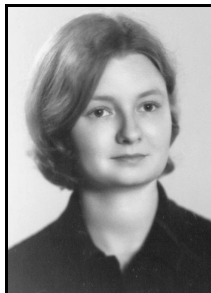


Dorota KROPIOWSKA, Leszek MIKULSKI, Marcin STYRNA
POLITECHNIKA KRAKOWSKA, INSTYTUT MECHANIKI BUDOWLI
ul. Warszawska 24, 31-155 Kraków

Optymalne kształtowanie łuków sprężystych z uwagi na stateczność

Mgr inż. Dorota KROPIOWSKA

Asystent w Katedrze Podstaw Mechaniki Ośrodka Ciągłego Wydziału Inżynierii Lądowej Politechniki Krakowskiej. Przedmiotem zainteresowań są zagadnienia związane z optymalnym kształtowaniem konstrukcji inżynierskich w kategoriach teorii sterowania.



e-mail: dkropiowska@op.pl

Mgr inż. Marcin STYRNA

Sluchacz pierwszego roku studiów doktoranckich oraz absolwent kierunku budownictwo (specjalności: Budowlane Obiekty Inteligentne) na Wydziale Inżynierii Lądowej Politechniki Krakowskiej.



e-mail: marcin.styrna@doktoranci.pk.edu.pl

Prof. dr hab. inż. Leszek MIKULSKI

Kierownik Katedry Podstaw Mechaniki Ośrodka Ciągłego Wydziału Inżynierii Lądowej Politechniki Krakowskiej. Zainteresowania badawcze i naukowe dotyczą problemów optymalnego kształtowania konstrukcji i systemów, autor 50 publikacji z tego zakresu.



e-mail: ps@pk.edu.pl

Streszczenie

W pracy przedstawiono zagadnienie optymalnego kształtowania łuków sprężystych z uwzględnieniem stateczności. Rozważono zadanie poszukiwania punktów krytycznych - antysymetrycznego punktu bifurkacji i symetrycznego punktu przeskoku. Problem optymalizacji dotyczy wyznaczenia takiej funkcji sterowania, będącej zmienną szerokością przekroju prostokątnego łuku, która maksymalizuje obciążenie krytyczne. Zadanie sprowadzono do wielopunktowego problemu brzegowego i rozwiązano numerycznie przy wykorzystaniu programu Dircol.

Słowa kluczowe: optymalizacja, zasada maksimum, obciążenie krytyczne, stateczność.

Optimal shaping of elastic arches in terms of stability

Abstract

The paper presents the optimal shaping problem of elastic arches with taking stability under consideration. The problem of finding branch points was considered as a starting task (Section 3). The arch with radial load (Fig. 1) was described by nonlinear state equations (Subsection 3.1) together with the boundary conditions (Subsection 3.2). As a result of numerical calculations by using the Dircol software [3] there were obtained the values of branch points for symmetric bifurcation points and antisymmetric turning points (Subsection 3.4). The optimisation problem concerned determining the control function $U_1(x)$ which was the width of the arch rectangle cross section. The control function maximises the critical load when fulfilling the assumption of constant volume (Section 4). The optimal control was determined on the basis of the Pontryagin's Principle. Finally the optimisation problem was reduced to the multipoint boundary-value problem and solved numerically by using the Dircol software. Graphs of the control variable, the state variables and corresponding graphs of the adjoint variables are shown in Figs. 3, 4 and 5. There was also considered the optimisation problem when introducing a second control function (the cross-section height) (Fig. 6). From analysis of the results obtained (Tab. 1) one can draw a conclusion that the optimally shaped cross section of the arch, when assuming the constant volume, allows increasing significantly the value of branch points.

Keywords: optimisation, maximum principle, critical load, stability.

1. Wprowadzenie

Intensywny rozwój metod optymalnego sterowania pozwala na coraz powszechniejsze ich wykorzystanie w wielu dziedzinach nauki. W projektowaniu konstrukcji budowlanych metody optymalizacji, formułowane w kategoriach teorii sterowania, pozwalają na uwzględnienie szeregu wymagań, które w praktyce projektowej muszą być spełnione przy wnoszeniu rzeczywistych ustrojów. Z punktu widzenia projektanta jednym z ważniejszych zadań jest niedopuszczenie do wystąpienia utraty stateczności konstrukcji i optymalne zaprojektowanie układu w sposób gwarantujący zwiększenie wartości obciążeń krytycznych, mogących tę utratę spowodować.

Celem niniejszego artykułu jest przedstawienie zagadnienia optymalnego kształtowania łuków z uwzględnieniem stateczności. Uwagę skupiono na poszukiwaniu wartości obciążeń krytycznych dla nieliniowego modelu łuku sprężystego oraz na optymalnym doborze rozkładu masy łuku, który zapewni maksymalizację wartości obciążenia krytycznego. Zadanie optymalizacji zostało sformułowane w kategoriach teorii sterowania z zastosowaniem zasady maksimum i rozwiązane numerycznie przy wykorzystaniu programu komputerowego Dircol.

2. Sformułowanie problemu

Na podstawie literatury dotyczącej teorii bifurkacji i stateczności, w szczególności pozycji [1], opisano i wykorzystano metodę pozwalającą wprowadzić zagadnienia stateczności globalnej do optymalnego kształtowania łuków w kategoriach teorii sterowania.

Wyjściowy problem polega na poszukiwaniu punktów krytycznych – bifurkacji i przeskoku (y_0, λ_0) dla zadania, które może zostać sformułowane jako dwupunktowy problem brzegowy:

$$\mathbf{y}' = \mathbf{f}(x, \mathbf{y}, \lambda) \quad (1)$$

$$\mathbf{r}(\mathbf{y}(x_0), \mathbf{y}(x_1)) = 0 \quad (2)$$

gdzie:

- x – zmienna niezależna – w naszym zadaniu przyjmowana jako współrzędna odmierzana wzdłuż osi łuku,
- \mathbf{y} – wektor zmiennych stanu $(y_1(x), \dots, y_n(x))$,
- λ – parametr bifurkacji.

Warunki brzegowe tworzy układ n równań:

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_1(y_1(x_0), \dots, y_n(x_0), y_1(x_1), \dots, y_n(x_1)) &= 0 \\ \vdots & \\ \mathbf{r}_n(y_1(x_0), \dots, y_n(x_0), y_1(x_1), \dots, y_n(x_1)) &= 0 \end{aligned} \quad (3)$$

Linearyzacja równań (1) z uwagi na \mathbf{y} prowadzi do następującego problemu brzegowego:

$$\mathbf{h}' = \mathbf{f}_y(x, \mathbf{y}, \lambda) \cdot \mathbf{h} \quad (4)$$

$$\mathbf{A}\mathbf{h}(x_0) + \mathbf{B}\mathbf{h}(x_l) = 0 \quad (5)$$

gdzie:

\mathbf{h} – wektor, będący wynikiem linearyzacji \mathbf{y}

$$(h_1(x), \dots, h_n(x)),$$

\mathbf{A}, \mathbf{B} – macierze n^2 linearyzacji warunków brzegowych, wyliczane ze wzorów:

$$\mathbf{A} = \frac{\partial \mathbf{r}(\mathbf{y}(x_0), \mathbf{y}(x_l))}{\partial \mathbf{y}(x_0)} \quad \mathbf{B} = \frac{\partial \mathbf{r}(\mathbf{y}(x_0), \mathbf{y}(x_l))}{\partial \mathbf{y}(x_l)} \quad (6)$$

Zgodnie z algorytmem Seydel'a [1], punkt krytyczny może zostać policzony z układu równań (1), który jest powiększony o równania (4) oraz dodatkowe jedno trywialne równanie różniczkowe o postaci:

$$\lambda' = 0 \quad (7)$$

które charakteryzuje parametr bifurkacji λ jako stałą.

Formułujemy zatem problem brzegowy, składający się z $2n+1$ równań różniczkowych:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{y} \\ \mathbf{h} \\ \lambda \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} \mathbf{f}(x, \mathbf{y}, \lambda) \\ \mathbf{f}_y(x, \mathbf{y}, \lambda) \cdot \mathbf{h} \\ 0 \end{pmatrix} \quad (8)$$

przy równoczesnym uwzględnieniu warunków brzegowych:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{r}(\mathbf{y}(x_0), \mathbf{y}(x_l)) \\ h_k(x_0) - \xi \\ \mathbf{A}\mathbf{h}(x_0) + \mathbf{B}\mathbf{h}(x_l) \end{pmatrix} = 0 \quad (9)$$

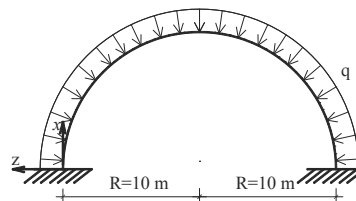
Liczba warunków brzegowych, równa jest $2n+1$, gdyż dodatkowo wprowadzono warunek:

$$h_k(x_0) - \xi = 0 \quad (10)$$

który jako warunek początkowy zapewnia nietrywialne rozwiązanie $\mathbf{h} \neq 0$. Jeżeli układ (8) wraz z warunkami (9) posiada rozwiązanie $(\mathbf{y}_0, \lambda_0, \mathbf{h}_0)$ to $(\mathbf{y}_0, \lambda_0)$ jest punktem krytycznym.

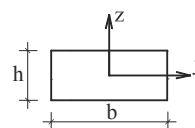
3. Przykład obliczeniowy – poszukiwanie wartości obciążeń krytycznych

Analizie poddano kołowy łuk o osi wydłużalnej, obustronnie utwierdzony, o promieniu $R=10$ m, krzywiznie $\kappa=1/R$ i długości $l=\pi R$ (rys. 1). Łuk opisany jest w układzie współrzędnych x, y, z , gdzie osie odpowiednio przyjęto jako – styczną, binormalną i normalną do osi łuku. Zakładamy, że łuk poddany jest rozłożonemu obciążeniu radialnemu o wartości q , które jest prostopadłe do odkształconej osi łuku i deformuje łuk w płaszczyźnie x, z . W zadaniu przyjmujemy $q = \lambda q^*$, gdzie λ jest parametrem bifurkacji, q^* jest obciążeniem odniesienia.



Rys. 1. Schemat obciążenia i podparcia łuku
Fig. 1. Scheme of the arch load and support

Przyjęto dane materiałowe układu – moduł sprężystości $E = 34,0$ GPa, ciężar właściwy $\gamma = 24,0$ kN/m³; przekrój poprzeczny pręta przyjęto jako prostokątny o wymiarach $b \times h$ (rys. 2). Dla wyjściowego zadania poszukiwania obciążeń krytycznych, przyjęto przekrój pręta jako stały na całej długości, o szerokości $b = 0,7$ m, wysokości $h = 0,3$ m.



Rys. 2. Przekrój poprzeczny łuku
Fig. 2. Cross section of the arch

3.1. Równania stanu

Rozważany łuk może zostać opisany przez układ nieliniowych równań różniczkowych pierwszego rzędu [2]:

$$\begin{cases} \frac{dN}{dx} = Q \cdot \kappa - q \cdot \sin \varphi \\ \frac{dQ}{dx} = -N \cdot \kappa - q \cdot \cos \varphi \\ \frac{dM}{dx} = -(1 + \varepsilon) \cdot (Q \cdot \cos \varphi + N \cdot \sin \varphi) \\ \frac{du}{dx} = w \cdot \kappa - 1 + (1 + \varepsilon) \cdot \cos \varphi \\ \frac{dw}{dx} = -u \cdot \kappa - (1 + \varepsilon) \cdot \sin \varphi \\ \frac{d\varphi}{dx} = -\frac{M}{EI_y} - \varepsilon \cdot \kappa \end{cases} \quad (11)$$

Zmienne stanu w powyższym wzorze przyjęto następująco: N (oznaczyamy w dalszej analizie jako y_1) – siła podłużna, Q (y_2) – siła poprzeczna, M (y_3) – moment zginający, u (y_4) – przemieszczenie styczne do osi łuku, w (y_5) – przemieszczenie prostopadłe do osi łuku, φ (y_6) – przemieszczenie kątowe. Pole przekroju poprzecznego i moment bezwładności wyznaczamy z zależności: $A = b \cdot h$, $J_y = b \cdot h^3$.

Równania (11) uwzględniają wydłużalność osi łuku, gdzie:

$$\varepsilon = \frac{1}{E \cdot A} \cdot (N \cdot \cos \varphi - Q \cdot \sin \varphi + M \cdot \kappa) \quad (12)$$

Do podstawowego układu 6 równań (11), który zapiszemy teraz w postaci (1) dołączamy 6 równań zlinearyzowanych, zgodnie ze wzorem (4) oraz jedno równanie na parametr bifurkacji (7). Dodatkowo, ze względu na uwzględnienie wpływu ciężaru własnego na deformację łuku zmianie uległy pierwsze dwa równania oraz dopisano równanie 14. Współczynniki ε i δ wyliczamy z zależności:

$$\varepsilon = \frac{1}{E \cdot A} \cdot (y_1 \cdot \cos y_6 - y_2 \cdot \sin y_6 + y_3 \cdot \kappa) \quad (13)$$

$$\delta = \frac{1}{E \cdot A} \cdot (\cos y_6 \cdot h_1 - \sin y_6 \cdot h_2 + \kappa \cdot h_3 - (y_1 \cdot \sin y_6 + y_2 \cdot \cos y_6) \cdot h_6)$$

Ostatecznie problem zapisujemy jako komplet 14 równań różniczkowych:

$$\begin{cases} y_1' = y_2 \cdot \kappa - \lambda \cdot \sin y_6 - \gamma \cdot A \cdot \sin \theta \\ y_2' = -y_1 \cdot \kappa - \lambda \cdot \cos y_6 - \gamma \cdot A \cdot \cos \theta \\ y_3' = -(1 + \varepsilon) \cdot (y_2 \cdot \cos y_6 + y_1 \cdot \sin y_6) \\ y_4' = y_5 \cdot \kappa - 1 + (1 + \varepsilon) \cdot \cos y_6 \\ y_5' = -y_4 \cdot \kappa - (1 + \varepsilon) \cdot \sin y_6 \\ y_6' = -\frac{y_3}{EI_y} - \varepsilon \cdot \kappa \\ h_1' = \kappa \cdot h_2 - \lambda \cdot \cos y_6 \cdot h_6 \\ h_2' = -\kappa \cdot h_1 + \lambda \cdot \sin y_6 \cdot h_6 \\ h_3' = -\delta \cdot (y_2 \cdot \cos y_6 + y_1 \cdot \sin y_6) + \\ \quad - (1 + \varepsilon) \cdot (\cos y_6 \cdot h_2 + \sin y_6 \cdot h_1 + \\ \quad + (y_1 \cdot \cos y_6 - y_2 \cdot \sin y_6) \cdot h_6) \\ h_4' = \kappa \cdot h_5 + \delta \cdot \cos y_6 - (1 + \varepsilon) \cdot \sin y_6 \cdot h_6 \\ h_5' = -\kappa \cdot h_4 - \delta \cdot \sin y_6 - (1 + \varepsilon) \cdot \cos y_6 \cdot h_6 \\ h_6' = -\frac{h_3}{EI_y} - \delta \cdot \kappa \\ \lambda' = 0 \\ \theta' = -\kappa \end{cases} \quad (14)$$

3.2. Warunki brzegowe

Warunki brzegowe dla zmiennych stanu $y_1 - y_6$ wynikają ze sposobu podparcia łuku:

$$\begin{aligned} y_4(0) = 0, y_5(0) = 0, y_6(0) = 0 \\ y_4(l) = 0, y_5(l) = 0, y_6(l) = 0 \end{aligned} \quad (15)$$

Jeżeli rozważymy symetrię możemy w analizie uwzględnić połowę łuku (przedział $[0, 0.5l]$) i warunki (15) zastąpić warunkami poniższymi:

$$\begin{aligned} y_4(0) = 0, y_5(0) = 0, y_6(0) = 0 \\ y_2(0.5l) = 0, y_4(0.5l) = 0, y_6(0.5l) = 0 \end{aligned} \quad (16)$$

Warunki brzegowe dla zmiennych $h_1 - h_6$ zależą od typu punktu krytycznego. W rozważanym przykładzie możemy zapisać warunki dla antysymetrycznego punktu bifurkacji w postaci:

$$\begin{aligned} h_4(0) = 0, h_5(0) = 0, h_6(0) = 0 \\ h_1(0.5l) = 0, h_3(0.5l) = 0, h_5(0.5l) = 0 \end{aligned} \quad (17)$$

oraz dla symetrycznego punktu przeskoku w postaci:

$$\begin{aligned} h_4(0) = 0, h_5(0) = 0, h_6(0) = 0 \\ h_2(0.5l) = 0, h_4(0.5l) = 0, h_6(0.5l) = 0 \end{aligned} \quad (18)$$

Dodatkowo należy uwzględnić warunek brzegowy (10) – przyjmujemy indeks $k=3$, wartość $\xi = 1$:

$$h_3(0) = 1 \quad (19)$$

3.3. Sformułowanie zadania

Problem dotyczy poszukiwania rozwiązania (y_0, λ_0) układu równań (14) przy warunkach (13), (16), (17) i (19) w przypadku antysymetrycznego punktu bifurkacji oraz rozwiązania układu równań (14) przy warunkach (13), (16), (18) i (19) w przypadku symetrycznego punktu przeskoku.

Zakładamy, że łuk pracuje w stanie sprężystym, więc dodatkowo sprawdzono warunek z uwagi na maksymalne naprężenia normalne.

3.4. Wyniki numeryczne

W wyniku obliczeń zadania, przeprowadzonych programem numerycznym Dircol, uzyskano wartości obciążeń krytycznych dla antysymetrycznego punktu bifurkacji i symetrycznego punktu przeskoku oraz odpowiadające im wykresy wszystkich 14 zmiennych.

- A. Wartość obciążenia krytycznego dla antysymetrycznego punktu bifurkacji wynosi: $\lambda_{0B} = 425,64 \text{ kN/m}$
- B. Wartość obciążenia krytycznego dla symetrycznego punktu przeskoku wynosi: $\lambda_{0P} = 540,13 \text{ kN/m}$

Wykresy zmiennych, ze względu na ograniczenie miejsca, zostaną przedstawione tylko przy zadaniu optymalnego kształtowania.

4. Przykład obliczeniowy – optymalne kształtowanie łuku z uwagi na maksymalizację obciążenia krytycznego

Analizie poddano łuk o danych przyjętych zgodnie z przedstawionymi z zadaniu wcześniejszym, przy tej różnicy, że przekrój poprzeczny pręta ma zmienny wymiar po długości łuku.

4.1. Sformułowanie problemu optymalizacji

W zadaniu optymalizacji poszukiwana jest taka zmienna decyzyjna $U_1(x)$, będąca szerokością przekroju poprzecznego łuku, która przy założeniu stałej objętości łuku oraz przy spełnieniu warunków ograniczających, maksymalizuje wartość obciążenia krytycznego dla przypadku antysymetrycznego punktu bifurkacji. Problem sprowadza się do minimalizacji funkcjonału:

$$J(\mathbf{y}, \mathbf{U}, x) = -\lambda_{0B} \quad (20)$$

Warunki ograniczające wynikają z geometrycznych ograniczeń narzuconych na zmienną decyzyjną: $0,6 \text{ m} \leq U_1 \leq 0,8 \text{ m}$.

Z uwagi na założenie stałej objętości łuku wprowadzono do równań różniczkowych kolejne równanie, piętnaste, opisujące objętość łuku:

$$V' = A \quad (21)$$

i odpowiadające warunki brzegowe:

$$V(0) = 0 \quad V(l/2) = V_0 \quad (22)$$

Gdzie wartość V_0 przyjmujemy jak dla zadania bez optymalizacji:

$V_0 = 0,3 \cdot 0,7 \cdot \frac{l}{2}$ czyli optymalnie ukształtowany łuk będzie miał taką samą masę łuku w przypadku zadania opisanego w punkcie 3 artykułu, tylko będzie miał inny rozkład masy po długości łuku.

Ostatecznie zadanie optymalizacji opisane jest kompletem równań (14) z uwzględnieniem (13) oraz (21), przy charakterystykach przekroju: $A = U_1(x) \cdot h$, $J_y = U_1(x) \cdot h^3$. Przyjmujemy warunki brzegowe (16), (17), (19) i (22).

W procesie optymalizacji uwzględniono również sprawdzenie, czy łuk pracuje w zakresie sprężystym.

4.2. Rozwiązanie optymalne i wyniki numeryczne

Dla zadanej funkcji celu i ograniczeń można zdefiniować funkcję Hamiltona w postaci:

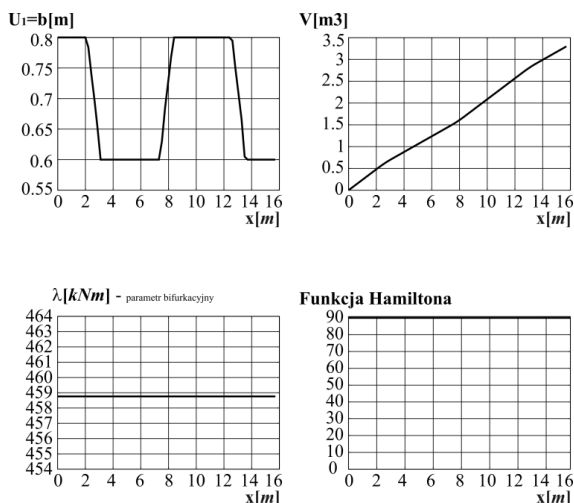
$$H = \sum_{i=1}^6 \lambda_i f_i + \sum_{i=1}^6 \psi_i \frac{\partial f_i}{\partial y_j} h_j + \psi_0 \cdot A + \sigma \cdot \lambda' \quad (23)$$

Współrzędne sprzężone spełniają następujący układ równań różniczkowych:

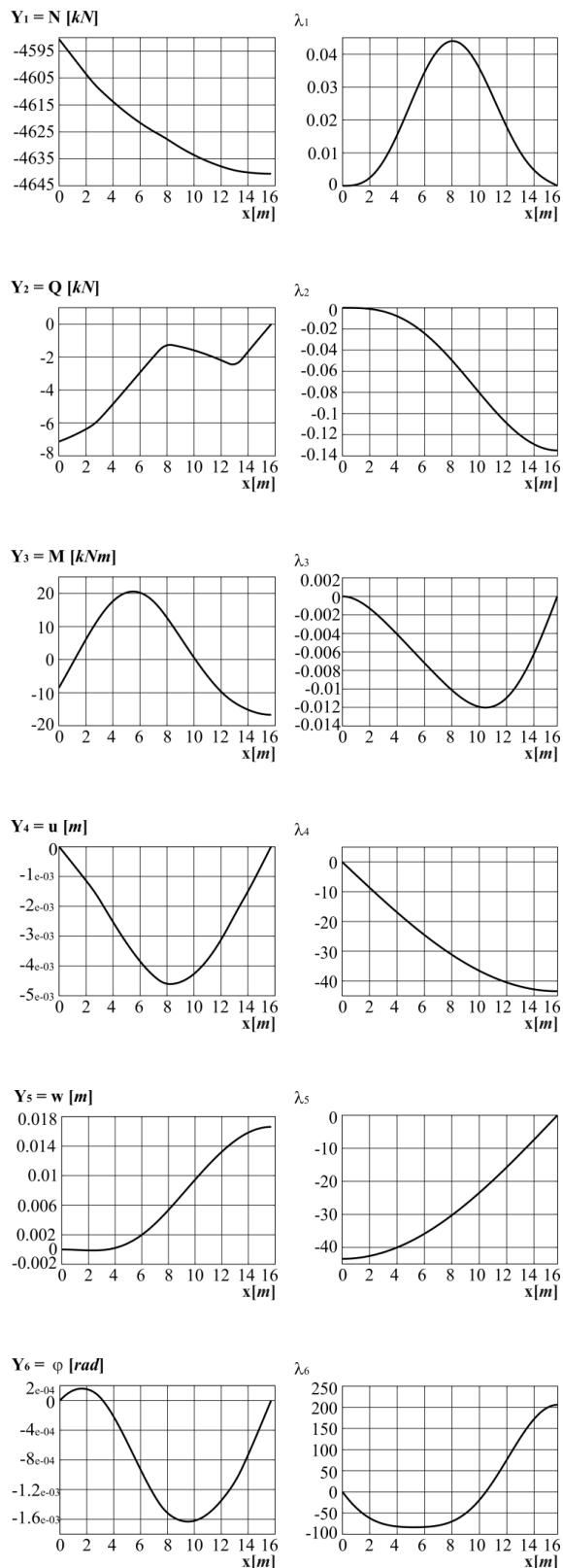
$$\lambda'_k = -\frac{\partial H}{\partial y_k} \quad \psi'_k = -\frac{\partial H}{\partial h_k} \quad \psi'_0 = 0 \quad \sigma' = -\frac{\partial H}{\partial \lambda} \quad (24)$$

Warunki brzegowe dla zmiennych sprzężonych wynikają z warunków transversalności.

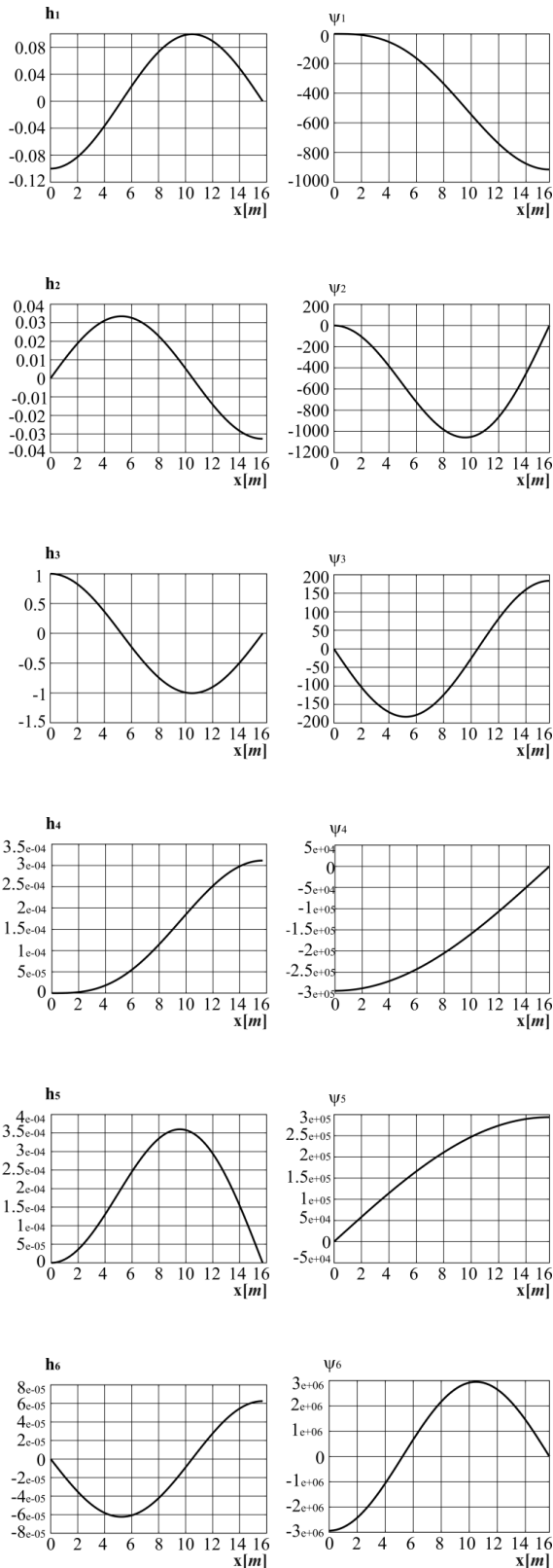
Zagadnienie optymalnego kształtowania łuku z uwagi na stateczność zostało sprowadzone do wielopunktowego problemu brzegowego (WPPB) i rozwiązane numerycznie przy wykorzystaniu programu Dircol [3]. W wyniku optymalizacji uzyskano optymalny, z uwagi na maksymalizację siły krytycznej, rozkład zmiennej decyzyjnej $U_1(x)$, będącej szerokością przekroju poprzecznego łuku (Rys. 3). Wykresy przedstawiające zmienne stanu, zmienne zlinearyzowane i odpowiadające im zmienne sprzężone przedstawiają rys. 3-5. Wszystkie przedstawione wykresy są narysowane dla połowy rozpiętości łuku.



Rys. 3. Zmienna decyzyjna U_1 , objętość łuku V , parametr bifurkacji i funkcja Hamiltona
 Fig. 3. Control variable U_1 , arch volume V , bifurcation parameter and Hamiltonian



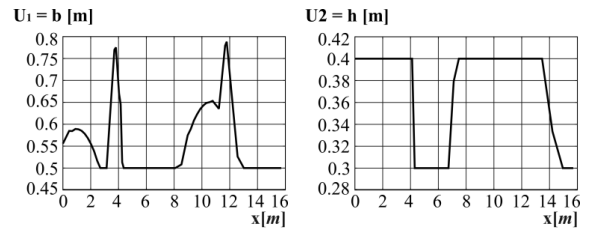
Rys. 4. Zmienne stanu y_1-y_6 i odpowiadające im zmienne sprzężone $\lambda_1 - \lambda_6$
 Fig. 4. State variables y_1-y_6 and corresponding adjoint variables $\lambda_1 - \lambda_6$



Rys. 5. Zmienne h_1-h_6 i odpowiadające im zmienne sprzężone $\psi_1 - \psi_6$
 Fig. 5. Variables h_1-h_6 and corresponding adjoint variables $\psi_1 - \psi_6$

Dodatkowo w zadaniu optymalnego kształtowania łuku z uwagi na stateczność, rozważono zadanie z dwoma zmiennymi decyzyjnymi – $U_1(x)=b$, $U_2(x)=h$, które jest również sformułowane dla warunku stałej objętości. Warunki ograniczające dla zmiennych decyzyjnych przyjęto: $0,5 \text{ m} \leq U_1 \leq 0,8 \text{ m}$, $0,3 \text{ m} \leq U_2 \leq 0,4 \text{ m}$.

Wykresy optymalnych szerokości i wysokości przekroju wzdłuż długości przedstawiono na rys. 6.



Rys. 6. Zmienna decyzyjna U_1, U_2
 Fig. 6. Control variables U_1, U_2

Porównanie wyników uzyskanych dla wszystkich zadań przedstawia tabela nr 1.

Tab. 1. Porównanie wyników
 Tab. 1. Comparison of the results

Zadanie	Szerokość przekroju b [m]	Wysokość przekroju h [m]	Objętość łuku V [m ³]	Wartość obciążenia krytycznego λ_{0B} [kNm]
Brak optymalizacji	$b=\text{const.}$ $b=0,7$	$h=\text{const.}$ $h=0,3$	$V=V0$	425,64
Jedna zmienna decyzyjna $U_1=b$	$b=U_1$ $0,6 \leq U_1 \leq 0,8$	$h=\text{const.}$ $h=0,3$	$V=V0$	458,76
Dwie zmienne decyzyjne $U_1=b$, $U_2=h$	$b=U_1$ $0,5 \leq U_1 \leq 0,8$	$h=U_2$ $0,3 \leq U_2 \leq 0,4$	$V=V0$	779,10

5. Podsumowanie

W artykule przedstawiono metodę pozwalającą uwzględnić w zadaniach optymalizacji zagadnienia związane ze statecznością układu. W wyniku obliczeń uzyskano rozwiązania spełniające wszystkie warunki konieczne optymalizacji. Analizując uzyskane wyniki można stwierdzić, że optymalnie ukształtowany przekrój poprzeczny łuku, przy założeniu stałej objętości, pozwala na znaczne zwiększenie wartości obciążenia krytycznego.

Praca wykonana w ramach projektu badawczego nr N N506 244837.

6. Literatura

- [1] Seydel R.: From equilibrium to chaos. Practical bifurcation and stability analysis. Elsevier, New York, 1988.
- [2] Gajewski A., Życzkowski M.: Optymalne kształtowanie ustrojów prętowych przy warunkach stateczności.[w:] Wybrane zagadnienia stateczności konstrukcji. Ossolineum, 1987.
- [3] von Stryk O.: User's Guide for Dircol. A Direct Collocation Method for the Numerical Solution of Optimal Control Problems. Technische Universität Darmstadt, 2002.
- [4] Mikulski L.: Teoria sterowania w problemach optymalizacji konstrukcji i systemów. Wydawnictwo Politechniki Krakowskiej, s. 1-194, Kraków 2007.