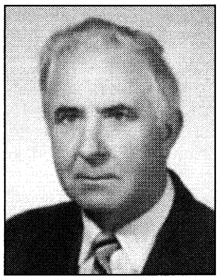
Tadeusz KACZOREK

POLITECHNIKA WARSZAWSKA
WYDZIAŁ ELEKTRYCZNY

Osiągalność i obserwowalność układów dodatnich ze sprzężeniami zwrotnymi



Prof. dr hab. inż. Tadeusz KACZOREK – uzyskał dyplom magistra inżyniera elektryka w 1956 r. na Wydziale Elektrycznym Politechniki Warszawskiej. Na tym samym wydziale w 1962 r. uzyskał stopień doktora nauk technicznych, a w 1964 r. doktora habilitowanego. Tytuł profesora nadzwyczajnego uzyskał w 1971 r., a profesora zwyczajnego w 1974 r. Członkiem korespondentem PAN został wybrany w 1986 r. , a członkiem rzeczywistym w 1998 r. W 1986 r. otrzymał Nagrodę Państwową Indywidualną Drugiego Stopnia za monografię „Dwuwymiarowe układy liniowe". W latach 1969-70 był dziekanem Wydziału Elektrycznego, a w latach 1970-79 prorektorem ds. nauczania PW. W latach 1970-81 był dyrektorem Instytutu Sterowania i Elektroniki Przemysłowej PW. W latach 1988-91 był dyrektorem Stacji Naukowej PAN w Rzymie.

Streszczenie

W pracy wykazano, że:

1. **osiągalność i obserwowalność układów dodatnich nie są niezmiennicze względem sprzężenia zwrotnego,**
2. **dla układu dodatniego nieosiągalnego i nieobserwowalnego w n-krokach można dobrać macierz sprzężenia zwrotnego tak, aby układ ze sprzężeniam zwrotnym był układem dodatnim osiągalnym i sterowalnym w n-krokach.**

Podano warunki konieczne i wystarczające na to, aby układ dodatni był jednocześnie osiągalny i obserwowalny.

Abstract

It is shown that:

1. **the reachability and observability of positive linear systems are invariant under the state-feedbacks,**
2. **it is possible to choose for unreachable and unobservable positive system a feedback gain matrix so that the positive closed-loop system is reachable and observable.**

Necessary and sufficient conditions are established for the simultaneous reachability and observability of positive linear discrete-time systems.

Wprowadzenie

W ostatnim dziesięcioleciu obserwuje się dynamiczny rozwój teorii układów dodatnich [1-5,8,12-15]. W układach dodatnich zmienne stanu i odpowiedzi na nieujemne wymuszenia i warunki początkowe przyjmują również tylko wartości nieujemne. Wiele wielkości występujących w różnych dziedzinach techniki, ekonomii, medycyny, na przykład takie jak ciśnienie, koncentracja pierwiastka w roztworze, zysk, porcja lekarstwa, itp., przyjmują tylko wartości nieujemne. W klasycznej teorii układów liniowych podstawowy aparat matematyczny stanowią teoria przestrzeni liniowych (wektorowych) i teoria operatorów liniowych. W teorii układów dodatnich zamiast przestrzeni liniowych korzystamy z teorii przestrzeni stożków, gdyż różnica dwóch liczb nieujemnych nie musi być liczbą nieujemną. Teoria układów dodatnich jest więc dziedziną znacznie trudniejszą i jej rozwój jest mniej zaawansowany. Teoria liniowych układów dodatnich ma pewne elementy wspólne z teorią układów standardowych liniowych oraz teorią układów nieliniowych, ale zawiera również wiele nowych zagadnień nie objętych tymi teoriami. Ograniczenie rozważań do pierwszej ćwiartki przestrzeni wskazuje, że teoria układów dodatnich ma wiele elementów wspólnych z teorią układów nieliniowych. Pojęcia osiągalność, sterowalność i obserwowalność należą do podstawowych pojęć teorii sterowania i systemów [11,7]. Dla układów standardowych (niedodatnich) osiągalność jest niezmiennicza względem sprzężenia zwrotnego od wektora stanu, tzn. że układ ze sprzężeniem zwrotnym od wektora stanu jest osiągalny wtedy i tylko wtedy, gdy jest osiągalny układ otwarty (bez sprzężenia zwrotnego) [7]. Analogicznie obserwowalność jest niezmiennicza względem sprzężenia od wyjścia [7]. Niezmienniczość całkowitej sterowalności i obserwowalności singularnych układów liniowych została wykazana w pracy [10]. Własności te nie zachodzą dla układów dodatnich [6].

Celem tej pracy jest wykazanie, że osiągalność i obserwowalność układów dodatnich nie są niezmiennicze względem sprzężenia zwrotnego. Wykażemy, że dla układu dodatniego nieosiągalnego i nieobserwowalnego w n-krokach można dobrać macierz sprzężenia zwrotnego tak, aby układ zamknięty (ze sprzężeniem zwrotnym) był układem dodatnim osiągalnym i sterowalnym w n-krokach. Zostaną również podane warunki konieczne i wystarczające na to, aby układ dodatni był jednocześnie osiągalny i obserwowalny. Autorowi nie są znane prace, w których byłyby rozpatrywane powyższe zagadnienia.

Warunki konieczne i dostateczne osiągalności i obserwowalności dyskretnych układów dodatnich

Niech $R^{n\times m}$ będzie zbiorem macierzy o elementach z ciała liczb rzeczywistych R i wymiarach $n\times m$ oraz $R^n := R^{n\times 1}$. Zbiór tych macierzy o elementach nieujemnych oznaczać będziemy przez $R_+^{n\times m}$ oraz $R_+^n := R_+^{n\times 1}$.
Weźmy pod uwagę układ dyskretny opisany równaniami

$$x_{i+1} = Ax_i + Bu_i\ ,\ \ i\in Z_+ := \{0,1,\ldots\} \tag{1a}$$

$$y_i = Cx_i \tag{1b}$$

przy czym $x_i \in R^n$, $u_i \in R^m$, $y_i \in R^p$ są odpowiednio wektorem stanu, wymuszenia i odpowiedzi w chwili dyskretnej i, a $A\in R_+^{n\times n}$, $B\in R_+^{n\times m}$, $C\in R_+^{p\times n}$.

Definicja 1.

Układ (1) nazywamy dodatnim (dokładniej wewnętrznie dodatnim), jeżeli dla każdego $x_0 \in R_+^n$ oraz dowolnego ciągu $u_i \in R_+^m$, $i\in Z_+$ mamy $x_i \in R_+^n$ oraz $y_i \in R_+^p$ dla $i\in Z_+$.

Układ (1) jest dodatni wtedy i tylko wtedy, gdy

$$A\in R_+^{n\times n}\ ,\ B\in R_+^{n\times m}\ ,\ C\in R_+^{p\times n} \tag{2}$$

Definicja 2.

[3] Układ dodatni (1) (lub równoważnie para *(A,B)*) nazywamy osiągalnym, w k-krokach, jeżeli dla każdego $x_f \in R_+^n$ (oraz $x_0 = 0$) istnieje ciąg wymuszeń $u_i \in R_+^m$ dla $i = 0,1,\ldots,k-1$ taki, że $x_k = x_f$.

Twierdzenie 1.

[3] Układ dodatni (1) jest osiągalny w n-krokach wtedy i tylko wtedy, gdy są spełnione warunki

1) $$R_n = n \,,\; R_n := \left[B, AB, \ldots, A^{n-1}B\right] \tag{3}$$

2) macierz R_n zawiera n liniowo niezależnych kolumn, z których każda zawiera tylko jeden element dodatni, a wszystkie pozostałe elementy są równe zeru.

Definicja 3.

[3] Układ dodatni (1) (lub równoważnie para (A,C)) nazywamy obserwowalnym w k-krokach, jeżeli na podstawie znajomości wartości odpowiedzi układu w kolejnych k punktach $y_0, y_1, \ldots, y_{k-1}$ wywołanej warunkiem początkowym $x_0 \in R_+^n$, przy zerowym wymuszeniu $u_i = 0$, $i \in Z_+$ możemy wyznaczyć x_0.

Twierdzenie 2.

[3] Układ dodatni (1) jest obserwowalny w n-krokach wtedy i tylko wtedy, gdy są spełnione warunki

1) $$\text{rząd } S_n = n \,,\; S_n := \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix} \tag{4}$$

2) macierz S_n zawiera n liniowo niezależnych wierszy, z których każdy zawiera tylko jeden element dodatni, a wszystkie pozostałe elementy są równe zeru.

Układy ze sprzężeniami zwrotnymi

Weźmy pod uwagę układ dodatni (1) o jednym wejściu (m=1) i jednym wyjściu (p=1), którego macierze A, B, i C mają następujące postacie

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_{n-1} \end{bmatrix} \in R_+^{n\times n} \,,\; B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \in R_+^n \,,\; C = \left[b_0 \;\; b_1 \ldots b_{n-1}\right] \in R_+^{1\times n} \tag{5}$$

Łatwo sprawdzić, że dla macierzy (5) jest spełniony warunek 1) twierdzenia 1, gdyż

$$\text{rząd}\left[B, AB, \ldots, A^{n-1}B\right] = \text{rząd}\begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & * \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 1 & \cdots & * & * \\ 1 & -a_{n-1} & \cdots & * & * \end{bmatrix} = n \tag{6}$$

(przy czym * oznacza elementy nieistotne w tych rozważaniach)

ale nie jest spełniony warunek 2) tego twierdzenia, jeżeli przynajmniej jeden ze współczynników $a_i \neq 0$ dla $i = 1, \ldots, n-1$. W tym przypadku para (A, B) nie jest osiągalna w n-krokach.

Analogicznie można pokazać, że para (A, C) nie jest obserwowalna w n-krokach, jeżeli $a_i \neq 0$ oraz $b_i \neq 0$ dla $i = 1, \ldots, n-1$.

Weźmy pod uwagę układ dodatni (1) ze sprzężeniem zwrotnym

$$u_i = v_i + Kx_i \tag{7}$$

przy czym $K \in R^{1\times n}$, a v_i jest nowym wymuszeniem.

Podstawiając (7) do (1a) otrzymamy

$$x_{i+1} = A_z x_i + Bv_i \,,\; i \in Z_+ \tag{8}$$

przy czym

$$A_z = A + BK \tag{9}$$

Dla pary (A, B) określonej przez (5) oraz

$$K = \left[a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}\right] \tag{10}$$

macierz (9) ma postać

$$A_z = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_{n-1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\left[a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}\right] = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \tag{11}$$

Korzystając z (11) otrzymamy

$$\left[B, A_z B, \ldots, A_z^{n-1}B\right] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{12}$$

Z (12) wynika, że dla układu ze sprzężeniem zwrotnym oba warunki twierdzenia 1 są spełnione i układ ten jest osiągalny w n-krokach. Rozpatrzmy z kolei parę (A_Z, C) określoną przez (5) i (11). Z zależności

$$\begin{bmatrix} C \\ CA_z \\ \vdots \\ CA_z^{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_0 & b_1 & \cdots & b_{n-1} \\ 0 & b_0 & \cdots & b_{n-2} \\ 0 & 0 & \cdots & b_0 \end{bmatrix} \tag{13}$$

wynika, że oba warunki twierdzenia 2 są spełnione wtedy i tylko wtedy, gdy $b_0 > 0$ oraz $b_1 = b_2 = \cdots = b_{n=1} = 0$. W tym przypadku para (A_Z, C) jest obserwowalna w n-krokach. Zostało więc udowodnione następujące twierdzenie

Twierdzenie 3.

Niech układ dodatni (1), którego macierze A, B i C mają postacie (5) będzie nieosiągalny i nieoberwowalny w n-krokach. Układ ten ze sprzężeniem zwrotnym (7) jest osiągalny i obserwowalny w n-krokach, jeżeli macierz K ma postać (10) oraz $b_0 > 0$ i $b_1 = b_2 = \cdots = b_{n=1} = 0$.

Z powyższych rozważań wynika następujący ważny wniosek

Wniosek 1.

Osiągalność i obserwowalność układów dodatnich nie jest niezmiennicza względem sprzężenia zwrotnego od wektora stanu.

Dla układów standardowych (niedodatnich) obserwowalność jest niezmiennicza względem sprzężenia zwrotnego od wyjścia $\left(u_i = v_i + Fy_i,\; F \in R^{m\times p}\right)$ oraz od wektora stanu (7) wtedy i tylko wtedy, gdy [10]

$$K = FC \tag{14}$$

Dowód tej tezy wynika natychmiast z zależności

$$\begin{bmatrix} Iz - A - BFC \\ C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & -BF \\ 0 & I \end{bmatrix}\begin{bmatrix} Iz - A \\ C \end{bmatrix} \tag{15}$$

z której otrzymujemy

$$\text{rząd}\begin{bmatrix} Iz - A - BFC \\ C \end{bmatrix} = \text{rząd}\begin{bmatrix} Iz - A \\ C \end{bmatrix} \text{ dla każdego } z \in \mathbf{C} \text{ (ciało liczb zespolonych)} \tag{16}$$

Zauważmy, że w przypadku układu dodatniego (1) nie istnieje sprzężenie zwrotne od wyjścia, które zapewniałoby osiągalność i obserwowalność w n-krokach układu ze sprzężeniem zwrotnym, gdyż dla macierzy K o postaci (10) i macierzy $C=[b_0 \ 0 \ldots 0]$ nie istnieje F spełniające równość (14).

Załóżmy z kolei, że dany jest układ dodatni (1), którego macierze A, B i C mają postacie (5) dla $a_i \neq 0$ oraz $b_i \neq 0$ dla $i=1,\ldots,n-1$, $b_0>0$. Łatwo sprawdzić, że układ ten jest osiągalny i obserwowalny w n-krokach, gdyż

$$[B, AB, \ldots, A^{n-1}B]=\begin{bmatrix}0 & 0 & \cdots & 1\\ 0 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 1 & \cdots & 0\\ 1 & 0 & \cdots & 0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}C\\ CA\\ \vdots\\ CA^{n-1}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}b_0 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & b_0 & \cdots & 0\\ 0 & 0 & \cdots & b_0\end{bmatrix} \tag{17}$$

Dobierając macierz K sprzężenia zwrotnego (7) o postaci

$$K=[0 \ -a_1 \ldots -a_{n-1}] \tag{18}$$

otrzymamy

$$A_z=A+BK=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0\\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1\\ -a_0 & 0 & 0 & \cdots & 0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\0\\ \vdots\\0\\1\end{bmatrix}[0 \ -a_1 \ldots -a_{n-1}]=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0\\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1\\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_{n-1}\end{bmatrix} \tag{19}$$

Jeżeli przynajmniej jeden ze współczynników $a_i \neq 0$ dla $i=1,\ldots,n-1$, to warunek 2) twierdzenia 1 nie jest spełniony i układ ten ze sprzężeniem zwrotnym nie jest osiągalny w n-krokach. Tak więc przez odpowiedni dobór sprzężenia zwrotnego z dodatniego układu osiągalnego w n-krokach możemy otrzymać dodatni układ nieosiągalny o n-krokach.

Układy dodatnie jednocześnie osiągalne i obserwowalne

Rozpatrywać będziemy układy dodatnie (1) o jednym wejściu i jednym wyjściu, które są jednocześnie osiągalne i obserwowalne w n-krokach.

Definicja 4.

[3] Macierz $A \in R_+^{n \times n}$ nazywamy uogólnioną macierzą permutacji (UMP), jeżeli każdy jej wiersz i każda jej kolumna zawiera tylko jeden element dodatni, a wszystkie pozostałe elementy są równe zeru.

Korzystając z pojęcia UMP możemy twierdzenie 1 i 2 sformułować następująco

Twierdzenie 1'.

Układ dodatni (1) jest osiągalny w n-krokach wtedy i tylko wtedy, gdy macierz R_n jest UMP.

Twierdzenie 2'.

Układ dodatni (1) jest obserwowalny w n-krokach wtedy i tylko wtedy, gdy macierz S_n jest UMP.

Łatwo wykazać, że iloczyn $S_n R_n$ macierzy S_n i R_n jest UMP wtedy i tylko wtedy, gdy każda z tych macierzy jest UMP.

Tak więc mamy następujące twierdzenie

Twierdzenie 4.

Układ dodatni (1) jest jednocześnie osiągalny i obserwowalny w n-krokach wtedy i tylko wtedy, gdy $S_n R_n$ jest UMP.

Korzystając z (3) i (4) otrzymamy

$$S_n R_n=\begin{bmatrix}C\\ CA\\ \vdots\\ CA^{n-1}\end{bmatrix}[B, AB, \ldots, A^{n-1}B]=\begin{bmatrix}g_1 & g_2 & \cdots & g_n\\ g_2 & g_3 & \cdots & g_{n+1}\\ g_n & g_{n+1} & \cdots & g_{2n-1}\end{bmatrix}=:G_n \tag{20}$$

przy czym

$$g_i=CA^{i-1}B, \quad i=1,2,\ldots,2n-1 \tag{21}$$

są wartościami charakterystyki impulsowej tego układu, tzn. odpowiedzi na wymuszenie u_i w postaci impulsu jednostkowego

$$u_i=\begin{cases}1 & dla \ \ i=0\\ 0 & dla \ \ i\neq 0\end{cases}$$ przy zerowych warunkach początkowych.

Z definicji 1 wynika, że układ (1) jest dodatni tylko wtedy, gdy charakterystyka impulsowa przyjmuje wartości nieujemne, tzn. $g_i \geq 0$ dla $i \in Z_+$.

Z zależności (20) i twierdzenia 4 mamy następujący wniosek

Wniosek 2.

Układ dodatni (1) jest jednocześnie osiągalny i obserwowalny w n-krokach wtedy i tylko wtedy, gdy macierz G_n jest UMP.

Weźmy pod uwagę układ dodatni (1), którego transmitancja dyskretna ma postać

$$G(z)=\frac{b_{n-1}z^{n-1}+\cdots+b_1 z+b_0}{z^n+a_{n-1}z^{n-1}+\cdots+a_1 z+a_0} \tag{22}$$

Realizacja *(A, B i C)* tej transmitancji ma postać (5) [7]

Jak wiadomo [7] transmitancja dyskretna (22) jest transformatą z charakterystyki impulsowej

$$G(z)=Z[g_i]=\sum_{i=0}^{\infty} g_i z^{-i} \tag{23}$$

Z porównania prawych stron (22) i (23) mamy

$$b_{n-1}z^{n-1}+\cdots+b_1 z+b_0=(z^n+a_{n-1}z^{n-1}+\cdots+a_1 z+a_0)(g_1 z^{-1}+g_2 z^{-2}+\cdots) \tag{24}$$

Porównując współczynniki przy tych samych potęgach zmiennej z otrzymamy

$$b_{n-1}=g_1,\ b_{n-2}=g_2+a_{n-1}g_1,\ b_{n-3}=g_3+a_{n-1}g_2+a_{n-2}g_1,\ldots,$$
$$b_{n-k}=g_k+a_{n-1}g_{k-1}+a_{n-2}g_{k-2}+\ldots+a_{n-k-1}g_1 \tag{25}$$

Mając dane a_j i b_j dla $j=0,1,\ldots,n-1$ możemy wyznaczyć g_i dla $i=1,2,\ldots$ korzystając z zależności

$$g_1=b_{n-1},\ g_2=b_{n-2}-a_{n-1}g_1,\ g_3=b_{n-3}-a_{n-2}g_1-a_{n-2}g_2$$ ogólnie

$$g_k=\begin{cases}b_{n-k}-a_{n-1}g_{k-1}-a_{n-2}g_{k-2}-\cdots-a_{n-k-1}g_1 & dla \ \ 1\leq k\leq n\\ -a_{n-1}g_{k-1}-a_{n-2}g_{k-2}-\ldots-a_1 g_{n-k+1}-a_0 g_{k-n} & dla \ \ k>n\end{cases} \tag{26}$$

Powstaje pytanie: przy jakich założeniach nałożonych na transmitancję (22) macierz G_n tego układu dodatniego jest UMP.

Na pytanie to daje odpowiedź następujące twierdzenie

Twierdzenie 5.

Macierz G_n układu dodatniego (1) jest UMP wtedy i tylko wtedy, gdy

$$a_0<0,\ b_0>0,\ b_i=0 \ \text{oraz} \ a_i=0 \ \text{dla} \ i=1,\ldots,n-1 \tag{27}$$

Ponadto układ ten jest stabilny asymptotycznie wtedy i tylko wtedy, gdy $|a_0|<1$.

Dowód. Dostateczność.

Jeżeli $a_i=0$ oraz $b_i=0$ dla $i=1,\ldots,n-1$, to z (26) otrzymujemy $g_k=0$ dla $k=1,\ldots,n-1$, $g_n=b_0$ oraz $g_k=-a_0 g_{k-n}=0$ dla $k=n+1,\ldots,2n-1$. W tym przypadku macierz G_n ma postać

$$G_n=\begin{bmatrix}0 & 0 & \cdots & 0 & b_0\\ 0 & 0 & \cdots & b_0 & 0\\ b_0 & 0 & \cdots & 0 & 0\end{bmatrix} \tag{28}$$

Konieczność.

Niech macierz G_n będzie UMP. Ze specjalnej struktury macierzy (20) wynika, że G_n może być UMP tylko wtedy, gdy $g_n>0$ a $g_k=0$ dla $k=1,\ldots,n-1, n+1,\ldots,2n-1$. Z zależności (25) wynika z kolei, że $b_i=0$ dla $i=1,\ldots,n-1$. Z zależności (26) dla $k=n+1$

mamy $g_{n+1} = -a_{n-1}g_n = 0$, co implikuje $a_{n-1} = 0$, gdyż $g_n \neq 0$. Przyjmując kolejno w zależności (26) $k = n+2,\ldots,2n-1$ otrzymamy odpowiednio $a_{n-2} = 0,\ldots,a_1 = 0$.

Jak wiadomo [3,7] układ dodatni (1) jest stabilny asymptotycznie wtedy i tylko wtedy, gdy jego równanie charakterystyczne ma pierwiastki wewnątrz koła jednostkowego. Jeżeli są spełnione warunki (27), to licznik transmitancji jest wielomianem zerowego stopnia i bieguny transmitancji dyskretnej (22) pokrywają się z pierwiastkami równania charakterystycznego, które ma postać $z^n - a_0 = 0$. Równanie to ma pierwiastki wewnątrz koła jednostkowego wtedy i tylko wtedy, gdy $|a_0| < 1$.

Z twierdzenia 5 i wniosku 2 otrzymujemy następujące twierdzenie

Twierdzenie 6.

Układ dodatni (1) o transmitancji dyskretnej (22) jest jednocześnie osiągalny i obserwowalny w n-krokach wtedy i tylko wtedy, gdy są spełnione warunki (27).

Przykład.

Niech transmitancja dyskretna układu dodatniego (1) ma postać

$$G(z) = \frac{2}{z^3 - \frac{1}{2}} \tag{29}$$

Realizacja tej transmitancji ma postać

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \end{bmatrix},\ B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix},\ C = [2\ \ 0\ \ 0] \tag{30}$$

gdyż

$$G(z) = C[Iz - A]^{-1}B = [2\ \ 0\ \ 0]\begin{bmatrix} z & -1 & 0 \\ 0 & z & -1 \\ \frac{1}{2} & 0 & z \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{2}{z^3 - \frac{1}{2}}$$

Dla realizacji (30) para (A, B) jest osiągalna, a para (A, C) jest obserwowalna, gdyż

$$[B, AB, \ldots, A^2B] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix},\ \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Dzieląc licznik przez mianownik transmitancji (29) otrzymamy

$$G(z) = 2z^{-3} + z^{-6} + \frac{1}{2}z^{-9} + \ldots \tag{31}$$

oraz

$$g_1 = g_2 = 0,\ g_3 = 2,\ g_4 = g_5 = 0,\ g_6 = 1,\ g_7 = g_8 = 0,\ g_9 = \frac{1}{2},\ldots$$

Charakterystyka impulsowa g_i tego układu przyjmuje więc tylko wartości nieujemne i zanika do zera dla i dążącego do nieskończoności. Układ ten jest więc układem stabilnym asymptotycznie. Wobec tego

$$G_n = \begin{bmatrix} g_1 & g_2 & g_3 \\ g_2 & g_3 & g_4 \\ g_3 & g_4 & g_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Z drugiej strony mamy

$$S_nR_n = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \end{bmatrix}[B, AB, A^2B] = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Zachodzi więc równość (20).

Uwagi końcowe

W pracy przeprowadzono analizę wpływu sprzężenia zwrotnego od wektora stanu na osiągalność i obserwowalność dodatnich dyskretnych układów liniowych. Wykazano, że osiągalność i obserwowalność układów dodatnich w przeciwieństwie do układów standardowych (niedodatnich) nie są niezmiennicze względem sprzężenia zwrotnego oraz, że dla układów dodatnich nieosiągalnych i/lub nieobserwowalnych w n-krokach można dobrać macierze sprzężeń zwrotnych tak, aby układy zamknięte były układami dodatnimi osiągalnymi i obserwowalnymi w n-krokach. Podano również warunki konieczne i wystarczające, aby układ dodatni był jednocześnie osiągalny i obserwowalny w n-krokach (twierdzenie 6).

Podane rozważania dla układów dodatnich o jednym wejściu i jednym wyjściu można stosunkowo łatwo uogólnić na układy dodatnie dyskretne o wielu wejściach i wielu wyjściach. Uogólnienia tych rozważań na dodatnie układy ciągłe [3] oraz układy singularne [8] są przykładami problemów otwartych czekających na pilne rozwiązanie.

Literatura

[1] A. BERMAN and R.J. PLEMMOUS:
Nonnegative matrices in the mathematical sience, Academic Press, New York, 1979.

[2] M.P. FANTI, B. MAIONE and B. TURCHIANO:
Controllability of multi-input positive discrete-time systems, Int. J. Control, 1990, vol. 51, No 6, pp. 1295-1308.

[3] T. KACZOREK:
Dodatnie układy jedno i dwuwymiarowe, Oficyna Wyd. Politechniki Warszawskiej, W-wa 2000 (w druku)

[4] T. KACZOREK:
Positive linear systems and their relationship with electrical circuits, XX SPETO 1997, pp. 33-41.

[5] T. KACZOREK:
Positive singular discrete linear systems, Bull. Pol. Acad. Techn. Sci., vol. 45.No. 4, 1997, pp. 619-631.

[6] T. KACZOREK:
Reachability and controlability of positive linear systems with state feedbacks, Bull. Pol. Acad. Techn. Sci., vol. 47, No 1, 1999, pp. 67-73.

[7] T. KACZOREK:
Teoria sterowania i systemów, PWM, Warszawa, 1999.

[8] T. KACZOREK:
Weakly positive continuous-time linear systems, Bull. Pol. Acad. Techn. Sci., vol. 46, No. 2, 1998, pp. 233-245.

[9] T. KACZOREK:
Wpływ długości kroku dyskretyzacji na dodatniość i stabilność liniowych układów dynamicznych, Pomiary, Automatyka, Kontrola 12'99, 1999, pp. 3-7.

[10] T. KACZOREK:
Wpływ sprzężenia zwrotnego na c-sterowalność i c-obserwowalność singularnych układów liniowych, Materiały Automatyki, 6-8 września 1994 Gdynia, str. 72-79.

[11] J. KLAMKA:
Sterowalność układów dynamicznych, PWN, Warszawa - Wrocław 1990.

[12] H. MADEA and S. KODAMA:
Positive realization of difference equations, IEEE Trans. on Circuits and Systems, vol. CAS-28, No 1, 1981, pp. 39-47.

[13] H. MINC:
Nonnegative matrices, J.Wiley, New York, 1988

[14] S. RINALDI and L. FARINA:
I sistemi lineari positivi, Citta Studi Edizioni, Milano, 1985.

[15] Z. TRZASKA:
State-space/descriptor models and asymptotic behavior of continuous-time positive control systems, Computer Math. Applic. Vol. 34, No 12, 1997, pp. 1-10.

Artykuł recenzowany