Danuta TURZENIECKA
POLITECHNIKA POZNAŃSKA
INSTYTUT ELEKTRONIKI I TELEKOMUNIKACJI

Podstawowe zagadnienia oceny niepewności

Dr hab. inż. Danuta TURZENIECKA – profesor nadzwyczajny Politechniki Poznańskiej, kierownik Zakładu Metrologii Elektrycznej na Wydziale Elektrycznym PP. Stopnie naukowe uzyskuje w latach: doktora nauk technicznych – w 1971 r., doktora habilitowanego – w 1979 r. Jest autorką monografii, publikacji i podręczników akademickich, związanych z elektrycznymi układami pomiarowymi i analizą dokładności pomiarów. Od lat przewodniczy pracom Komisji Kształcenia, Komitetu Metrologii i Aparatury Naukowej PAN, którego jest członkiem.

Przedstawiono podstawowe zagadnienia dotyczące oceny i wyrażania niepewności całkowitej wyniku pomiarów z wykorzystaniem zaleceń międzynarodowego dokumentu „Guide to the Expression of Uncertainty in Measurement".

ABSTRACT

Essential problems are presented that concern the assessment and expression of total uncertainty of measurement results on the basis of the recommendations of the international document „Guide to the Expression of Uncertainty in Measurement".

Wprowadzenie

W roku 1977, z inicjatywy Międzynarodowego Biura Miar, powstała Grupa Robocza, której celem było zbadanie problemów związanych z oceną i wyrażaniem niepewności. Problemy te zawsze wywoływały pewne kontrowersje, a podstawowym problemem stał się brak jednolitości w prezentowaniu wyników pomiarów w analizie porównań międzynarodowych. W wyniku prac Grupy Roboczej powstał w 1993 roku dokument „Guide to the Expression of Uncertainty in Measurement", nazywany potocznie „Guidem". Jest to dokument ważny. Porządkuje i ujednolica reguły postępowania przy ocenie niepewności, zakładając, że niepewność całkowita jest zmienną losową i podlega wszelkim prawom statystyki matematycznej. Nie jest to jednak dokument, który pozwala stosować określone reguły we wszystkich spotykanych sytuacjach pomiarowych. Dopuszcza się zatem, duży wpływ eksperymentatora na sposób oceny.

Pojęcia podstawowe

Mówiąc o pojęciach podstawowych, nie sposób pominąć tak podstawowego pojęcia, jakim jest błąd, o którym wspominany wyżej międzynarodowy dokument nie mówi wiele. Ważne jest, aby wyraźnie określić różnice, jakie istnieją między pojęciami błąd i niepewność [1, 5].

Błąd pomiaru

Miarą rozbieżności między otrzymaną w wyniku pomiaru wartością W_o i wartością umowną W_u jest błąd.

$$\Delta = W_o - W_u \tag{1}$$

gdzie wartością umowną W_u jest dostępna nam wartość, najbardziej zbliżona do nieznanej wartości prawdziwej. Może to być wartość poprawna, wartość średnia czy wartość nominalna.

Znana jest i ogólnie przyjęta klasyfikacja błędów, zgodnie z którą wszystkie błędy towarzyszące procesowi pomiarowemu dzielimy na błędy systematyczne, błędy przypadkowe i błędy nadmierne, czyli omyłki. Podział ten opiera się na przyjętym kryterium dotyczącym zachowania się błędów zawartych w surowych wynikach pomiarów tej samej wartości wielkości mierzonej, gdy doświadczenie powtarzamy. Jest to kryterium jednoznaczne z wyodrębnieniem czynników powodujących powstanie tych błędów, takich jak: czynniki zdeterminowane – powodujące powstanie błędów systematycznych i czynniki niezdeterminowane – powodujące powstanie błędów przypadkowych.

Wśród błędów systematycznych możemy wyróżnić te, których znamy wartość i znak, oraz te, których znamy jedynie wartość graniczną – maksymalną, a nie znamy znaku. Błędy o znanej wartości i znaku uwzględniamy w wyniku pomiaru w postaci poprawki. Błędy o znanej wartości granicznej i nieznanym znaku, zwane błędami granicznymi albo błędami aparaturowymi, pozwalają na ocenę granic przedziału granicznego, zawierającego nieznaną wartość wielkości mierzonej. Błąd graniczny ma duże znaczenie w praktyce pomiarowej, gdyż jest błędem, którego nie potrafimy uniknąć, ponieważ jego źródło tkwi w niedoskonałości aparatury pomiarowej określonej jej klasą dokładności.

Przykładem błędu przypadkowego może być różnica między wynikiem jednego pomiaru a wartością średnią z całej serii pomiarów. Błąd ten nazywany jest często błędem pozornym albo odchyłką.

$$\Delta_i = x_i - \bar{x} \tag{2}$$

W dotychczas stosowanej terminologii pojęcie błędu przypadkowego miało szersze znaczenie. Przyjmowało się, że jest to błąd oceniany metodami statystycznymi, którego znajomość pozwala na ocenę granic przedziału ufności, obejmującego nieznaną wartość wielkości mierzonej. Jeżeli jednak przyjęliśmy definicję błędu określoną zależnością (1), to pojęcie błędu ocenianego metodami statystyki matematycznej nie odpowiada w pełni tej definicji. Dlatego, zgodnie z „Guidem" wprowadza się pojęcie niepewności wywołanej efektami przypadkowymi albo pojęcie niepewności typu A.

Niepewność

Liczbową miarą niepewności jest odchylenie standardowe σ, które jest parametrem charakterystycznym rozkładu prawdopodobieństwa błędów lub jego nieobciążony estymator S. Rozróżnia się następujące pojęcia:

– niepewność standardowa

$$u = \sigma \tag{3}$$

– niepewność standardowa łączna

$$u_{\mathrm{ł}} = \sqrt{\sum_{j=1}^{N} u_j^2} \tag{4}$$

Niepewność standardowa łączna jest również charakterystycznym parametrem rozkładu prawdopodobieństwa, który jest splotem rozkładów składowych o j-tych odchyleniach standardowych

– niepewność całkowita

$$u_c = k(\alpha) \cdot u_1 \qquad (5)$$

Niepewność całkowita jest parametrem pozwalającym na wyznaczenie granic przedziału zawierającego nieznaną wartość rzeczywistą wielkości mierzonej z założonym prawdopodobieństwem α.

$$P\left(\overline{x} - u_c < \mu < \overline{x} + u_c\right) = \alpha \qquad (6)$$

gdzie μ – wartość oczekiwana, którą utożsamia się z nieznaną wartością prawdziwą.

Zakłada się [1, 4], że niepewność całkowita ma zawsze charakter losowy. Mnożnik $k(\alpha)$ jest zmienną standaryzowaną, dobieraną z punktu widzenia założonego prawdopodobieństwa α dla określonego rozkładu prawdopodobieństwa.

Niepewność standardowa łączna może zawierać wiele niepewności składowych. Niektóre z nich można wyznaczyć na podstawie otrzymanego rozrzutu wyników serii pomiarów poprzez ocenę estymatorów odchyleń standardowych. Inne składowe niepewności, których nie można ocenić na podstawie otrzymanego rozrzutu wyników – na przykład niepewności wynikające z niedoskonałości aparatury pomiarowej – ocenia się również za pomocą odchyleń standardowych, obliczonych na podstawie przewidywanych rozkładów prawdopodobieństwa. Te dwie, różne z punktu widzenia sposobu ich otrzymania, grupy niepewności stanowią kryterium, według którego niepewności dzieli się na dwa typy [1]:

- Typ A – niepewności wyznacza się za pomocą metod statystycznych.
- Typ B – niepewności wyznacza się za pomocą innych metod.

Można przyjąć, że niepewność standardowa typu A odpowiada niepewności spowodowanej efektamiprzypadkowymi, a niepewność standardowa typu B odpowiada niepewności spowodowanej efektami systematycznymi.

Aby zwrócić uwagę na różnice w podejściu do tradycyjnego podziału błędów na błędy systematyczne i przypadkowe, w stosunku do proponowanego podziału niepewności [1], należy podkreślić, że podczas gdy tradycyjna klasyfikacja oparta była na skutku jaki wywiera dana składowa na wynik końcowy,to nowa klasyfikacja opiera się na sposobie w jaki można uzyskać składowe niepewności. Niepewność ma zatem szersze znaczenie aniżeli to, które wynika jedynie z niepewności wywołanej efektami przypadkowymi, czyli niepewności typu A. Każdy błąd systematyczny, poza błędem systematycznym o znanej wartości i znaku, który musimy uwzględnić w postaci poprawki, można rozpatrywać jako niepewność typu B. Warunkiem jest jedynie to, abyśmy potrafili ocenić miarę liczbową tej niepewności, jaką jest odchylenie standardowe.

Przy ocenie niepewności typu A, którą można wyznaczyć na podstawie wyników serii pomiarów znanymi metodami statystyki matematycznej, nie ma istotnych problemów. Niepewności te wyznaczamy za pomocą estymatorów odchyleń standardowych S, uwzględniając odpowiednią liczbę stopni swobody n, która odpowiada liczności próby. Jeżeli istnieje korelacja między zmiennymi, to wyznacza się odpowiednie kowariancje, będące składowymi niepewności.

Trudniejsza jest sytuacja, gdy nie można ocenić niepewności metodami statystyki matematycznej, czyli w przypadku niepewności typu B. Ocena musi wtedy opierać się na innych metodach, co może pociągnąć za sobą pewne elementy oceny subiektywnej. Ponieważ propagacja niepewności jest tutaj jedyną dostępną i silną bazą, to niezbędne jest określenie pewnych wartości, które można traktować jako ocenę odchyleń standardowych, a decyzję o tym należy pozostawić eksperymentatorowi.

W żadnym przypadku pojęcia niepewności, niezależnie od jej typu, nie należy łączyć z pojęciem poprawki. Zakłada się, że wszystkie poprawki zostały uwzględnione w wyniku pomiaru. Jeżeli dokładność wyznaczenia poprawki nie była dostateczna, należy rozważyć wynikające stąd niepewności dodatkowe. Przyjmuje się, że mogą one być niepewnościami zarówno typu A, jak i typu B.

W każdym przypadku istnieje konieczność uwzględnienia korelacji między zmiennymi. Błędne jest przekonanie, że w praktyce pomiarowej większość zmiennych losowych, jakimi są błędy składowe, jest niezależna. Niepewności wywołane efektami przypadkowymi nie są w żadnym razie różne od niepewności wywołanych efektami systematycznymi, z wyjątkiem tego, że są one skorelowane z pomiarami w inny sposób.

Ocena niepewności standardowych

Niepewność standardową typu A oceniamy zawsze na podstawie wyników serii pomiarów znanymi metodami statystyki matematycznej. Niepewność tę wyrażamy za pomocą estymatora odchylenia standardowego dla średniej, zgodnie z zależnością

$$u_A = \overline{S}_{\overline{x}} = \sqrt{\frac{1}{n(n-1)} \sum \left(x_i - \overline{x}\right)^2} \qquad (7)$$

Niepewność standardową typu B oceniamy, określając pewne wielkości, które mogą stanowić ocenę odchyleń standardowych. W każdej sytuacji, jeżeli jakiejś wielkości możemy przyporządkować określony rozkład prawdopodobieństwa, to odpowiadające temu rozkładowi odchylenie standardowe należy przyjąć jako miarę niepewności standardowej typu B. Najczęstszym przypadkiem, z jakim mamy do czynienia w praktyce pomiarowej, jest konieczność oceny niepewności standardowej typu B, wynikającej z błędów aparatury pomiarowej. Wiadomo, że jedyną dostępną informacją o błędzie aparatury jest, w najprostszym przypadku, wartość graniczna błędu Δ_g, określona jego wskaźnikiem klasy. Jeżeli założymy, że błędy aparatury mają rozkład jednostajny, co jest jednoznaczne z przyjęciem, że błędy te z jednakowym prawdopodobieństwem przyjmują wartości z przedziału $\pm\Delta_g$, to odchylenie standardowe σ_J rozkładu jednostajnego będzie niepewnością standardową typu B.

$$u_B = \sigma_J = \frac{\Delta_g}{\sqrt{3}} \qquad (8)$$

Innym przykładem oceny niepewności standardowej typu B może być sytuacja, gdy znana jest całkowita niepewność typu B (u_{Bc}) z jakichkolwiek wiarygodnych źródeł, na przykład ze specyfikacji fabrycznej, certyfikatu kalibracji czy danych z wcześniejszych pomiarów, wtedy dla znanej, określonej wartości mnożnika $k(\alpha)$, niepewność standardowa typu B będzie równa:

$$u_B = \frac{u_{Bc}}{k(\alpha)} \qquad (9)$$

Ocena niepewności całkowitej

Pomiary bezpośrednie

Przystępując do pomiarów, mamy zawsze świadomość tego, że otrzymane wyniki są obarczone zarówno niepewnościami standardowymi typu A, jak i typu B. Ponieważ w pomiarach bezpośrednich liczba składowych niepewności standardowych jest na ogół niewielka, rozpatrzmy przypadek kiedy występują tylko dwie składowe niepewności standardowe, z których jedna jest niepewnością standardową typu A, a druga typu B [2, 5, 6]. Niepewność standardowa łączna jest wtedy równa:

$$u_{ł} = \sqrt{u_A^2 + u_B^2} \tag{10}$$

Przypadek ten jest przypadkiem krytycznym, ponieważ nie można tu zastosować centralnego twierdzenia granicznego, które pozwoliłoby nam na przyjęcie założenia, o zbieżności do rozkładu normalnego, nieznanego rozkładu prawdopodobieństwa, będącego splotem rozkładów składowych. W praktyce mogą zaistnieć sytuacje, w których jedna z niepewności standardowych będzie na tyle mała, że można ją pominąć. Rozpatrzone zostaną trzy różne sytuacje pomiarowe:

Sytuacja I – $u_A >> u_B$. W ocenie niepewności całkowitej uwzględniamy tylko niepewność standardową typu A, którą oceniamy zgodnie z zależnością (7). Niepewność całkowita będzie wtedy równa

$$u_c = k(\alpha) \cdot u_A \tag{11}$$

Współczynnik $k(\alpha)$ przyjmuje wartości zmiennej standaryzowanej $z(\alpha)$ odczytywane z tablic rozkładu normalnego dla przyjętego poziomu ufności a, kiedy próba jest liczna ($n > 30$) albo przyjmuje wartości zmiennej standaryzowanej t_{qm} odczytywane z tablic rozkładu t Studenta dla $q = 1 - \alpha$ i dla liczby stopni swobody $m = n - 1$, kiedy próba jest mało liczna ($n < 30$) o nieznanym odchyleniu standardowym.

W sytuacji kiedy znane jest odchylenie standardowe σ, niepewność standardowa typu A będzie równa

$$u_A = \sigma_{\bar{x}} = \frac{1}{n}\sigma \tag{12}$$

a współczynnik $k(\alpha)$ przyjmuje wartości zmiennej standaryzowanej rozkładu normalnego $z(\alpha)$.

Sytuacja II – $u_B >> u_A$. W ocenie niepewności całkowitej uwzględniamy tylko niepewność standardową typu B, którą oceniamy zgodnie z zależnością (8), przy założeniu, że rozpatrywane są niepewności aparatury pomiarowej. Niepewność całkowita będzie wtedy równa:

$$u_c = k(\alpha) u_B \tag{13}$$

Współczynnik $k_J(\alpha)$ przyjmuje wartości zmiennej standaryzowanej rozkładu jednostajnego, zwanego również rozkładem prostokątnym, który jest opisany zależnością

$$k_J(\alpha) = \sigma_J = \sqrt{3} \cdot \alpha \tag{14}$$

W praktyce rzadko liczymy w takiej sytuacji niepewność, ograniczając się do obliczenia błędu granicznego.

Sytuacja III – $u_A >> u_B$. W ocenie niepewności uwzględniamy obie niepewności standardowe. Niepewność łączna i niepewność całkowita będą wtedy opisane zależnościami, odpowiednio (10) i (5).

Najtrudniejszym problemem jest tutaj ocena współczynnika rozszerzenia $k(\alpha)$, który jest zmienną standaryzowaną rozkładu będącego splotem rozkładów składowych. W rozpatrywanym przypadku będzie to splot rozkładu normalnego i jednostajnego albo splot rozkładu Studenta i jednostajnego,

Ponieważ sploty rozkładów składowych, ze względu na określone problemy obliczeniowe, są na ogół nieznane, a wartości współczynnika $k(\alpha)$ nie są powszechnie publikowane, stosuje się różne przybliżone metody oceny tego współczynnika.

– Dopuszcza się stosowanie pewnego przybliżenia [1], zgodnie z którym współczynnikowi $k(\alpha)$ można narzucić pewne wartości dla określonego α, takie jak: $k(\alpha) = 2$, dla $\alpha = 0{,}95$ oraz $k(\alpha) = 3$ dla $\alpha = 0{,}99$.

– Inna metoda bazuje na hipotezie, że nieznany splot rozkładów składowych można przybliżyć rozkładem o większym odchyleniu standardowym [2, 3, 5, 6].

– W sytuacji gdy dysponujemy mało liczną próbą o nieznanym odchyleniu standardowym, proponuje się, aby współczynnik $k(\alpha)$ przyjmował wartości zmiennej standaryzowanej rozkładu Studenta, odczytywane z tablic tego rozkładu dla efektywnej liczby stopni swobody m_e [1].

$$m_e = \frac{u_{ł}^4}{\frac{1}{n_A} u_A^4 + \frac{1}{n_B} u_B^4} \tag{15}$$

gdzie:
n_A – liczność wykonanej serii pomiarów;
n_B – może przyjmować, dla rozpatrywanych sytuacji pomiarowych, wartości Ł50.

– Znaną [2] i bardzo często stosowaną jest tak zwana metoda sumy kwadratowej, zgodnie z którą niepewność całkowita

$$u_c = \sqrt{u_{Ac}^2 + u_{Bc}^2} \tag{16}$$

P o m i a r y   p o ś r e d n i e

Oceniając niepewność całkowitą w pomiarach pośrednich, wykorzystujemy wszystkie zasady oceny omówione dotychczas.

Wielkość Y mierzona pośrednio jest funkcją j-tych wielkości X_j mierzonych bezpośrednio. $Y = f(X_j)$, gdzie $j = 1, 2,...,N$, a jej estymatorem jest wartość średnia.

Niepewność całkowita jest wtedy równa

$$u_c = k(\alpha) \cdot u_{ł\bar{y}} \tag{17}$$

W ocenie niepewności standardowej łącznej dla średniej mierzonej pośrednio stosujemy prawo propagacji niepewności, uwzględniając wszystkie niepewności standardowe zarówno typu A, jak i typu B.

$$u_{ł\bar{y}} = \sqrt{\sum_{j=1}^{N} \left(\frac{\partial y}{\partial \bar{x}_j} \right)^2 u_{łj}^2} \tag{18}$$

Jeżeli funkcja opisująca wielkość mierzoną pośrednio jest funkcją nieliniową uwzględniamy kolejny wyraz rozwinięcia funkcji w szereg Taylora. Jeżeli zmienne losowe są wzajemnie zależne, uwzględniamy kowariancję.

Współczynnik $k(\alpha)$ może być oceniony w dwojaki sposób:

– Korzystając z faktu, że w pomiarach pośrednich liczba składowych niepewności jest większa niż w pomiarach bezpośrednich, korzysta się z centralnego twierdzenia granicznego i przyrównuje wartościom współczynnika rozszerzenia $k(\alpha)$ wartości zmiennej standaryzowanej rozkładu normalnego.

– W przypadku kiedy liczności prób są małe, dokładniejszą ocenę można uzyskać, przyrównując wartościom współczynnika $k(\alpha)$ wartości zmiennej standaryzowanej rozkładu Studenta dla efektywnej liczby swobody m_e, obliczanej zgodnie z zależnością

$$m_e = \frac{u_{ł\bar{y}}^4}{\sum_{j=1}^{N} \frac{1}{n_{Aj}} \left(\frac{\partial y}{\partial \bar{x} j} \right)^4 u_{Aj}^4 + \sum_{j=1}^{N} \frac{1}{n_{Bj}} \left(\frac{\partial y}{\partial \bar{x}_j} \right) u_{Bj}^4}$$

Podsumowanie

Dokonując oceny niepewności całkowitej wyniku pomiarów, należy mieć świadomość, że wszystkie metody tej oceny są metodami przybliżonymi. Niezmiernie istotne jest, aby eksperymentator miał świadomość skutków wynikających z wyboru takiej czy innej przybliżonej metody oceny. Do tego jednak niezbędne są badania dokładności poszczególnych metod i publikowanie wyników tych badań.

LITERATURA

[1] Guide to the Expression of uncertainty in Measurement. ISO/IEC/OIML/BIMP 1993.

[2] S. KUBISA, D. TURZENIECKA: Analiza porównawcza pewnych przybliżonych metod oceny niepewności. Mat. Konf. III MWK '97. Zegrze 1997.

[3] Teoria pomiarów pod red. H. SZYDŁOWSKIEGO. PWN, Warszawa 1981.

[4] D. TURZENIECKA: Nowe kierunki w ocenie i wyrażaniu niepewności wyniku pomiarów. *Metrologia i Systemy Pomiarowe* Warszawa 1993, nr 16.

[5] D. TURZENIECKA: A survey of basic problems of evaluation of uncertainty in measurement. Proc. Of Int. Conf. On MEASUREMENT'97. Smolenice Castle, Slovak Republic 1997.

[6] D. TURZENIECKA: Ocena niepewności wyniku pomiarów. Wyd. Politechniki Poznańskiej, Poznań 1997.