Eligiusz PAWŁOWSKI

POLITECHNIKA LUBELSKA, ul. Nadbystrzycka 38A, 20-618 Lublin

Rozdzielczość toru pomiarowego z równomiernym próbkowaniem sygnału częstotliwościowego

Dr inż. Eligiusz PAWŁOWSKI

Studia na Wydziale Elektrycznym Politechniki Lubelskiej ukończył w roku 1982, a stopień doktora nauk technicznych uzyskał w roku 1994. Obecnie zatrudniony na stanowisku adiunkta w Katedrze Automatyki i Metrologii na Wydziale Elektrotechniki i Informatyki Politechniki Lubelskiej. Jego zainteresowania naukowe to pomiary czasu i częstotliwości oraz systemy pomiarowe z częstotliwościowym nośnikiem informacji. Autor lub współautor ponad 60 publikacji.



e-mail: e.pawlowski@pollub.pl

Streszczenie

W pracy przedstawia się problematykę równomiernego próbkowania sygnału częstotliwościowego w systemie pomiarowym, w którym chwilowe wartości częstotliwości reprezentują chwilowe wartości przetwarzanej wielkości, a czas pomiędzy próbkami zależy od aktualnej wartości sygnału wejściowego. Taki sygnał można analizować za pomocą prezentowanego algorytmu resamplingu z wielomianową aproksymacją fazy sygnału impulsowego, a jakość przetwarzania ocenić efektywną liczbą bitów. Prezentuje się wybrane wyniki badań.

Słowa kluczowe: sygnał częstotliwościowy, częstotliwość chwilowa, próbkowanie nierównomierne, równomierny resampling.

Resolution of a measurement chain with uniform sampling of the frequency signal

Abstract

This paper focuses on issues relating to the extraction of a uniform sampled frequency signal from irregularly spaced samples. In the measurement system with a frequency output sensor instantaneous frequency values represent instantaneous values of the processed quantity and the time between samples depends on the current value of the input signal. This non-uniformly sampled signal can be analyzed by the discussed resampling algorithm with polynomial interpolation of the pulse signal phase. In this case, a convenient parameter for assessing the processing quality of such a measurement chain is the effective number of bits. The presented algorithm can be applied in all the cases when the pulse signal frequency carries information about instantaneous values of a physical quantity processed in the system. This allows testing various digital processing algorithms of frequency signals and assessing the errors introduced by them. The selected test results are also presented in the paper.

Keywords: frequency signal, instantaneous frequency, nonuniform sampling, uniform resampling.

1. Wprowadzenie

Współczesne cyfrowe przetwarzanie sygnałów skupia się na sygnałach zdefiniowanych w sposób regularny i deterministyczny, tzn. równomiernie próbkowanych w czasie oraz równomiernie kwantowanych w poziomie, ze zdeterminowanymi chwilami próbkowania i przedziałami kwantowania. Przetwarzany sygnał analogowy jest reprezentowany przez cyfrowe próbki pobrane w równych odstępach czasu i skwantowane w układzie kwantyzatora posiadającego równe sobie wszystkie przedziały kwantowania. W systemach praktycznie realizowalnych założenie o próbkowaniu równomiernym w czasie i kwantowaniu równomiernym w poziomie może być zrealizowane tylko z pewnym przybliżeniem [1], zawsze bowiem występuje pewne drżenie fazy impulsów wyznaczających chwile pobierania próbek (jitter) oraz szum modyfikujący poziomy kwantowania (dither). Zjawiska te są rozpatrywane jako zakłócenia w procesie próbkowania i kwantowania skutkujące błędami przetwarzania lub też świadomie są wykorzystywane do randomizowania procesu próbkowania i kwantowania [2], co pozwala uzyskać korzystne efekty w postaci ograniczenia zjawiska aliasingu i zmniejszenia szumów kwantowania [3]. Szczególnym jednak przypadkiem jest cyfrowe przetwarzanie impulsowego sygnału częstotliwościowego, którego specyficzne właściwości powodują, że nie jest możliwe bezpośrednie uzyskanie jego wartości chwilowych rozmieszczonych równomiernie w czasie, co wymaga zastosowania operacji równomiernego resamplingu.

2. Próbkowanie i kwantowanie sygnału częstotliwościowego

Próbkowanie i kwantowanie mogą być wykonywane kolejno po sobie lub jednocześnie w jednym układzie [4]. W praktyce przeprowadza się próbkowanie wartości chwilowych sygnału lub próbkowanie całkujące. W systemie pomiarowym z sygnałem częstotliwościowym próbkowanie i kwantowanie realizowane są jednocześnie, przy czym w praktyce niemożliwe jest próbkowanie wartości chwilowych, gdyż cyfrowy pomiar częstotliwości zawsze dostarcza wynik uśredniony za czas trwania pomiaru.

Schemat blokowy rozpatrywanego toru pomiarowego przedstawiono na rysunku 1. Przetwornik X/F przetwarza zmienną w czasie wielkość wejściową x(t) na sygnał wyjściowy, który można rozpatrywać zarówno jako zmienny w czasie, okresowy sygnał postaci y(t) oraz jako zmienną w czasie częstotliwość f(t)proporcjonalną do wielkości wejściowej x(t) i określoną za pomocą pochodnej fazy φ sygnału y(t) względem czasu t:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \frac{d\varphi}{dt}.$$
 (1)



 Rys. 1.
 Schemat blokowy toru pomiarowego z sygnałem częstotliwościowym

 Fig. 1.
 Block diagram of the measurement chain with a frequency signal

Kształt sygnału wyjściowego przetwornika opisany funkcją y(t)może być różny, najczęściej jednak stosowany jest sygnał impulsowy, rozpatrywany jako ciąg impulsów δ Diraca przedstawionych na rysunku 2, pojawiających się w chwilach t_i odległych od siebie o czasy T_i , odpowiadające kolejnym, jednakowym przyrostom fazy sygnału $\Delta \varphi$ równym 2π [5]:

$$y(t) = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} \delta(t - t_i), \ t_i - t_{i-1} = T_i.$$
 (2)



Rys. 2.Impulsowy sygnał częstotliwościowyFig. 2.Pulse frequency signal

Dla sygnałów impulsowych (2) nie jest możliwe wyznaczenie częstotliwości na podstawie pochodnej (1), którą należy zastąpić stosunkiem przyrostu fazy $\Delta \varphi$ do przyrostu czasu Δt :

$$f = \frac{1}{2\pi} \frac{\Delta \varphi}{\Delta t}.$$
 (3)

Pojawienie się kolejnego impulsu w chwili t_i oznacza przyrost fazy sygnału $\Delta \varphi$ o kąt 2π w stosunku do impulsu, który wystąpił w chwili t_{i-1} , W bloku F/D (rys.1) realizującym próbkowanie i kwantowanie sygnału częstotliwościowego f(t) kolejne przedziały czasu T_i wypełniane są impulsami T_w o częstotliwości wzorcowej f_w , co umożliwia wyznaczenie kolejnych próbek częstotliwości f_i :

$$f_i = \frac{1}{2\pi} \frac{2\pi}{T_i} = \frac{1}{T_i} = \frac{1}{K_i T_w} = \frac{f_w}{K_i}.$$
 (4)

Na podstawie kolejnych wartości K_i w bloku cyfrowego przetwarzania C/C (rys.1) obliczane są próbki x_i^* sygnału wejściowego. Problematykę przetwarzania sygnału częstotliwościowego w rozpatrywanym torze pomiarowym można wygodnie analizować symulując numerycznie sygnał wyjściowy czujnika o zadanych parametrach [5]. Dla przykładu, w tabeli 1 i na rysunku 3 przedstawiono wyniki symulacji sygnału o liniowo narastającej częstotliwości f(t)=t+1. Uwzględniając (1), faza tego sygnału zmienia się parabolicznie $\varphi(t)=2\pi(1/2t^2+t)$. Rozwiązanie tego równania dla fazy φ_i równej kolejnym wielokrotnościom kąta 2π wyznacza chwile t_i kolejnych impulsów, czasy T_i pomiędzy nimi oraz częstotliwości f_i (4). Wartości f_i będące wartościami średnimi za czasy T_i są równe wartościom chwilowym f(t) w chwilach t_i^* leżących pomiędzy t_{i-1} oraz t_i . Przedstawiono pięć pierwszych impulsów od chwili $t_0=0$.

 Tab. 1.
 Wartości chwilowe impulsowego sygnału częstotliwościowego

 Tab. 1.
 Instantaneous values of the pulse frequency signal

lp	φ	t_i	T_i	f_i	t_i^*
-	rad	s	s	Hz	s
0	0	0,00000	-	-	-
1	2π	0,73205	0,73205	1,36603	0,36603
2	4π	1,23607	0,50402	1,98406	0,98406
3	6π	1,64575	0,40968	2,44091	1,44091
4	8π	2,00000	0,35425	2,82288	1,82288



 Rys. 3.
 Przebiegi czasowe sygnałów w czujniku z wyjściem częstotliwościowym

 Fig. 3.
 Timing chart of signals in the sensor with a frequency output

Analizując uzyskane przebiegi (rys.3) należy stwierdzić, że wartości częstotliwości f_i uzyskiwane są w chwilach t_i rozmieszczonych nierównomiernie w czasie. Poza tym wartości f_i nie są wartościami chwilowymi, lecz uśrednionymi za czasy T_i , więc dla nieznanej postaci zmienności f(t) nie jest wiadome którym chwilom czasowym t_i^* można w uzasadniony sposób przypisać wartości f_i . Trudno jest więc odtworzyć rzeczywisty przebieg x(t) tylko na podstawie wartości K_i , ponieważ nie jest dokładnie znane położenie punktów (t_i^* , f_i), które umożliwiły by aproksymację zależności f(t). Sygnał częstotliwościowy ma jednak dodatkową cenną właściwość: niezależnie od postaci f(t) impulsy pojawiają się zawsze dokładnie w chwilach t_i w których faza φ sygnału przyrasta o kąt 2π , a więc punkty (t_i , $2i\pi$) pozwalają jednoznacznie aproksymować przebieg chwilowej fazy sygnału $\varphi(t)$, a po zróżniczkowaniu (1) także przebieg chwilowej czestotliwości f(t).

Równomierny resampling sygnału częstotliwościowego

Resampling dostarcza równomiernie rozmieszczonych w czasie próbek wartości chwilowych sygnału pierwotnie spróbkowanego nierównomiernie i wymaga aproksymacji sygnału w przedziałach pomiędzy jego znanymi wartościami. Jak wykazano, dla sygnału częstotliwościowego zasadne jest aproksymowanie przebiegu chwilowych wartości fazy $\varphi(t)$ sygnału i po zróżniczkowaniu (1) odtworzenie chwilowych wartości częstotliwości f(t).

Dla sygnałów wolnozmiennych często wystarczające jest przyjęcie założenia, że częstotliwość f(t) ma stałą wartość pomiędzy kolejnymi impulsami. Mając na uwadze zależności (1), faza sygnału $\varphi(t)$ powinna być aproksymowana w tym przedziale linią prostą. Sposób postępowania przedstawiono na rysunku 4.



Rys. 4. Aproksymacja fazy sygnału częstotliwościowego wielomianem pierwszego stopnia

Fig. 4. First order polynomial approximation of the frequency signal phase

Dwa punkty A, B wyznaczają linię prostą $\varphi(t)=a_0+a_1t$ aproksymującą fazę sygnału w przedziale czasu (t_{i-1}, t_i) , w którym wystąpił przyrost fazy sygnału $\Delta \varphi=2\pi$. Dla uproszczenia analizy punkt A umieszczono w początku układu współrzędnych. Po prostych przekształceniach obliczymy $a_0=0$ oraz $a_1=2\pi/T_i$, a następnie uwzględniając (1) po wyznaczeniu pochodnej otrzymamy $f(t)=f_i=1/T_i$ dla $t \in (t_{i-1}, t_i)$. Postępując analogicznie dla kolejnych przedziałów międzyimpulsowych uzyskamy linię schodkową aproksymującą przebieg f(t) zgodnie z przyjętymi na wstępie założeniami, co pozwoli wyznaczyć próbki f_k^R wartości częstotliwości w chwilach $t_k^R=kT_R$ równomiernie rozmieszczonych w czasie z okresem T_R próbkowania równomiernego (resamplingu):

$$f_{k}^{R} = f(t_{k}^{R}) = f(kT_{R}) = \frac{1}{T_{i}}, \ t_{k}^{R} \in (t_{i-1}, t_{i}).$$
(5)

Zakładając liniową zmianę częstotliwości w funkcji czasu f(t) należy aproksymować przebieg fazy sygnału $\varphi(t)$ wielomianem drugiego stopnia (6), co wymaga ustalenia współrzędnych trzech punktów A, B, C przedstawionych na rysunku 5.

$$\varphi(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 \,. \tag{6}$$



Rys. 5. Aproksymacja fazy sygnału wielomianem drugiego stopnia Fig. 5. Second order polynomial approximation of the signal phase

Punkty A, B, C odpowiadają przyrostom fazy $\varphi(t)$ sygnału o kolejne wielokrotności 2π w chwilach t_{i-1} , t_i , t_{i+1} określających położenie trzech kolejnych impulsów sygnału y(t), odległych od siebie o czasy T_i i T_{i+1} . Umieszczając punkt A w początku układu współrzędnych, punkty (0, 0), (T_i , 2π), (T_i + T_{i+1} , 4π) umożliwią ułożenie układu trzech równań z trzema niewiadomymi a_0 , a_1 , a_2 :

$$\begin{cases} 0 = a_0 + a_1 0 + a_2 0^2 \\ 2\pi = a_0 + a_1 T_i + a_2 T_i^2 \\ 4\pi = a_0 + a_1 (T_i + T_{i+1}) + a_2 (T_i + T_{i+1})^2 \end{cases}$$
(7)

Ponieważ $a_0=0$ układ (7) upraszcza się do dwóch równań, którego rozwiązanie umożliwia aproksymację fazy sygnału $\varphi(t)$:

$$\varphi(t) = \frac{2\pi}{T_i + T_{i+1}} \left[\left(\frac{T_{i+1}}{T_i} - \frac{T_i}{T_{i+1}} + 2 \right) t + \left(\frac{1}{T_{i+1}} - \frac{1}{T_i} \right) t^2 \right].$$
(8)

Podstawiając do równania (8) odpowiednie wartości otrzymamy: $\varphi(0)=0$, $\varphi(T_i)=2\pi$, $\varphi(T_i+T_{i+1})=4\pi$, co potwierdza jego poprawność. Po obliczeniu pochodnej prawej strony równania (8), otrzymamy wielomian aproksymujący częstotliwość chwilową f(t) (1) sygnału y(t) w przedziale czasu (t_{i-1}, t_{i+1}) , na podstawie dwóch sąsiednich czasów międzyimpulsowych T_i , T_{i+1} :

$$f(t) = \frac{1}{T_i + T_{i+1}} \left[\frac{T_{i+1}}{T_i} - \frac{T_i}{T_{i+1}} + 2 + 2\left(\frac{1}{T_{i+1}} - \frac{1}{T_i}\right) t \right].$$
(9)

Zależność (9) umożliwia równomierny resampling sygnału częstotliwościowego poprzez pobranie wartości f_k^R w chwilach $t_k = kT_R$ równo odległych o okres próbkowania równomiernego T_R :

$$f_k^R = f(t_k^R) = f(kT_R), \ t_k^R \in (t_{i-1}, t_{i+1}).$$
(10)

Podstawiając do (10) $T_{i+1}=T_i$ otrzymamy $f(t)=1/T_i=const.$, co oznacza stałą częstotliwość impulsów równoodległych od siebie w przedziale czasu (t_{i-1} , t_{i+1}). Dla $T_{i+1}\neq T_i$ równanie umożliwia natomiast wyznaczenie chwili czasowej t_i^* , dla której $f(t_i^*)=1/T_i$, tzn. dla której wartość chwilowa częstotliwości jest równa wartości średniej obliczonej jako odwrotność czasu T_i (rys.5):

$$f_i^* = f\left(t_i^* = t_{i-1} + \frac{T_i}{2}\right) = \frac{1}{T_i} .$$
 (11)

Analogicznie:

$$f_{i+1}^* = f\left(t_{i+1}^* = t_{i-1} + T_i + \frac{T_{i+1}}{2}\right) = \frac{1}{T_{i+1}} \quad (12)$$

Dla liniowej zmiany częstotliwości jej wartość średnia f_i^* , wyznaczona jako odwrotność czasu międzyimpulsowego T_i , jest więc równa wartości chwilowej częstotliwości w połowie tego przedziału czasu. Uzasadnione jest więc aproksymowanie w przedziale czasu od chwili $t_i^*=t_{i-1}+T_i/2$ do chwili $t_{i+1}^*=t_i+T_{i+1}/2$ (rys.6), dla których częstotliwość chwilowa przyjmuje odpowiednio wartości $f_i^*=1/T_i$ oraz $f_{i+1}^*=1/T_{i+1}$. Kolejne punkty t_i^*, f_i^* :

$$f_i^* = \frac{1}{T_i}$$
(13)
$$t_i^* = t_{i-1} + \frac{1}{2}T_i = \sum_{i=1}^{i-1} T_i + \frac{1}{2}T_i$$

wyznaczają kolejne odcinki linii łamanej, umożliwiającej równomierny resampling sygnału częstotliwościowego poprzez pobranie wartości częstotliwości f_k^R w chwilach $t_k = kT_R$ równo odległych w czasie o okres próbkowania równomiernego T_R :

$$f_{k}^{R} = f(t_{k}^{R}) = \frac{(t_{k}^{R} - t_{i}^{*})f_{i+1}^{*} + (t_{i+1}^{*} - t_{k}^{R})f_{i}^{*}}{t_{i+1}^{*} - t_{i}^{*}}$$

$$t_{k}^{R} = kT_{R}, t_{k}^{R} \in (t_{i}^{*}, t_{i+1}^{*})$$
(14)



 Rys. 6.
 Aproksymacja częstotliwości chwilowej wielomianem pierwszego stopnia

 Fig. 6.
 First order polynomial approximation of the instantaneous frequency

Uogólniając, na podstawie n+1 kolejnych wartości t_i , dla których faza sygnału $\varphi(t)$ osiąga kolejne wielokrotności 2π :

$$\forall_{=0,1,2,\dots,n} \varphi(t_i) = 2i\pi , t_i = t_0 + \sum_{j=1}^{i} T_j$$
 (15)

możemy ją aproksymować wielomianem n-tego stopnia:

$$\varphi(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \dots + a_n t^n = \sum_{j=0}^n a_j t^j \quad . \tag{16}$$

Przyjmując $t_0=0$ oraz $\varphi(t_0)=0$ otrzymamy $a_0=0$, co umożliwia ułożenie *n* równań z *n* niewiadomymi:

$$\begin{cases} a_{1}t_{1} + a_{2}t_{1}^{2} + \dots + a_{n}t_{1}^{n} = 2\pi \\ a_{1}t_{2} + a_{2}t_{2}^{2} + \dots + a_{n}t_{2}^{n} = 4\pi \\ \vdots \\ a_{1}t_{n} + a_{2}t_{n}^{2} + \dots + a_{n}t_{n}^{n} = 2n\pi \end{cases}$$
(17)

które zapisując macierzowo :

$$\begin{bmatrix} t_1 & t_1^2 & \cdots & t_1^n \\ t_2 & t_2^2 & \cdots & t_2^n \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ t_n & t_n^2 & \cdots & t_n^2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\pi \\ 4\pi \\ \vdots \\ 2n\pi \end{bmatrix}$$
(18)

możemy przedstawić w prostszej postaci:

$$\mathbf{T} \mathbf{A} = \mathbf{\Pi} \quad . \tag{19}$$

Rozwiązując układ równań (19) otrzymamy macierz A:

$$\mathbf{A} = \mathbf{T}^{-1} \mathbf{\Pi} \tag{20}$$

współczynników wielomianu (16) aproksymującego fazę $\varphi(t)$. Po zróżniczkowaniu (16) oraz uwzględniając (1) otrzymamy wielomian aproksymujący chwilową częstotliwość f(t):

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \frac{d\varphi}{dt} = \frac{1}{2\pi} \sum_{j=1}^{n} j a_j t^{j-1} .$$
 (21)

4. Symulacyjne określanie efektywnej liczby bitów toru pomiarowego

Wygodnym parametrem do oceny jakości przetwarzania w torze pomiarowym jest efektywna liczba bitów ENOB [6]. Dla sygnału częstotliwościowego można ją wyznaczyć metodą symulacji numerycznej [7]. W tym celu należy wygenerować ciąg wartości czasów międzyimpulsowych T_i , reprezentujących sygnał wyjściowy czujnika X/F (rys.1) przetwarzającego sygnał wejściowy x(t) w postaci przebiegu sinusoidalnego. W celu oceny przedstawionego algorytmu resamplingu zasymulowano sygnał wyjściowy przetwornika inkrementalnego generującego 500 impulsów na jeden obrót wału, sprzęgniętego z maszyną wirującą z prędkością obrotową ω zmieniającą się według zależności: $\omega(t) = \omega_0 + \Omega \sin(\omega_1 t)$ i następnie aproksymując fazę sygnału wielomianem drugiego stopnia (8) wyznaczono wartości chwilowe rozmieszczone równomiernie w czasie (14) [7]. Na rysunku 7 przedstawiono przykładowe wartości sygnału $\omega(t)$ dla $\omega_0=50$ rad/s, Ω =30 rad/s, ω_1 =400 π rad/s oraz wynik jego resamplingu $\omega^{R}(t)$ z okresem $T_{R}=250 \mu s$.



 Rys. 7.
 Sygnał wyjściowy z przetwornika inkrementalnego i jego resampling

 Fig. 7.
 Incremental encoder output signal and its resampling

Powtarzając symulację dla różnych wartości parametrów ω_0 , Ω , ω_1 , można zbadać ich wpływ na uzyskiwaną w torze pomiarowym efektywną liczbę bitów, co przedstawiono na rysunku 8.



 Rys. 8. Efektywna liczba bitów w torze pomiarowym z równomiernym próbkowaniem sygnału częstotliwościowego
 Fig. 8. Effective numbers of bits in the measurement chain with uniform

Fig. 8. Effective numbers of bits in the measurement chain with uniform sampling of a frequency signal

Analizując uzyskane zależności (rys.8) należy zauważyć, że w rozpatrywanym torze pomiarowym z sygnałem częstotliwościowym (rys.1) występuje wyraźna zależność efektywnej rozdzielczości od stosunku amplitudy składowej przemiennej Ω do składowej stałej ω_0 sygnału. Dla amplitud Ω małych dążących do zera oraz dużych dążących do wartości składowej stałej ω_0 rozdzielczość maleje, uzyskując maksimum dla wartości pośrednich.

5. Podsumowanie

Wykazano, że jest możliwe wyznaczenie wartości chwilowych częstotliwości sygnału impulsowego jeśli tylko przyjmiemy odpowiednią postać funkcji aproksymującej z dostateczną dokładnością chwilową wartość fazy tego sygnału. Pomimo tego, że przedziały czasu T_i pomiędzy kolejnymi impulsami wyznaczają wartości średnie częstotliwości rozmieszczone nierównomiernie w czasie, to korzystając z faktu, że faza sygnału częstotliwościowego przyrasta dokładnie o wartość 2π w chwilach t_i pojawiania się kolejnych impulsów, możemy ją jednoznacznie aproksymować. Przedstawiono sposób równomiernego próbkowania chwilowych wartości sygnału częstotliwościowego oraz ocenę uzyskiwanej rozdzielczości wyrażoną efektywną liczbą bitów ENOB.

6. Literatura

- Marvasti F.: Nonuniform sampling, theory and practice, Kluwer Academic, New York 2001.
- [2] Biljinskis I., Mikelson A. K.: Randomized signal processing, Prentice Hall, Cambridge1992.
- [3] Bijlinskis I.: Digital Alias-Free Signal Processing, John Wiley & Sons, Chichester 2007.
- [4] Jakubiec J.: Błędy i niepewności w systemie pomiarowo-sterującym. Wyd. Politechniki Śląskiej, Gliwice 2010.
- [5] Pawłowski E.: Symulacja czujnika z wyjściem częstotliwościowym w stanach dynamicznych. PAK 2006 nr 9bis, s. 104-106.
- [6] IEEE 1241 Standard for Terminology and Test Methods for Analogto-Digital Converters, 2000.
- [7] Pawłowski E.: Efektywna rozdzielczość przetwornika napięcieczęstotliwość w stanach dynamicznych. PAK 2010 nr 11, s. 1294-1297.

otrzymano / received: 29.08.2012

przyjęto do druku / accepted: 01.10.2012 artykuł

artykuł recenzowany / revised paper