

Jerzy MATA CZ, Czesław MICHALIK, Włodzimierz WOLSKI

POLITECHNIKA WROCLAWSKA
INSTYTUT TELEKOMUNIKACJI I AKUSTYKI

Metoda cyfrowego badania stabilności układów elektronicznych ze sprzężeniem zwrotnym

Streszczenie

Zaproponowano metodę pomiarowego wyznaczania diagramu Nyquista układu z rozwartą pętlą sprzężenia zwrotnego. Metoda opiera się na pomiarze przybliżonej charakterystyki impulsowej badanego układu, pobudzanego impulsem prostokątnym o skończonym czasie trwania. Właściwą charakterystykę impulsową otrzymuje się drogą rozplotu charakterystyki przybliżonej i pobudzającego impulsu prostokątnego. Po skalowaniu sygnału, wynikającym z faktu, że sygnał pobudzający ma skończony czas trwania i skończoną amplitudę, wykonuje się szybką transformację Fouriera w celu otrzymania częstotliwościowych charakterystyk stosunku zwrotnego badanego układu i wykreślenia diagramu Nyquista.

Abstract

A measuring method of Nyquist diagram generating for network with open feedback loop is proposed. The method is based on a digital measurement of approximate impulse response of tested network when a rectangular signal of finite duration and finite amplitude is used as input. A proper impulse response is obtained by the digital deconvolution of approximate impulse response and input signal. Because the input signal has finite duration and finite amplitude a scaling of the network output signal is necessary. After scaling the fast Fourier transform is performed to obtain the frequency characteristics of the feedback ratio of tested network and finally the Nyquist diagram is plotted.

1. Wprowadzenie

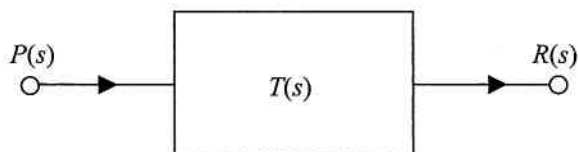
Badania stabilności układów elektronicznych ze sprzężeniem zwrotnym są istotnymi badaniami układów przy przygotowywaniu ich do produkcji, kiedy właściwości układów są dobrane tak, aby jak najlepiej wykorzystać możliwości elementów, szczególnie elementów czynnych, a w produkcji należy liczyć się z rozrzutami ich parametrów.

W dalszym ciągu stabilność będzie rozumiana w sensie BIBO (Bounded Input Bounded Output stability) [1]:

Układ SLS (Stacjonarny, Liniowy, o parametrach Skupionych) jest stabilny w sensie BIBO jeżeli ograniczonemu w czasie pobudzeniu odpowiada ograniczona w czasie reakcja układu.

$$|p(t)| < \infty \Rightarrow |r(t)| < \infty.$$

Na rys. 1 pokazano układ o funkcji układu (transmitancji), zapisanej w dziedzinie transformacji Laplace'a $H(s)$. Jeżeli $P(s)$ jest transformatą Laplace'a pobudzenia układu (np. napięcia



Rys. 1. Układ o funkcji układu (transmitancji) $T(s)$

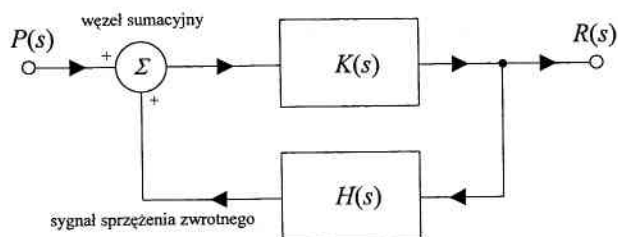
wejściowego), $R(s)$ jest transformatą Laplace'a reakcji układu (np. napięcia wyjściowego), wtedy

$$R(s) = T(s)P(s).$$

Dla układów SLS funkcją układu jest funkcją wymierną czyli stosunkiem dwóch wielomianów

$$T(s) = \frac{L(s)}{M(s)}.$$

Podstawowy układ ze sprzężeniem zwrotnym pokazano na rys. 2.



Rys. 2. Układ ze sprzężeniem zwrotnym

Transmitancja tego układu

$$T(s) = \frac{K(s)}{1 - K(s)H(s)} = \frac{L(s)}{M(s)}, \quad (1)$$

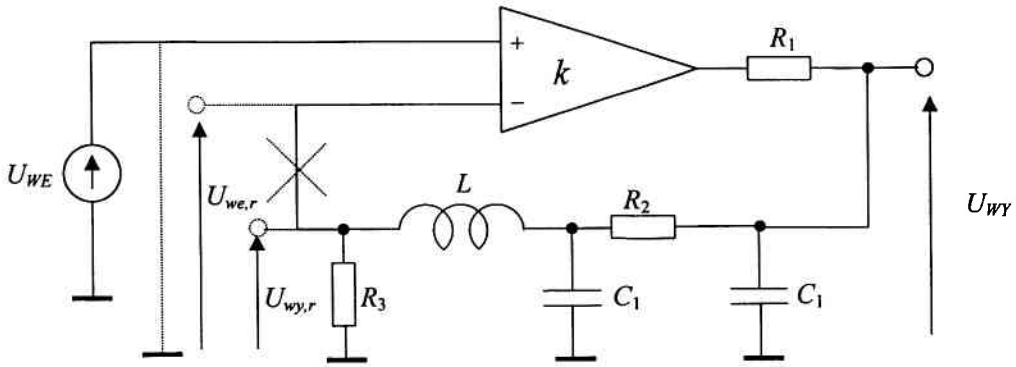
przy czym, z założenia, podzespoły o funkcjach układów $K(s)$ i $H(s)$ są układami stabilnymi w sensie BIBO. Układ ze sprzężeniem zwrotnym, o funkcji zadanej przez (1), może nie być układem stabilnym. Funkcję

$$F(s) = 1 - K(s)H(s) = \frac{M(s)}{M_F(s)}$$

nazywa się różnicą zwrotną układu ze sprzężeniem zwrotnym.

Następujące twierdzenie, znane jako twierdzenie Nyquista, rozstrzyga problem stabilności układu ze sprzężeniem zwrotnym [3]:

Jeżeli funkcja wymierna $F(s)$ (różnica zwrotna) zawiera w liczniku wielomian charakterystyczny układu ze sprzężeniem zwrotnym $M(s)$, w mianowniku wielomian nie mający zer w pra-



Rys. 3. Układ ze sprzężeniem zwrotnym – rozwarcie pętli sprzężenia

wej półpłaszczyźnie zmiennej zespolonej s , to układ, dla którego wyznaczono różnicę zwrotną $F(s)$ jest układem stabilnym w sensie BIBO wtedy i tylko wtedy, gdy hodograf funkcji $F(j\omega)$ nie otacza punktu $\{0,0\}$ płaszczyzny $\{\text{Re } F(j\omega), \text{Im } F(j\omega)\}$ ani nie przechodzi przez ten punkt.

W praktyce najczęściej konstruuje się wykres stosunku zwrotnego

$$Q(j\omega) = 1 - F(j\omega)$$

na płaszczyźnie $\{\text{Re } F(j\omega), \text{Im } F(j\omega)\}$, nazywany diagramem Nyquista. Jest oczywiste, że diagram Nyquista nie może otaczać punktu $\{1,0\}$ tej płaszczyzny, ani przechodzić przez ten punkt. Punkt $\{1,0\}$ nazywa się punktem krytycznym płaszczyzny stosunku zwrotnego. Jeżeli do węzła sumacyjnego (Rys. 2) sygnał sprzężenia zwrotnego dochodzi ze znakiem „-”, wtedy punktem krytycznym płaszczyzny jest punkt $\{-1,0\}$.

Stosunek zwrotny oblicza się przy rozwartej pętli sprzężenia zwrotnego; stabilność układu ze sprzężeniem zwrotnym można zatem badać analizując właściwości układu stabilnego w sensie BIBO. Stanowi to podstawową zaletę metody badania stabilności, opartej na twierdzeniu Nyquista. Drugą zaletą tej metody jest fakt, że badanie układu z rozwartą pętlą sprzężenia zwrotnego można prowadzić w dziedzinie rzeczy-

wistej częstotliwości, a więc metodami pomiarowymi. Na tym fakcie jest oparta metoda badania stabilności, proponowana w niniejszej pracy.

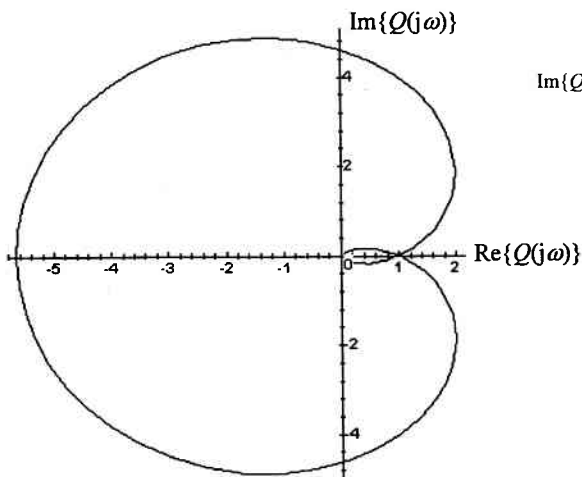
2. Przykład wyznaczania diagramu Nyquista

Na rys. 3 pokazano układ selektywny ze sprzężeniem zwrotnym. Parametry elementów biernych są znormalizowane i równe jedności, wzmacniacz różnicowy ma współczynnik sterowania równy k . W celu wyznaczenia stosunku zwrotnego, czyli transmitancji układu z rozwartą pętlą sprzężenia zwrotnego, należy wyłączyć napięcie wejściowe układu (zewrzeć wejście, jak to pokazano linią przerywaną), rozwarć pętlę sprzężenia zwrotnego w miejscu, w którym nie płynie prąd (rozwarcie zaznaczono krzyżykiem z linii przerywanych), zasilić układ dodatkowym napięciem pobudzającym ($U_{we,r}$) i wyznaczyć pomocnicze napięcie wyjściowe ($U_{wy,r}$).

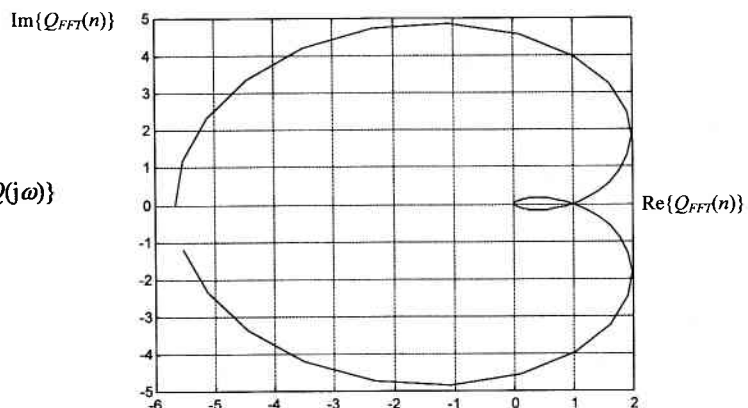
Transmitancja układu z rozwartą pętlą sprzężenia zwrotnego

$$Q(s) = -\frac{k}{s^3 + 4s^2 + 5s + 3} \quad (2)$$

W celu narysowania diagramu Nyquista należy wyznaczyć część rzeczywistą $V_Q(\omega)$ oraz część urojoną $X_Q(\omega)$ stosunku zwrotnego $Q(j\omega)$



Rys. 4. Diagram Nyquista układu z rozwartą pętlą sprzężenia zwrotnego



Rys. 5. Diagram Nyquista otrzymany metodą cyfrową

$$V_Q(\omega) = k \frac{4\omega^2 - 3}{\omega^6 + 6\omega^4 + \omega^2 + 9}, \quad (3)$$

$$X_Q(\omega) = -k \frac{\omega(\omega^2 - 5)}{\omega^6 + 6\omega^4 + \omega^2 + 9}.$$

Łatwo się przekonać, rozwiązując równania $X_Q(\omega) = 0$, $V_Q(\omega) < 1$, że graniczną ze względu na stabilność wartością współczynnika sterowania k jest wartość $k = 17$.

Na rys. 4 pokazano diagram Nyquista narysowany na podstawie zależności (3) dla $k = 17$. Diagram Nyquista przechodzi przez punkt krytyczny; układ po zwarciu pętli sprzężenia zwrotnego będzie niestabilny.

3. Cyfrowa metoda wyznaczania diagramu Nyquista

Diagram Nyquista jest wykresem stosunku zwrotnego $Q(j\omega)$ na płaszczyźnie $\{\text{Re}Q(j\omega), \text{Im}Q(j\omega)\}$, przy czym, w myśl założenia, układ z rozwartą pętlą sprzężenia zwrotnego jest stabilny w sensie BIBO. Zależność częstotliwościową stosunku zwrotnego $Q(j\omega)$ (funkcję widmową) można zatem otrzymać jako transformatę Fouriera [2] charakterystyki impulsowej $h_Q(t)$, odpowiadającej stosunkowi zwrotnemu, wyznaczonej dla funkcji $Q(s)$

$$h_Q(t) = \mathcal{L}^{-1}\{Q(s)\},$$

gdzie symbol \mathcal{L}^{-1} jest operatorem odwrotnego przekształcenia Laplace'a. Funkcja widmowa

$$Q(j\omega) = \mathcal{F}\{h_Q(t)\},$$

symbol \mathcal{F} jest operatorem przekształcenia Fouriera. Jeżeli zatem spróbkować charakterystykę impulsową $h_Q(t)$ a następnie wyznaczyć funkcję widmową metodą szybkiej transformacji Fouriera (FFT [4J], to diagram Nyquista można uzyskać metodą cyfrową.

Dla przykładu opisanego w Punkcie 2 przyjęto, że charakterystykę impulsową będzie się badać w czasie $t = 50$ i przedstawiać ją za pomocą 2048 próbek, co odpowiada okresowi próbkowania $T_P = 50/2048$. Charakterystyka impulsowa, otrzymana na podstawie zależności (2) dla $k = 17$ jest równa

$$h_Q(t) = -4,83978236 e^{-2,465571232t} + 4,83978236 e^{-0,767214384t} \cos(0,79255119925t) - 10,37115242 e^{-0,767214384t} \sin(0,79255119925t).$$

Obliczenia FFT dla zbioru próbek charakterystyki impulsowej dokonano za pomocą procedury FFT pakietu MATLAB® i otrzymano zbiór wartości zespolonych funkcji widmowej $Q_{FFT}(n)$, $n \in [1, 2048]$. Diagram Nyquista, otrzymany dla spróbkowanych wartości $Q_{FFT}(n)$ pokazano na rys. 5.

Porównując diagram Nyquista z rys. 4 z diagramem z rys. 5 należy stwierdzić, że są one praktycznie identyczne. Diagram funkcji $Q_{FFT}(n)$ odzwierciedla wszystkie najważniejsze właściwości diagramu z rys. 4; przechodzi przez punkt $\{1, 0\}$, co świadczy o niestabilności układu ze zwartą pętlą sprzężenia zwrotnego.

4. Metoda pomiarowa wyznaczania diagramu Nyquista

Metoda cyfrowa wyznaczania diagramu Nyquista, opisana w rozdz. 3, opiera się na fakcie, że charakterystyka impulsowa układu z rozwartą pętlą sprzężenia zwrotnego jest odpowiedzią układu na pobudzenie deltą Diraca [1].

W warunkach pomiarowych nie można wytworzyć impulsu, który byłby deltą Diraca. Należy więc posłużyć się impulsem prostokątnym o różnym od zera czasie trwania i skończonej amplitudzie.

Niech

$$p_i(t) = P_0[\mathbf{1}(t) - \mathbf{1}(t - t_0)], \quad (4)$$

gdzie: $\mathbf{1}(t)$ jest funkcją Heaviside'a (funkcją jednostkową), będzie impulsem pobudzającym układ z rozwartą pętlą sprzężenia zwrotnego. Odpowiedź układu

$$r(t) = h_Q(t) * p_i(t),$$

symbol „*” oznacza spłot funkcji.

W dziedzinie przekształcenia Laplace'a powyższe równanie można zapisać w postaci

$$R(s) = Q(s)P_i(s),$$

gdzie: $Q(s)$ jest transmitancją układu z rozwartą pętlą sprzężenia zwrotnego, $P_i(s)$ jest transformatą Laplace'a pobudzenia impulsowego. Zgodnie z (4)

$$P_i(s) = P_0 \frac{1}{s} (1 - e^{-st_0})$$

Otrzymane wyrażenie należy znormalizować, tak aby pole pod impulsem stosowanym jako pobudzenie było identyczne z polem delty Diraca, czyli równe jedności. Tak więc

$$D_i(s) = \frac{1}{t_0 s} (1 - e^{-st_0}).$$

Signal wyjściowy z układu pod wpływem sygnału impulsowego $D_i(s)$

$$H_{Q_{t_0}} = Q(s)D_i(s)$$

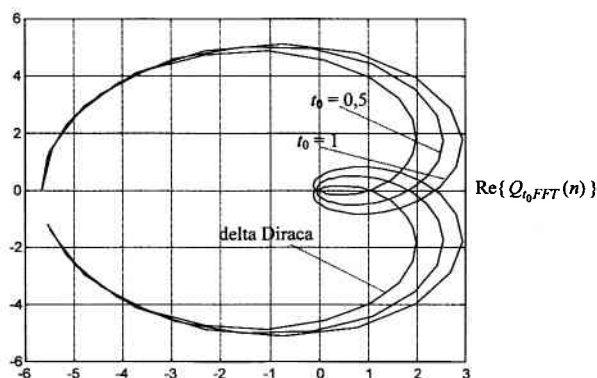
określa transformatę Laplace'a przybliżonej charakterystyki impulsowej mierzonego układu, równej

$$h_{Q_{t_0}}(t) = \mathcal{L}^{-1}\{H_{Q_{t_0}}(s)\}.$$

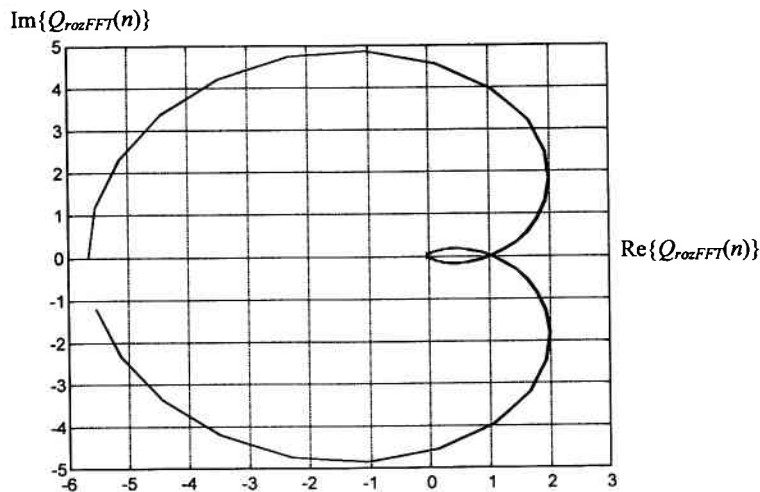
Dla przykładowego układu

$$H_{Q_{t_0}}(s) = -\frac{1}{t_0 s} (1 - e^{-st_0}) \frac{k}{s^3 + 4s^2 + 5s + 3},$$

$\text{Im}\{Q_{0FFT}(n)\}$



Rys. 6. Diagramy Nyquista układu z rozwartą pętlą sprzężenia zwrotnego otrzymane metodą pomiarową



Rys. 7. Diagramy Nyquista otrzymane metodą pomiarową po rozplocie

$$h_{Q_0}(t) = \{-0,333333k + 0,115467k e^{-2,46557t} + k e^{-0,767214t} [0,217866 \cos(0,792552t) + 0,570111 \sin(0,792552t)]\} \mathbf{1}(t) + \{-0,333333k + 0,115467k e^{-2,46557(t-t_0)} + k e^{-0,767214(t-t_0)} [0,217866 \cos(0,792552(t-t_0)) + 0,570111 \sin(0,792552(t-t_0))]\} \mathbf{1}(t-t_0).$$

W celu skonstruowania diagramu Nyquista należy wyznaczyć transformatę Fouriera przybliżonej charakterystyki impulsowej

$$Q_0(j\omega) = \mathcal{F}\{h_{Q_0}(t)\}.$$

Transformatę tę można wyznaczyć metodą FFT. Przyjęto czas obserwacji charakterystyki $t = 50$, liczbę próbek 2048, współczynnik $k = 17$ oraz czasy trwania impulsu pobudzenia $t_0 = 0,5$ oraz 1. Diagramy Nyquista pokazano na rys. 6. Wynika z niego, że bezpośrednie wykorzystanie przybliżonych charakterystyk impulsowych daje bardzo duże błędy w przebiegu diagramu Nyquista, tym większe im dłuższy jest czas trwania impulsu pobudzającego. Z tego względu nie może być wykorzystane w konstrukcji układu pomiarowego do badania stabilności układów elektronicznych ze sprzężeniem zwrotnym.

Jeżeli wziąć pod uwagę związek między pobudzeniem i odpowiedzią układu liniowego w dziedzinie czasu [1] i przystosować go do analizy układu z rozwartą pętlą sprzężenia zwrotnego, pobudzany impuls o czasie trwania t_0 , to można zapisać

$$h_{Q_0}(t) = h_Q(t) * p_i(t).$$

Na podstawie powyższej zależności

$$h_Q(t) = h_{Q_0}(t)(*)^{-1} p_i(t),$$

gdzie operator $(*)^{-1}$ oznacza operację odwrotną do splotu, zwaną rozplotem. Operacja rozplotu zapewnia uzyskanie poprawnej charakterystyki impulsowej układu na podstawie znajomości charakterystyki przybliżonej i impulsu pobudzającego.

Operację rozplotu przybliżonej charakterystyki impulsowej dla analizowanego przykładu wykonano za pomocą procedury w pakiecie MATLAB®. Kolejną operacją jest skalowanie wyniku roz-

plotu, konieczne ze względu na fakt, że idealna charakterystyka impulsowa układu jest odpowiedzią układu na pobudzenie deltą Diraca o polu równym jedności. Współczynnik skalowania zależy od czasu obserwacji przybliżonej charakterystyki impulsowej

$$k_{st_0} = \text{CEIL}\left(\frac{N}{t_{obs}} t_0\right),$$

gdzie: CEIL oznacza operację wyznaczania najbliższej liczby całkowitej, większej od argumentu operacji, N jest liczbą próbek przybliżonej charakterystyki impulsowej. Dla analizowanego przykładu, przy założeniu czasu obserwacji $t_{obs} = 50$, otrzymuje się następujące współczynniki skalowania $k_{s0,5} = 21$, $k_{s1} = 41$. Charakterystyki impulsowe po rozplocie poddano szybkiej transformacji Fouriera. Otrzymane diagramy Nyquista pokazano na rys. 7. Diagramy Nyquista dla różnych czasów trwania impulsu pobudzającego są identyczne i pokrywają się z diagramem dla delty Diraca.

5. Układ do pomiaru diagramu Nyquista

Metoda, prezentowana w rozdz. 4, nadaje się doskonale do implementacji hardware'owej w postaci układu pomiarowego. Układ pomiarowy musi zawierać następujące podzespoły:

- układ generujący impuls prostokątny o regulowanym czasie trwania, pobudzający układ, dla którego należy wyznaczyć diagram Nyquista,
- przetworniki analogowo-cyfrowe pozwalające przetworzyć impuls pobudzający i sygnał wyjściowy z badanego układu,
- zegar ustalający czas obserwacji sygnału wyjściowego z badanego układu, - interfejsy transmitujące sygnały do komputera,
- mikroprocesor sterujący działaniem układu pomiarowego,
- komputer realizujący rozplot sygnałów, skalowanie, wyznaczanie FFT charakterystyki impulsowej i wizualizację diagramu Nyquista.

Zakończenie

Zaproponowano metodę pomiarowego wyznaczania diagramu Nyquista układu z rozwartą pętlą sprzężenia zwrotnego. Metoda opiera się na pomiarze przybliżonej charakterystyki impulsowej badanego układu, pobudzanego impulsem prostokątnym o skończonym czasie trwania. Przybliżoną charakterystykę impulsową otrzymuje się metodą analogową, ale sygnał zawierający informację o charakterystyce impulsowej jest zamieniany na sygnał cyfrowy. Właściwą charakterystykę impulsową otrzymuje się drogą rozplotu charakterystyki przybliżonej i pobudzającego impulsu prostokątnego. Po skalowaniu sygnału, wynikającym z faktu, że sygnał pobudzający ma skończony czas trwania i skończoną amplitudę, wykonuje się szybką transformację Fouriera, w celu otrzymania częstotliwościowych charakterystyk stosunku zwrotnego badanego układu. Efektem końcowym jest wykres przedstawiający diagram Nyquista badanego układu.

Literatura

- [1] W. WOLSKI, M. URUSKI: Teoria obwodów cz. 1, skrypt PWr, Wrocław 1983.
- [2] W. WOLSKI, M. URUSKI: Teoria obwodów cz. 2, skrypt PWr, Wrocław 1983.
- [3] W. WOLSKI, M. URUSKI: Wybrane zagadnienia z teorii obwodów, skrypt P Wr, Wrocław 1984.
- [4] R. KUC: Introduction to digital signal processing, McGraw-Hill Book Company, 1988.