

**Krzysztof ARNOLD**

POLITECHNIKA POZNAŃSKA, WYDZIAŁ ELEKTRONIKI I TELEKOMUNIKACJI,  
ul. Polanka 3, 60-965 Poznań

## Przenoszenie średniej mocy sygnału przypadkowego w torze akwizycji danych z filtrem dolnoprzepustowym drugiego rzędu

Dr inż. Krzysztof ARNOLD

Absolwent Wydziału Elektroniki Politechniki Gdańskiej. Pracuje jako adiunkt w Katedrze Systemów Telekomunikacyjnych i Optoelektroniki na Wydziale Elektroniki i Telekomunikacji Politechniki Poznańskiej. W pracy naukowej zajmuje się problemami pomiarów charakterystyk i parametrów sygnałów stochastycznych, tematyką akwizycji danych w systemach pomiarowych oraz zagadnieniami projektowania, diagnostyki i rozwoju mikroprocesorowych systemów pomiarowych.

e-mail: karnold@et.put.poznan.pl



### Streszczenie

W pracy omówiono ograniczenia estymacji średniej mocy sygnałów losowych, związane z kształtem charakterystyk układów próbkująco-pamiętających i rozkładem energii sygnału w pomiarowym paśmie częstotliwości. Przedstawiono analizę zagadnienia straty informacji przy przejściu szumu białego przez tor przetwarzania a/c z filtrem dolnoprzepustowym drugiego rzędu. Wskazano korzyści zastosowania wyników przeprowadzonej analizy w systemach cyfrowych do pomiaru średniej mocy szumów.

**Słowa kluczowe:** sygnały przypadkowe, filtr dolnoprzepustowy drugiego rzędu, akwizycja danych.

### The mean power of the random signal transfer error in an A/D conversion path with a low-pass second-order filter

#### Abstract

In the paper a measurement error for the low-pass white noise mean power resulting from attenuation of high-frequency signal components at the stage of signal sampling is discussed. Changes of the power spectral density of a stochastic signal converted in the data acquisition path are described. Metrological analysis of the information loss during white noise transfer through the conversion path with a low-pass second-order filter, a sample-hold circuit and an analog-to-digital converter is presented. The mean power of the signal after previous filtration and the signal at the sample-hold amplifier output is calculated. The relationships concerning the estimation error, resulting from the ratio of the upper cut-off frequencies of the filter and sample-hold circuit are determined. Furthermore, the advantages resulting from possibility of applying the presented functions during design and data acquisition in digital systems for measurements of the noise mean power are pointed out.

**Keywords:** random signals, low-pass second-order filter, data acquisition.

### 1. Wstęp

Twierdzenie o próbkowaniu jednoznacznie określa możliwości odtworzenia kształtu sygnału na podstawie zbioru jego próbek. Estymacja średniej mocy sygnałów przypadkowych, wykorzystywana w badaniach przyrządów półprzewodnikowych [1], nie wymaga jednak spełnienia kryterium Nyquista i stosowania dolnoprzepustowej filtracji sygnału przed jego próbkowaniem. W teorii stwarza to obiecującą możliwość badania przebiegów losowych w rozszerzonym paśmie częstotliwości przy względnie wolnym ich próbkowaniu, a brak filtra antyaliasingowego w torze przetwarzania a/c bloków akwizycji danych sprzyja tak rozumianej korzystnej modyfikacji charakterystyki amplitudowej toru analogowego. Wiadomo jednak, że specyfikacja maksymalnej częstotliwości próbkowania dla pozbawionej filtra antyaliasingowego karty pomiarowej powinna zobowiązywać użytkownika do odpowiedniego ograniczenia widma częstotliwości badanych

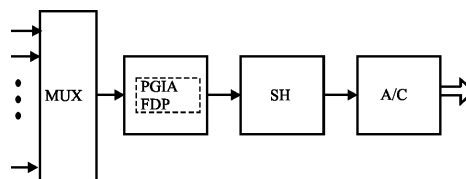
przebiegów [2, 3, 4]. W przeciwnym razie oszczędna konfiguracja toru przetwarzania a/c, typowa dla przytłaczającej większości stosowanych kart pomiarowych [5, 6], może stanowić potencjalne źródło znaczących błędów pomiaru.

Rozszerzenie pasma częstotliwości w pomiarach nie wymagających odtwarzania kształtu sygnału wymaga przyjmowania próbek szybkozmiennego przebiegu przez układ próbkująco-pamiętający SH i pamiętania wartości danej próbki w czasie konwersji a/c, wykonywanej przez odpowiednio dokładny przetwornik. Górną granicę pasma częstotliwości badanych sygnałów określają wówczas właściwości częstotliwościowe układów SH [7], współpracujących w systemach pomiarowych z kompensacyjnymi przetwornikami a/c lub zintegrowanych wraz z nimi w strukturach przetworników próbkujących.

Możliwość straty informacji przez układ próbkująco-pamiętający SH wynika z tłumienia wysokoczęstotliwościowych składowych widma próbkowanego sygnału i jest zależna od kształtu charakterystyki amplitudowej układu SH i rozkładu energii sygnału w pomiarowym paśmie częstotliwości. Wskazane jest zatem wstępne ograniczenie widma częstotliwości sygnału w takim stopniu, aby zapewnić prawidłowy przebieg operacji pobierania próbek. Znajomość modułu transmitancji i częstotliwości granicznej toru pomiarowego warunkuje ponadto określenie błędów przenoszenia, opisującego zmniejszenie zawartości informacyjnej ciągu próbek względem pierwowzoru. Analiza problemu jest bardzo istotna również w kontekście sytuacji, w której powszechnie wykorzystywane mikrokontrolery [8, 9] i mikrokonwertery [10] nie są wyposażone w filtr antyaliasingowy. Wiarygodność wyników przeprowadzanych pomiarów zależy wówczas od doświadczenia użytkownika i jego wstępnej wiedzy o widmie częstotliwościowym przetwarzanych sygnałów.

### 2. Charakterystyki amplitudowo - częstotliwościowe układów próbkująco - pamiętających

W najczęściej stosowanej konfiguracji bloku akwizycji danych badane sygnały wejściowe przekazywane są przez analogowy multiplexer MUX do układu kondycjonowania sygnałów, poprzedzającego wzmacniacz SH i przetwornik a/c (rys. 1).



Rys. 1. Schemat funkcjonalny bloku akwizycji danych  
Fig. 1. Functional diagram of the data acquisition path

Układy formujące sygnał zwykle nie są wyposażone w kosztowny filtr antyaliasingowy FDP, zawierają natomiast wzmacniacz o regulowanym wzmocnieniu PGIA [5, 6]. W takich okolicznościach o właściwościach częstotliwościowych toru pomiarowego decydują charakterystyki wzmacniaczy PGIA (ang. programmable gain instrumentation amplifier) oraz charakterystyki przenoszenia i czasy akwizycji układów próbkująco-pamiętających SH [2, 3, 7, 11].

Charakterystyki częstotliwościowe układów SH są zależne od parametrów wewnętrznego układu ładowania kondensatora pamięciowego  $C_H$ . Model takiego układu odpowiada analitycznemu opisowi filtra dolnoprzepustowego o stałej czasowej  $RC_H$ , a zatem

charakterystyki układów SH w fazie próbkowania można przedstawić w postaci wzoru:

$$K_s(j\omega) = \frac{1}{1 + j\omega RC_H} \quad (1)$$

przy czym rezystancja  $R$  jest sumą rezystancji wyjściowej wzmacniacza sterującego, odpowiedzialnego w układzie SH za ładowanie kondensatora  $C_H$ , oraz rezystancji klucza analogowego w stanie włączenia.

W kontekście opisu charakterystyki (1) przyjmowanie próbek jest więc operacją wykonywaną jednocześnie z dolnoprzepustową filtracją sygnału na poziomie układu SH [7]. Znajomość kształtu funkcji (1), reprezentującej filtracyjne właściwości układu próbkująco-pamiętającego, pozwala na podjęcie próby oszacowania straty informacji na tym etapie przetwarzania sygnału.

### 3. Średnia moc sygnału na wejściu i wyjściu układu SH

Do najczęściej wykorzystywanych matematycznych modeli sygnałów przypadkowych należą analityczne opisy szumu białego i dolnopasmowego szumu białego [1]. Mają one równomierny rozkład gęstości widmowej mocy odpowiednio w nieograniczonym i ograniczonym od góry paśmie częstotliwości. Właściwość ta ułatwia ocenę charakterystyk częstotliwościowych badanych układów, przy podawaniu sygnału wymuszającego na wejście i porównaniu odpowiedzi z pobudzeniem. Ponadto analiza metrologiczna przeprowadzana z wykorzystaniem funkcji gęstości widmowej mocy szumu białego lub dolnopasmowego szumu białego pozwala zazwyczaj na uzyskanie czytelnych i przydatnych dla wnioskowania wyników. Z tego względu dla potrzeb analizy toru analogowego z filtrem dolnoprzepustowym drugiego rzędu i układem SH przyjęto wymuszenie opisane funkcją gęstości widmowej mocy szumu białego [1]:

$$G_n(f) = a \quad 0 \leq f \leq \infty \quad (2)$$

Kaskadowe połączenie filtra dolnoprzepustowego drugiego rzędu o transmitancji  $H(f)$ , układu SH i przetwornika a/c w torze pomiarowym (rys.2) sprawia, że na wejściu układu SH pojawia się sygnał o gęstości widmowej mocy:

$$G_x(f) = G_n(f) \cdot |H(f)|^2 \quad (3)$$

Średnia moc szumu na wejściu układu SH wynosi zatem:

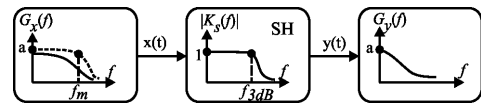
$$\Psi_x^2 = \int_0^{\infty} G_n(f) \cdot |H(f)|^2 df \quad (4)$$

Sygnał przekazywany na wejście układu SH jest ograniczony do pasma częstotliwości, które wyznacza filtr dolnoprzepustowy drugiego rzędu (rys.2). Rezygnacja z informacji, zawartej w wysokoczęstotliwościowych składowych widma badanego sygnału, zwiększa w zamian wiarygodność operacji pobierania próbek. Można przy tym przyjąć, że częstotliwość graniczna  $f_m$  filtra określa pasmo pomiarowe, a zmniejszenie średniej mocy sygnału po jego przejściu przez układ SH jest miarą straty informacji na tym etapie przetwarzania. Nie należy natomiast traktować zmniejszenia zawartości informacyjnej sygnału, mającej miejsce podczas jego przejścia przez wstępny filtr dolnoprzepustowy o znanej częstotliwości granicznej, w kategoriach błędów pomiaru.

Gęstość widmowa mocy sygnału przypadkowego na wyjściu układu SH o transmitancji  $K_s(f)$  jest dana w postaci:

$$G_y(f) = G_n(f) \cdot |H(f)|^2 \cdot |K_s(f)|^2 \quad (5)$$

Zależność (5) odpowiada opisowi układu próbkująco-pamiętającego w fazie próbkowania, a tym samym nie ujmuje przejść pomiędzy fazami próbkowania i pamiętania oraz schodkowego charakteru przebiegu na wyjściu układu SH. Przyjęcie przybliżonego opisu gęstości widmowej mocy (5) pozwala jednak na znaczne ułatwienie dalszego postępowania.



Rys. 2. Ilustracja charakterystyk gęstości widmowej mocy przy przenoszeniu szumu białego przez filtr dolnoprzepustowy i układ SH

Fig. 2. Illustration of the power spectral density characteristics for white noise transfer through a low-pass filter and an SH circuit

Średnia moc szumu na wyjściu układu SH wynosi:

$$\Psi_y^2 = \int_0^{\infty} G_n(f) \cdot |H(f)|^2 \cdot |K_s(f)|^2 df \quad (6)$$

Różnica pomiędzy średnimi mocami sygnałów na wyjściu i wejściu układu SH określa stratę informacji i odpowiada błędowi bezwzględnemu, a błąd względny przenoszenia mocy sygnału na etapie jego próbkowania można wyrazić jako:

$$\delta = \frac{\Psi_y^2 - \Psi_x^2}{\Psi_x^2} \quad (7)$$

Aby obliczyć wartość błędu przenoszenia, należy rozwinąć wyrażenie (7) wykorzystując analityczne opisy średnich mocy sygnałów na wejściu i wyjściu układu SH, dane w postaci wzorów całkowych (4) i (6), oraz opisy transmitancji filtra dolnoprzepustowego drugiego rzędu i układu SH w fazie próbkowania.

### 4. Analiza błędu przenoszenia

Moduł transmitancji pasywnego dolnoprzepustowego filtra RC drugiego rzędu o częstotliwości granicznej  $f_m$  można opisać przy pomocy funkcji:

$$|H(f)| = \frac{1}{1 + \left(\frac{f}{f_m}\right)^2} \quad (8)$$

Dolnoprzepustowy filtr wstępny tłumi wysokoczęstotliwościowe składowe sygnału i zmienia rozkład jego energii na wejściu układu próbkująco-pamiętającego do postaci (3). Z zależności (3), (4) i (8) wynika, że średnia moc sygnału przypadkowego na wejściu układu SH:

$$\Psi_x^2 = a \cdot \int_0^{\infty} \frac{df}{\left[1 + \left(\frac{f}{f_m}\right)^2\right]^2} \quad (9)$$

Na podstawie równania (9) można wykazać, że średnia moc sygnału na wyjściu dolnoprzepustowego filtra RC drugiego rzędu i wejściu układu SH, po podaniu szumu białego na wejście filtra, wyraża się wzorem:

$$\Psi_x^2 = \frac{\pi a}{4} \cdot f_m \quad (10)$$

Charakterystyka amplitudowa układu SH, o częstotliwości granicznej  $f_{3dB}$ , odpowiada opisowi:

$$|K_s(f)| = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{f}{f_{3dB}}\right)^2}} \quad (11)$$

Po podstawieniu zależności (2), (8) i ((11) do równania (6) uzyskuje się:

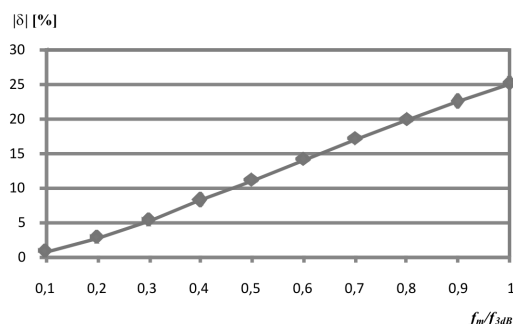
$$\Psi_y^2 = a \cdot \int_0^{\infty} \frac{df}{\left[1 + \left(\frac{f}{f_m}\right)^2\right]^2 \cdot \left[1 + \left(\frac{f}{f_{3dB}}\right)^2\right]} \quad (12)$$

Obliczenie całki (12) wymaga rozkładu funkcji podcałkowej na ułamki proste. Wyznaczenie współczynników tego rozkładu pozwala na przekształcenie wyrażenia (12) w sumę wyrażen całkowitych, a średnią moc sygnału przypadkowego na wyjściu układu SH można ostatecznie przedstawić w postaci:

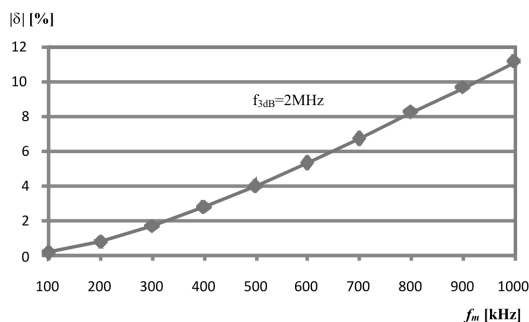
$$\Psi_y^2 = \frac{\pi a}{4} \cdot \frac{f_{3dB} f_m}{f_{3dB} + f_m} \left(1 + \frac{f_m}{f_{3dB} + f_m}\right) \quad (13)$$

Z zależności (7), (10) i (13) wynika, że względny błąd przenoszenia średniej mocy rozważanego sygnału losowego wynosi:

$$\delta = \frac{-f_m^2}{(f_{3dB} + f_m)^2} \quad (14)$$



Rys. 3. Charakterystyka błędu przenoszenia średniej mocy dolnopasmowego szumu białego dla dolnoprzepustowego filtra drugiego rzędu i układu SH  
Fig. 3. The mean power transfer error characteristic of low-pass white noise for second-order low-pass filter and SH circuit



Rys. 4. Błąd przenoszenia średniej mocy dolnopasmowego szumu białego w funkcji częstotliwości granicznej dolnoprzepustowego filtra drugiego rzędu  
Fig. 4. The mean power transfer error characteristic of low-pass white noise as a function of cut-off frequency of second-order low-pass filter

Dla statystycznych skutecznych błędów estymacji średniej mocy szumów, przyjmowanych przykładowo na poziomie 10%, wyrażenie (14) określa równoważny błąd przenoszenia, popełniany podczas akwizycji próbek sygnału przez układ SH, dla relacji  $f_m/f_{3dB} = 0,5$  (rys.3). Aby nie popełniać większych błędów, układ SH o częstotliwości  $f_{3dB} = 2\text{MHz}$  powinien współpracować z filtrem dolnoprzepustowym drugiego rzędu o częstotliwości granicznej  $f_m = 900\text{ kHz}$  (rys. 4).

## 5. Podsumowanie

Zadaniem wstępnego filtra dolnoprzepustowego jest ograniczenie częstotliwości toru pomiarowego w taki sposób, aby zapewnić możliwość akwizycji próbek możliwie szerokopasmowych sygnałów, przy jednoczesnej kontroli błędu przenoszenia, powstającego w wyniku straty informacji na etapie próbkowania sygnału przez układ SH. Na podstawie analizy funkcji błędu dla filtra idealnego i dolnoprzepustowych filtrów pierwszego i drugiego rzędu można wykazać, że jakość próbkowania sygnału i perspektywa rozszerzenia pasma pomiarowego zależą od nachylenia charakterystyki amplitudowej filtra w obszarze odcięcia. Przedstawiona analiza metrologiczna dotyczy współpracy układu próbkującego-pamiętającego SH z filtrem dolnoprzepustowym drugiego rzędu, a uzyskane wyniki mieszczą się, zgodnie z przewidywaniami, pomiędzy hipotetycznym przypadkiem filtra idealnego, a wariantem najprostszej dolnoprzepustowej filtracji RC.

Prezentowana funkcja błędu pozwala na czytelne powiązanie głębokości wnikanie szumu w pasmo analogowe układów SH z wartością błędu przenoszenia. Z otrzymanej charakterystyki wynika, że dla zachowania błędu mniejszego niż 10% powinien być spełniony warunek  $f_m/f_{3dB} < 0,5$ . W przypadku dążenia do błędu poniżej poziomu 5% należy natomiast zapewnić stosunek częstotliwości granicznych  $f_m/f_{3dB} < 0,3$ .

W obu przypadkach, dzięki wstępnej filtracji sygnału, możliwa jest praca układu SH już w obszarze zauważalnego spadku jego charakterystyki amplitudowej, przy błędach przenoszenia nie przekraczających dopuszczalnych statystycznych błędów estymacji. Warto przy tym podkreślić, że otrzymane analityczne opisy błędów przenoszenia w istotny sposób ułatwiają projektowanie bloku akwizycji danych w systemach cyfrowych, przeznaczonych do pomiaru średniej mocy sygnałów losowych, a także zapewniają możliwość oceny i poprawy właściwości takich systemów na poziomie akwizycji próbek sygnału.

## 6. Literatura

- [1] Hasse L., Spiralski L.: Szumy elementów i układów elektronicznych. Warszawa, WNT 1981.
- [2] Kulka Z., Libura A., Nadachowski M.: Przetworniki analogowo-cyfrowe i cyfrowo-analogowe. WKiŁ, Warszawa 1987.
- [3] Van de Plassche R.J.: Scalone przetworniki analogowo-cyfrowe i cyfrowo-analogowe. WKiŁ, Warszawa 1997.
- [4] Smith S.: Cyfrowe przetwarzanie sygnałów, BTC, Warszawa 2007.
- [5] National Instruments. Measurement on Automation. Catalog 2003.
- [6] 6023E/6024E/6025E User Manual. National Instruments 2000.
- [7] Arnold K.: Aproksymacja efektywnego pasma przenoszenia układów SH w systemach pomiarowych. Pomiary. Automatyka. Robotyka, nr 7-8/2004, s.179-182.
- [8] ATmega16A. 8-bit AVR Microcontroller with 16K Bytes In-System Programmable Flash. Atmel Corporation 2009.
- [9] ATmega128A. 8-bit AVR Microcontroller with 128K Bytes In-System Programmable Flash. Atmel Corporation 2011.
- [10] MicroConverter, Multichannel 12-bit ADC with Embedded FLASH MCU. Analog Devices 2001.
- [11] Jung W.: Applying IC Sample-Hold Amplifiers. Analog Devices. Applications Reference Manual 1993, pp 18.3-18.10.