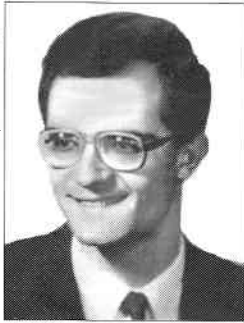


Andrzej BARTOSZEWICZ

INSTYTUT AUTOMATYKI POLITECHNIKI ŁÓDZKIEJ

Eliminacja zjawiska chatteringu w układach sterowania o zmiennej strukturze z ruchem ślizgowym

Dr inż. Andrzej BARTOSZEWICZ jest adiunktem w Instytucie Automatyki Politechniki Łódzkiej. Jego zainteresowania naukowe obejmują zagadnienia sterowania odpornego i adaptacyjnego ze szczególnym uwzględnieniem sterowania o zmiennej strukturze. W roku akademickim 1991/92 był stypendystą programu Fulbrighta na Uniwersytecie Purdue w USA, a następnie w roku 1994/95 stypendystą British Council w Industrial Control Centre na Uniwersytecie Strathclyde w Szkocji. Pracował także jako research associate na Uniwersytecie w Leicester w Anglii, gdzie zajmował się odpornym sterowaniem manipulatorów o zamkniętym łańcuchu kinematycznym.



Streszczenie

W artykule przedstawiono zasadę działania układów sterowania o zmiennej strukturze, a następnie pokazano, że w praktyce zastosowanie idealnych elementów przełączających nieuchronnie prowadzi do powstania w układach tego typu niepożądanego zjawiska chatteringu. Omówiono mechanizm tego zjawiska i podano prostą zależność określającą warunek jego eliminacji.

Wstęp

Pierwsze prace dotyczące układów sterowania o zmiennej strukturze z ruchem ślizgowym były prowadzone w Rosji ponad czterdzieści lat temu [7, 8, 9, 16, 17, 18]. Początkowo prace te miały niemal wyłącznie teoretyczne znaczenie, ponieważ dostępne w tamtym czasie elementy przełączające – głównie przełączniki elektromechaniczne – nie nadawały się do ciągłej pracy z dużą częstotliwością. Jednak rozwój technologii przyrządów półprzewodnikowych oraz wprowadzenie komparatorów i kluczy elektronicznych umożliwiły praktyczną realizację układów sterowania tego typu i przyczyniły się do znacznego wzrostu ich popularności także poza dawnym Związkiem Radzieckim. Świadczą o tym między innymi ukazujące się książki [6, 18, 20, 23] i numery specjalne czasopism poświęconych temu zagadnieniu [1, 10, 21, 22], opracowany pakiet Variable Structure Control Toolbox ułatwiający analizę i syntezę takich układów w programie Matlab, a także duża liczba artykułów i doniesień z tej dziedziny, publikowanych w czasopiśmie i na konferencjach. Powodem tak znacznego zainteresowania układami sterowania tego typu jest głównie ich niewrażliwość na stosunkowo szeroką klasę zakłóceń zewnętrznych i niedokładności modelu sterowanego obiektu. Odporność, niewielka złożoność obliczeniowa i możliwość zastosowania regulatorów ślizgowych do sterowania różnorodnymi, np. nieliniowymi i niestacjonarnymi obiektami dy namycznymi decydują o tym, że na świecie badania układów o zmiennej strukturze stanowią obecnie jeden z ważniejszych kierunków rozwoju teorii sterowania.

Podstawowe właściwości układów sterowania o zmiennej strukturze

W układzie sterowania o zmiennej strukturze stosuje się zbiór różnych sprzężeń zwrotnych wraz z regułą określającą, które z tych sprzężeń działa (jest włączone) w danej chwili. Reguła wyboru aktywnego sprzężenia jest funkcją

$$i = \phi(x, t) \quad (1)$$

której argumentami są stan sterowanego obiektu x i czas t , a jej

wartość $i = 1, 2, \dots, p$ określa wybrane sprzężenie. Zazwyczaj liczba sprzężeń p jest niewielka, a często wynosi ona dwa. Taką właśnie sytuację ilustruje zaczerpnięty z pracy [19] i nieznacznie zmodyfikowany przykład.

Przykład 1

Weźmy pod uwagę obiekt opisany równaniami

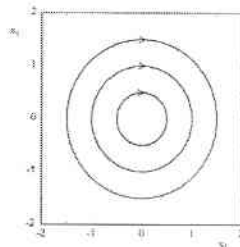
$$\dot{x}_1 = x_2 \quad \dot{x}_2 = x_2 + u \quad (2)$$

gdzie x_1 i x_2 są zmiennymi stanu, a u jest sygnałem sterującym i rozważmy sprzężenia zwrotne w postaci $u_i = f_i(x_1, x_2)$, przy czym $i = 1, 2$. Przyjmijmy, że

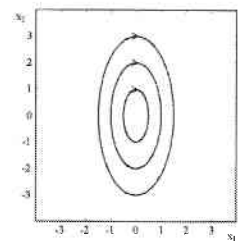
$$u_1 = f_1(x_1, x_2) = -x_1 - x_2 \quad (3)$$

$$u_2 = f_2(x_1, x_2) = -x_2 - 4x_1 \quad (4)$$

Na rysunku 1a pokazano trajektorie fazowe obiektu (2)



Rys. 1a. Trajektorie fazowe obiektu (2) sterowanego według zależności (3)



Rys. 1b. Trajektorie fazowe obiektu (2) sterowanego według zależności (4)

sterowanego według zależności (3), a na rysunku 1b – trajektorie fazowe tego samego obiektu sterowanego według zależności (4).

Łatwo zauważyć, że w każdym z tych przypadków układ zamknięty jest stabilny tylko w sensie Lapunowa. Jeżeli natomiast wybierzemy następującą funkcję przełączającą

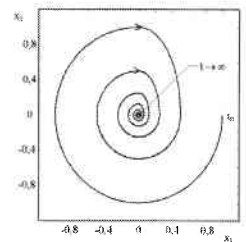
$$i = \begin{cases} 1 & \text{dla } \min\{x_1, x_2\} < 0 \\ 2 & \text{dla } \min\{x_1, x_2\} \geq 0 \end{cases} \quad (5)$$

i zastosujemy sterowanie o zmiennej strukturze $u = u_i$ określone zależnościami (3), (4) i (5), to układ zamknięty będzie stabilny asymptotycznie, a sygnały x_1 i x_2 będą dążyły do zera przy $t \rightarrow \infty$. Taką właśnie sytuację, dla warunków początkowych $x_1(t_0) = 1$ i $x_2(t_0) = 0$, zilustrowano na rys. 2.

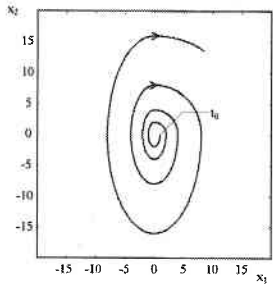
Warto w tym miejscu zauważyć, że o właściwościach układu zmiennej strukturze decydują nie tylko poszczególne sprzężenia zwrotne, ale także zastosowana logika przełączeń. Na przykład, jeżeli w omawianym układzie funkcja (5) zostanie zastąpiona zależnością

$$i = \begin{cases} 1 & \text{dla } \min\{x_1, x_2\} \geq 0 \\ 2 & \text{dla } \min\{x_1, x_2\} < 0 \end{cases} \quad (6)$$

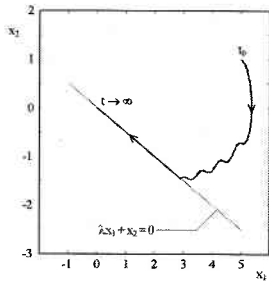
to przy identycznych sprzężeniach, opisanych równaniami (3) i (4) układ zamknięty będzie niestabilny, a jego trajektoria fazowa, przy nie zmienionych warunkach początkowych, będzie przebiegała



Rys. 2. Trajektoria fazowa asymptotycznie stabilnego układu o zmiennej strukturze



Rys. 3. Trajektoria fazowa niestabilnego układu o zmiennej strukturze



Rys. 4. Trajektoria fazowa przykładowego układu z ruchem ślizgowym o zmiennej strukturze

tak, jak pokazano na rys. 3.

Sterowanie o zmiennej strukturze z idealnym ruchem ślizgowym

Jak już wspomniano, układy sterowania o zmiennej strukturze charakteryzują się zastosowaniem różnych sprzężeń zwrotnych. Dzięki temu możliwe jest takie zaprojektowanie układu (tj. samych sprzężeń i logiki ich przelazczeń), że różne sprzężenia działające po przeciwnych stronach pewnej hiperpowierzchni w przestrzeni stanu zapewniają dochodzenie punktu opisującego dynamikę obiektu do tej hiperpowierzchni, a po jej osiągnięciu gwarantują pozostawanie na niej tego punktu. Pod pojęciem punktu opisującego rozumie się tutaj taki punkt, którego współrzędnymi w przestrzeni stanu są kolejne elementy wektora x , czyli kolejne zmienne stanu obiektu sterowania. Jeżeli układ jest właściwie zaprojektowany i punkt opisujący rzeczywistość pozostaje na rozważanej hiperpowierzchni, to taki ruch układu nazywany jest idealnym ruchem ślizgowym, a sama hiperpowierzchnia – hiperpowierzchnią ślizgową. Ponieważ każde przejście punktu opisującego dynamikę obiektu na przeciwną stronę tej hiperpowierzchni wymaga zmiany reguły sterowania, a zatem powoduje przelazczenie odpowiednich sprzężeń, więc często ta hiperpowierzchnia jest także nazywana hiperpowierzchnią przelazczeń. W szczególnym przypadku układów drugiego i trzeciego rzędu rozważana hiperpowierzchnia przelazczeń staje się odpowiednio linią i powierzchnią przelazczeń.

Ideę sterowania o zmiennej strukturze z ruchem ślizgowym ilustruje kolejny przykład.

Przykład 2

$$\dot{x}_1 = x_2 \quad \dot{x}_2 = b \cos(mx_1) + u \quad (7)$$

Rozważmy nieliniowy obiekt opisany równaniami przy czym wartość stałych parametrów b i m w równaniach (7) nie jest dokładnie znana, a wiadomo tylko, że $d'bd' < 1$. Podobnie jak w poprzednim przykładzie również tutaj x_1 i x_2 są zmiennymi stanu, a u jest sygnałem sterującym. Wybierzmy linię przelazczeń $s = 0$, gdzie

$$s = \lambda x_1 + x_2 \quad (8)$$

a wartość stałej λ wynosi $1/2$, i zastosujemy następującą sterowanie o zmiennej strukturze

$$u = \lambda x_2 - \text{sgn}(s) \quad (9)$$

Łatwo zauważyć, że wartość bezwzględna zmiennej s zdefiniowanej zależnością (8) określa odległość punktu opisującego dynamikę obiektu od linii przelazczeń. Z kolei znak tej zmiennej wskazuje, po której stronie rozważanej linii znajduje się punkt opisujący, i decyduje o tym, które z dwóch sprzężeń zwrotnych określonych funkcją sigum w równaniu (9) jest wybrane w chwili t . Inaczej mówiąc zmiana znaku zmiennej s powoduje przelazczanie pomiędzy różnymi sprzężeniami i różnymi wartościami sygnału sterującego u . Dlatego zmienna ta nazywana jest zwykle zmienną przelazczającą.

Rys. 4 pokazuje trajektorię fazową układu w przypadku gdy $b = 3/4$, $m = 10$, a warunki początkowe wynoszą $x_1 = 5$ i $x_2 = 1$. Jak widać na rysunku, proces regulacji składa się z dwóch etapów. Pierwszy z nich to faza dochodzenia punktu opisującego dynamikę obiektu z położenia początkowego do linii przelazczeń, a drugi to faza ślizgowa (w której punkt opisujący „ślizga się” po linii przelazczeń). W fazie ślizgowej dynamika obiektu określona jest wyłącznie równaniem linii przelazczeń $s(x) = 0$, co oznacza, że nieliniowy obiekt dynamiczny drugiego rzędu zachowuje się tak, jak element liniowy pierwszego rzędu w pełni opisany zależnością

$$\dot{x}_1 = \lambda x_1 \quad (10)$$

Ponieważ w równaniu (10) nie występują stałe b i m ani żadne inne parametry obiektu regulacji, zatem w ruchu ślizgowym obiekt jest całkowicie niewrażliwy na ewentualne niedokładności określenia tych parametrów oraz na ich zmiany. Zauważmy jeszcze, że podobny wniosek byłby także słuszny, gdyby funkcję $b \cos(mx_1)$ w równaniach (7) zastąpić zewnętrznym zakłóceniem $d(t)$ o wartości bezwzględnej mniejszej od jedności.

Przedstawiony przykład ilustruje najważniejsze właściwości sterowania o zmiennej strukturze z idealnym ruchem ślizgowym. Przede wszystkim zapewnia ono odporność układu na stosunkowo szeroką klasę zakłóceń zewnętrznych oraz zmian parametrów modelu. Ponadto powoduje obniżenie rzędu układu oraz pozwala narzucić pożądane właściwości dynamiczne. na przykład wymusić liniowy charakter układu i określone położenie jego biegunów. W związku z tym, ponieważ projektowanie układów liniowych jest stosunkowo proste, w tradycyjnych układach o zmiennej strukturze najczęściej jako hiperpowierzchnie ślizgowe wybierane są hiperpłaszczyzny, a w układach drugiego i trzeciego rzędu odpowiednio linie proste i płaszczyzny.

Sterowanie o zmiennej strukturze z rzeczywistym ruchem ślizgowym

W przedstawionych dotychczas rozważaniach zakładano, że struktura modelu sterowanego obiektu jest precyzyjnie określona. Inaczej mówiąc przyjmowano, że nieznane są tylko sygnał zakłóceń i wartości wybranych parametrów. Ponieważ jednak w praktyce założenie to nie jest nigdy idealnie spełnione, spróbujemy teraz zastanowić się, w jaki sposób występowanie różnic (czasem nawet bardzo małych) pomiędzy obiektem a jego modelem wpływa na działanie opisywanych w tym artykule układów sterowania. Jako przykład weźmiemy pod uwagę niewielkie opóźnienie w torze głównym obiektu sterowania.

Będziemy rozważać obiekt opisany następującym równaniem

$$\frac{d^n y(t)}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y(t)}{dt^{n-1}} + \dots + a_1 \dot{y}(t) + a_0 y(t) = b v(t - \tau) + d(t) \quad (11)$$

gdzie v , y oraz d oznaczają odpowiednio sygnał wejściowy, wyjściowy i zakłócenie; a_0 , a_1 , a_2 , ..., a_{n-1} i b znane parametry; natomiast t oznacza czas opóźnienia. Wybieramy wektor stanu

$$x = [x_1(t) \ x_2(t) \ \dots \ x_n(t)]^T = [v(t) \ \dot{y}(t) \ \dots \ y^{(n-1)}(t)]^T \quad (12)$$

i powierzchnię przelazczeń

$$d(t) = \lambda_1 x_1(t) + \lambda_2 x_2(t) + \lambda_3 x_3(t) + \dots + \lambda_{n-1} x_{n-1}(t) + x_n(t) = 0 \quad (13)$$

Klasyczne, nieciągłe sterowniki o zmiennej strukturze przyjmują postać

$$v(t) = u_c(t) + u_d(t) \quad (14)$$

gdzie u_c opisuje liniowe sprzężenie określone zależnością

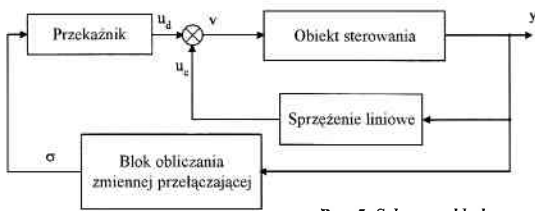
$$u_c(t) = \frac{1}{b} [a_0 x_1(t) + (a_1 - \lambda_1) x_2(t) + (a_2 - \lambda_2) x_3(t) + \dots + (a_{n-1} - \lambda_{n-1}) x_n(t)] \quad (15)$$

a u_d stanowi składnik nieliniowy, którego zadaniem jest przeciwdziałanie wpływowi zakłóceń $d(t)$. Składnik ten wynosi

$$u_d(t) = \frac{-\gamma}{b} \text{sgn}[\sigma(t)] \quad (16)$$

gdzie γ jest taką stałą, że dla dowolnego t prawdziwa jest nierówność $\gamma > |d(t)|$.

Schemat przedstawionego układu sterowania pokazano na rys. 5.

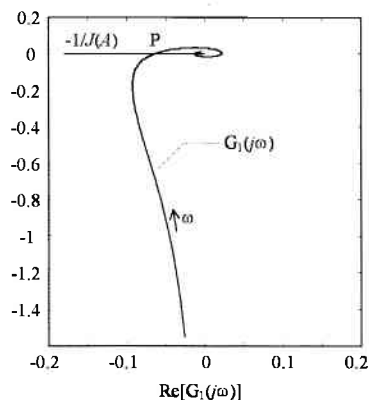


Rys. 5. Schemat układu sterowania

W pracy [2] pokazano, że jeżeli opóźnienie τ jest niewielkie, to zależność pomiędzy sygnałami σ i u_d w przybliżeniu może zostać wyrażona następującą transmitancją widmową

$$G_1(j\omega) = \frac{\sigma(j\omega)}{u_d(j\omega)} \approx \frac{b \exp(j\omega\tau)}{j\omega} \quad (17)$$

Na rysunku 6 pokazano charakterystykę amplitudowo-fazową $G_1(j\omega)$ oraz wykres ilorazu $-1/J(A)$, gdzie $J(A)$ jest funkcją opisującą [12, 14] idealnego przełącznika. Ponieważ linie te przecinają się, zatem z rysunku 6 wynika, że w rozważanym przypadku $\text{Im}[G_1(j\omega)]$



Rys. 6. Charakterystyka amplitudowo-fazowa $G_1(j\omega)$ i przebieg zależności $-1/J(A)$

ku układu z idealnym – tj. opisanym funkcją signum – elementem przełączającym zawsze będzie występować cykl graniczny. Inaczej mówiąc oznacza to, że w tym układzie **nieuniknione** jest występowanie drgań, czyli tzw. efektu chatteringu. Ponieważ z punktu widzenia elementów wykonawczych efekt ten jest zdecydowanie niekorzystny, więc w praktycznych układach nieciągły składnik sygnału sterującego, opisany równaniem (16), zwykle zastępuje się jego ciągłym przybliżeniem

$$u_d(t) = \frac{-1}{b} \begin{cases} \gamma \text{sgn}[\sigma(t)] & \text{dla } |\sigma(t)| \geq \varepsilon \\ K\sigma(t) & \text{dla } |\sigma(t)| \leq \varepsilon \end{cases} \quad (18)$$

gdzie K , γ i ε są dodatnimi stałymi spełniającymi równanie

$$K = \frac{\gamma}{\varepsilon} \quad (19)$$

Przybliżenie to odpowiada zastąpieniu funkcji signum występującej w zależności (16) funkcją z nasyceniem. Tak zaprojektowany regulator najczęściej nazywa się regulatorem z warstwą graniczną [13, 14, 15]. Szerokość tej warstwy wynosi 2ε , co oznacza, że jeżeli $|\sigma(t)| < \varepsilon$, to nieciągłe sterowanie opisane równaniem (16) zostaje zastąpione liniowym przybliżeniem. Zmniejszanie szerokości warstwy granicznej (przyjęcie mniejszej wartości parametru ε) powinno prowadzić do uzyskania lepszej jakości regulacji, ale z drugiej strony zwiększa niebezpieczeństwo wzbudzenia drgań w układzie. Zatem konieczne jest dokonanie właściwego kompromisu pomiędzy tymi dwoma tendencjami.

W pracy [2] pokazano, że w rozważanym tutaj przypadku obiektu z niewielkim opóźnieniem nachylenie liniowej części wykresu funkcji z nasyceniem musi spełniać nierówność

$$K < \frac{\pi}{2\tau} \quad (20)$$

aby w układzie nie powstawały oscylacje. Ponieważ w praktycznych układach regulacji oprócz czystego opóźnienia z reguły występują także inne efekty dynamiczne, które nie są uwzględniane w modelu (np. małe stałe czasowe), zatem zależność (20) należy traktować jako warunek konieczny, ale nie wystarczający do eliminacji chatteringu.

Podsumowanie

W artykule przedstawiono ideę sterowania o zmiennej strukturze z idealnym ruchem ślizgowym. Omówiono korzystne właściwości układów poruszających się takim ruchem, a następnie pokazano dlaczego w układach rzeczywistych możliwe jest uzyskanie tylko zbliżonych do idealnego trybu ślizgowego właściwości dynamicznych. Omówiono zjawisko chatteringu, wyjaśniono mechanizm jego powstawania i przedstawiono jeden z możliwych sposobów eliminacji.

LITERATURA

- [1] G. BARTOLINI, A. FERRARA, S. SPURGEON (pod redakcją): New trends in sliding mode control. Wydanie specjalne: *International Journal of Robust and Nonlinear Control* 1997, vol. 7, str. 297–427.
- [2] A. BARTOSZEWICZ.: On the effect of neglected time delays on the performance of the sliding mode control systems. VI International Symposium on Methods and Models in Automation and Robotics. Międzyzdroje 2000, str. 299–304.
- [3] A. BARTOSZEWICZ: Wpływ komputerowej realizacji regulatora na powstawanie zjawiska chatteringu w układach sterowania o zmiennej strukturze. Materiały V Konferencji Naukowo-Technicznej „Zastosowania Komputerów w Elektrotechnice”. Poznań 2000, vol. 2, str. 527–530.
- [4] S. BROCK, K. KWAŚNIEWSKI, K. ZAWIRSKI: Odporny regulator prędkości dla serwonapedu ze zmiennym momentem bezwładności. Materiały III Krajowej Konferencji Naukowej „Sterowanie w Energoelektronice i Napędzie Elektrycznym”. Łódź 1997, str. 55–60.
- [5] B. DRAŽENOVIĆ: The invariance conditions in variable structure systems. *Automatica* 1969, vol. 5, str. 287–295.
- [6] C. EDWARDS, S. SPURGEON: *Sliding Mode Control: Theory and Application*. Taylor & Francis, Londyn 1998.
- [7] S. W. EMELJANOW: Primenienije nelinejnych korektyruszczich ustrojstw tipa „klucz” dla uluczzenia kaczestwa system awtomatycznego regulirowanija wtorigo poriadka. *Awtomatika i Telemekhanika* 1959, vol. 20, str. 868–883.
- [8] S. W. EMELJANOW (pod redakcją): *Teorija system z pieremiennoj strukturoj*. Wydawnictwo „Nauka”, Moskwa 1970.
- [9] FILIPOV: Differential equations with discontinuous right hand-sides. *American Mathematical Society Translations* 1964, vol. 42, str. 199–231.
- [10] W. GAO (pod redakcją): Variable structure control. Sekcja specjalna w IEEE Transactions on Industrial Electronics 1993, vol. 40, str. 1–88.
- [11] R. GESSING: Sterowanie poślizgowe z adaptacją zmniejszającą efekt szarpania. *Zeszyty Naukowe Politechniki Śląskiej, Seria: Automatyka* 1998, vol. 123, str. 121–131.
- [12] T. KACZOREK: *Teoria sterowania. Tom II – Układy nieliniowe, procesy stochastyczne oraz optymalizacja statyczna i dynamiczna*. PWN, Warszawa 1981.
- [13] J. SLOTINE: Sliding controller design for non-linear systems. *International Journal of Control* 1984, vol. 40, str. 421–434.
- [14] J. SLOTINE, W. LI: *Applied Nonlinear Control*. Prentice-Hall International, Englewood Cliffs 1991.
- [15] J. SLOTINE, S. SASTRY: Tracking control of non-linear systems using sliding surfaces, with application to robot manipulators. *International Journal of Control* 1983, vol. 38, str. 465–492.
- [16] W. UTKIN: Ob urawnenijach skoljazuszczego režima w razrywnych systemach I. *Awtomatika i Telemekhanika* 1971, vol. 32 (nr 12), str. 42–54.
- [17] W. UTKIN: Ob urawnenijach skoljazuszczego režima w razrywnych systemach II. *Awtomatika i Telemekhanika* 1972, vol. 33 (nr 2), str. 51–61.
- [18] W. UTKIN: Skoljazuszczie režimy i ich primienienija w systemach z pieremiennoj strukturoj. Wydawnictwo „Nauka”, Moskwa 1974.
- [19] V. UTKIN: Variable structure systems with sliding modes. *IEEE Transactions on Automatic Control* 1977, vol. 22, str. 212–222.
- [20] W. UTKIN: Skoljazuszczie režimy w zadaczach optimizacji i uprawlenija. Wydawnictwo „Nauka”, Moskwa 1981; także V. UTKIN: *Sliding Modes in Control and Optimization*. Springer-Verlag, Berlin 1992.
- [21] V. UTKIN (pod redakcją): *Sliding mode control*. Wydanie specjalne *International Journal of Control* 1993, vol. 57, str. 1003–1259.
- [22] X. H. YU (pod redakcją): Adaptive learning and control using sliding models. Wydanie specjalne *Applied Mathematics and Computer Science* 1998, vol. 8, str. 5–197.
- [23] A. ZINOBER (pod redakcją): *Variable Structure and Lyapunov Control*. Springer-Verlag, Londyn 1994.