pokrywają, tzn. wartość może być np. jednocześnie mała, średnia i bardzo duża, to jak pokazał eksperyment [6] wnioskowanie typu Mamdaniego i Łukasiewicza mogą dać bardzo różne wyniki i być może jest to również słuszne dla innych metod wnioskowania, aczkolwiek z badań autora wynika, że dla dzwonowych funkcji przynależności system zachowuje się w tych sytuacjach poprawnie.

LITERATURA

[1] B. S. BUTKIEWICZ: Steady-State Error of a System with Fuzzy Controller. IEEE Transactions on System, Man, and Cybernetics – Part B. *Cybernetics* 1998, vol. 28, nr 6, str. 855–860.

[2] B. S. BUTKIEWICZ: Behavior of Fuzzy PD Controller under Different Reasoning Methods. Proc. Int. Conf. on Soft Computing and Measurements. St Petersburg 1998, v. 1, str. 250–259.

[3] B. S. BUTKIEWICZ: Fuzzy Control System with Triangular Norms under Boundary Conditions. Proc. of the Sixth Int. Conf. on Methods and Models in Automation and Robotics. Międzyzdroje 2000, str. 755–758.

[4] B. S. BUTKIEWICZ: Fuzzy Control System with *B*-operations. Przyjęte do Recent Advances in Soft Computing, R. John, R. Birkenhead, D (Eds.), Springer-Verlag.

[5] I. BLOCH: Information combination operators for data fusion: A comparative review with classification. IEEE Transactions on System, Man, and Cybernetics – Part A: *Systems and Humans* 1996, vol. 26, nr 1, str. 52–67.

[6] R BABUŠKA: Construction of Fuzzy Systems – Interplay between Precision and Transparency. European Symposium on Intelligent Systems 2000. Aachen, str. 445–452.