

Henryk LASKOWSKI

POLITECHNIKA KRAKOWSKA, INSTYTUT MECHANIKI BUDOWLI
ul. Warszawska 24, 31-155 Kraków

Sformułowanie problemu optymalnego kształtowania wielogłęziowych ustrojów prętowych w kategoriach teorii sterowania

Dr inż. Henryk LASKOWSKI

Adiunkt w Katedrze Podstaw Mechaniki Ośrodków Ciągłych Instytutu Mechaniki Budowli Politechniki Krakowskiej. Autor 13 artykułów z zakresu teorii i zastosowań optymalnego sterowania w zagadnieniach optymalizacji wytrzymałościowej konstrukcji budowlanych.



e-mail: henryklaskowski@poczta.onet.pl

Streszczenie

W artykule przedstawiono oryginalną metodę formułowania zadań optymalizacji wielogłęziowych ustrojów prętowych, polegającą na dekompozycji ustroju na pojedyncze pręty, sformułowaniu warunków współpracy oraz normalizacji ich długości. Wykazano, że zaprezentowana metoda umożliwia, w odniesieniu do ustrojów wielogłęziowych, formułowanie zadań optymalizacji w kategoriach teorii sterowania. Opisaną metodę zastosowano w optymalizacji przykładowego ustroju słupowo ryglowego złożonego z pięciu prętów.

Słowa kluczowe: optymalizacja, zasada maksimum.

Formulating the problem of shaping multi-branch bar arrangements in the optimum manner in terms of the control theory

Abstract

The paper presents an original method for formulating problems of optimization of multi-branch bar arrangements which consists in decomposing them into single bars, formulating their cooperation conditions, and normalizing their lengths. In Section 2 there is defined the concept of multi-branch arrangements, which has not occurred in the literature so far. The next section presents ways for describing bars with special attention being paid to the rules of formulating their cooperation conditions. Sections 4 and 5 are devoted to description of the decomposition and normalization method, which can be used to formulate the problem of optimization of multi-branch bar arrangements in the form of a double-point boundary problem, whose formal structure makes it possible to use the maximum principle. The above method was used to optimize an example bar-and-beam arrangement consisting of five bars, which is discussed in Section 6. With reference to the analyzed object subjected to three fundamental load conditions in three combinations, a problem of shaping its cross-section in the optimum manner was formulated. There was assumed the optimization problem objective function as the steel volume. Five decision variables were assumed to be I-beam web heights. There were also taken into account restrictions of the optimization problem resulting from the bar load-carrying ability and usability limits. Eventually, a double-point boundary problem was formulated consisting of 197 differential and algebraic equations, which was solved using the Dircol-2.1 software.

Keywords: optimization, maximum principle.

1. Wstęp

Jednym z zagadnień, w jakich znajduje zastosowanie teoria optymalnego sterowania jest optymalne kształtowanie przekroju poprzecznego konstrukcji prętowych. Zastosowanie tej teorii, obejmującej początkowo zagadnienia związane z optymalizacją procesów, w których zmienną niezależną jest czas, było możliwe dzięki analogii postaci równań opisujących te procesy oraz równań kinematycznych i statycznych zmiennych stanu opisujących pręt. Jednym z elementów tej analogii jest fakt, że zarówno

w opisie ruchu, jak i pręta występuje tylko jedna zmienna niezależna, tj. czas w równaniach ruchu i współrzędna łukowa w równaniach pręta. W przypadku optymalizacji ustrojów prętowych, których osie są liniami nierozgałęzionymi, ta analogia zachodzi. Jeśli natomiast w ustroju prętowym występują węzły, w których łączy się więcej, niż dwa pręty, to ww. analogii nie ma i zastosowanie opisu pręta analogicznego, jak w opisie ruchu nie jest możliwe. W artykule przedstawiono opracowaną metodę postępowania umożliwiającą zastosowanie teorii sterowania również w optymalizacji takich obiektów.

2. Definicja wielogłęziowego ustroju prętowego

W niniejszej pracy określenie *wielogłęziowy ustrój prętowy* odnosi się do ustroju złożonego z prętów połączonych w węzłach, z których co najmniej jeden łączy więcej, niż dwa pręty. Pojęcie to należy odróżnić od *prętów wielogłęziowych*, złożonych z równoległych prętów prostych, połączonych w sposób zapewniający ich wzajemną współpracę. *Pręty wielogłęziowe* w formułowanych zadaniach optymalizacji będą nazywane *prętami o złożonym przekroju poprzecznym*. Wielogłęziowe ustroje prętowe to np. ustrój słupowo ryglowy, rama portalowa ze ściągiem, rama z dodatkowymi elementami stężącymi, kratownica itp. W odniesieniu do tych ustrojów, ze względu na występujące rozgałęzienia osi prętów, nie można zastosować typowego sformułowania zadania optymalizacji w kategoriach teorii sterowania, w którym równania różniczkowe opisujące pręty są formułowane w poszczególnych przedziałach charakterystycznych z warunkami brzegowymi i wewnętrznymi warunkami punktowymi. W dalszych rozdziałach przedstawiono oryginalną metodę opisu tych ustrojów, polegającą na ich dekompozycji na pojedyncze pręty o znormalizowanej długości. Ustroje wielogłęziowe mogą być zarówno przestrzenne, jak i płaskie, jednak w niniejszym artykule, w celu przedstawienia istoty zagadnienia, ograniczono się tylko do zagadnień płaskich.

3. Matematyczny opis ustroju prętowego

Pręt o dowolnej osi można opisać za pomocą 6 zmiennych stanu. Zmienne kinematyczne to: przemieszczenie prostopadłe do osi, przemieszczenie styczne do osi i kąt obrotu, a zmienne statyczne to: siła poprzeczna, siła podłużna i moment zginający [1]. W strukturze formalnej zasady maksimum zmienne stanu są funkcjami współrzędnej odmierzanej po osi pręta i są zdefiniowane w poszczególnych przedziałach charakterystycznych za pomocą równań różniczkowych pierwszego rzędu, zwanych równaniami stanu. Do jednoznacznego rozwiązania tych równań formułuje się warunki, których liczba wynika z liczby równań stanu i liczby przedziałów charakterystycznych. Jeśli ustrój prętowy nie jest chwiejny, to liczba możliwych do sformułowania warunków punktowych dokładnie odpowiada liczbie warunków niezbędnych do jednoznacznego rozwiązania układu równań stanu. Liczba i rodzaj warunków punktowych w punktach charakterystycznych zależy od sposobu podparcia oraz sposobu połączenia prętów. Poniżej przedstawiono pewne ogólne zasady formułowania warunków punktowych.

Warunki zmiennych stanu formułowane na końcu pręta:

- swobodny koniec pręta: 3 warunki statyczne;
- ograniczenie stopnia swobody: wprowadzenie warunku kinematycznego (zerowe przemieszczenie na zablokowanym stopniu swobody) w miejsce odpowiedniego warunku statycznego.

Warunki zmiennych stanu w węźle łączącym n prętów:

- połączenie sztywne wszystkich prętów: 3 warunki statyczne i $3(n-1)$ warunków kinematycznych;
- przegubowe połączenie m prętów ($m < n$): wprowadzenie m warunków statycznych na moment zginający w tych prętach w miejsce warunków kinematycznych na obrót;
- ograniczenie stopnia swobody węzła: wprowadzenie warunku kinematycznego (zerowe przemieszczenie na zablokowanym stopniu swobody) w miejsce odpowiedniego warunku statycznego.

Jak wynika z powyższych rozważań na końcu pręta, który nie jest zamocowany w węźle, formułuje się 3 warunki, a w węźle łączącym n prętów $3n$ warunków, tj. po 3 na każdy zamocowany w węźle koniec pręta. Ich postać zależy od sposobu podparcia i sposobu połączenia prętów w węźle. Tak więc, niezależnie od sposobu połączenia prętów, w ustroju wielogłęziowym, a także w odniesieniu do prętów nie połączonych, liczba warunków zmiennych stanu jest sześciokrotnie większa, niż liczba prętów, co zapewnia jednoznaczne rozwiązanie układu równań stanu. Te dość oczywiste zależności zostały wykorzystane w dekompozycji ustrojów wielogłęziowych.

4. Istota dekompozycji ustrojów wielogłęziowych i normalizacji długości prętów

Dekompozycja ustrojów wielogłęziowych polega na rozcięciu ustroju w punktach charakterystycznych oraz rozłożeniu go na pojedyncze pręty z zachowaniem układów obciążeń i warunków wzajemnej współpracy. Sformułowanie tych warunków jest poprzedzone wycięciem wszystkich węzłów i wprowadzeniem w przekrojach prętów statycznych i kinematycznych zmiennych stanu, określonych w jednoznacznie zdefiniowanych lokalnych układach współrzędnych. Od zwrotu osi lokalnych układów współrzędnych zależy postać warunków zmiennych stanu oraz równań stanu.

W ogólnym przypadku pręty w ustrojach wielogłęziowych mają różną długość, co sprawia, że każde 6 równań różniczkowych opisujących pręt ma inną lokalną zmienną niezależną. Numeryczne rozwiązanie tak sformułowanego układu równań jest kłopotliwe, a w przypadku programów komputerowych do rozwiązywania zadań optymalnego kształtowania wręcz niemożliwe. Z tego powodu naturalną konsekwencją dekompozycji jest normalizacja długości prętów przez wprowadzenie zmiennej bezwymiarowej będącej ilorazem zmiennej lokalnej i długości pręta. Tak zdefiniowana zmienna niezależna jest wspólna dla wszystkich prętów i zmienia się w zakresie od 0 do 1. Wprowadzenie zmiennej bezwymiarowej sprowadza się do pomnożenia prawych stron równań opisujących pręt przez jego długość.

5. Struktura formalna zadania optymalizacji z zastosowaniem dekompozycji i normalizacji

W zadaniach optymalizacji sformułowanych w odniesieniu do ustrojów wielogłęziowych z zastosowaniem dekompozycji i normalizacji struktura formalna nie ulega istotnym zmianom jakościowym w stosunku do sformułowania klasycznego. Jednak pod względem liczby elementów formalnych zmiany są zasadnicze. Porównanie dotyczy przypadku, gdy dekompozycja jest zastosowana do ustroju jednogłęziowego, w przypadku ustroju wielogłęziowego sformułowanie klasyczne w ogóle nie jest możliwe. Oto istotne cechy sformułowania z zastosowaniem dekompozycji:

- zadanie optymalizacji jest formułowane zawsze w jednym przedziale charakterystycznym;
- liczba równań stanu jest n -krotnością liczby równań w sformułowaniu klasycznym;

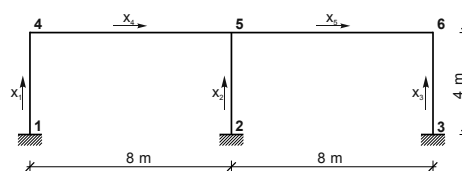
- bezpośrednią konsekwencją wzrostu liczby równań stanu jest n -krotny wzrost liczby równań sprzężonych;
- jeśli przekroje prętów są niezależne, to n -krotnie wzrasta, w stosunku do sformułowania klasycznego, liczba zmiennych decyzyjnych. Wzrost liczby zmiennych decyzyjnych jest mniejszy lub w ogóle nie występuje, jeśli w problemie optymalizacji oczekuje się rozwiązań okresowych;
- takim samym wzrostem, jak w punkcie d) charakteryzuje się liczba ograniczeń;
- ze względu na jeden przedział charakterystyczny nie są formułowane wewnętrzne warunki punktowe;
- każdy problem optymalizacji sprowadza się do dwupunktowego problemu brzegowego.

Opisaną w poprzednich rozdziałach metodę dekompozycji i normalizacji zilustrowano w przykładzie obliczeniowym w następnym rozdziale.

6. Przykład obliczeniowy

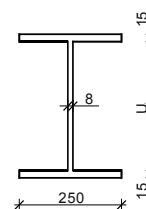
6.1. Opis ustroju wielogłęziowego

Przedstawioną wyżej metodę dekompozycji i normalizacji wielogłęziowych ustrojów prętowych zastosowano w przykładzie obliczeniowym, w którym wyznaczono optymalny, ze względu na minimum objętości materiału, przekrój poprzeczny elementów prętowych. Analizowany jest ustrój słupowo ryglowy przedstawiony na rys. 1.



Rys. 1. Schemat statyczny obiektu
Fig. 1. Static diagram of the object

Przyjęto, że przekrój poprzeczny wszystkich elementów prętowych jest blachownicą spawaną o zmiennej wysokości środnika U_i (i – numer pręta) oraz ustalonych pozostałych wymiarach (rys. 2).



Rys. 2. Przekrój poprzeczny elementów obiektu
Fig. 2. Cross-section of the object elements

Założono trzy elementarne stany obciążenia:

- stan 1. obciążenie ciężarem własnym $q_{cw} = Ay$;
- stan 2. równomiernie rozłożone obciążenie rygła 4-5 $q_{4-5} = 80$ kN/m;
- stan 3. równomiernie rozłożone obciążenie rygła 5-6 $q_{5-6} = 80$ kN/m.

Rozważano trzy kombinacje obciążeń:

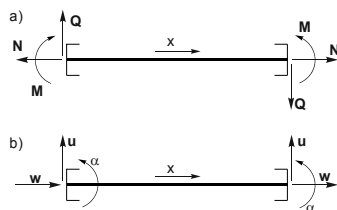
- kombinacja 1. $q_{cw} + q_{4-5}$,
- kombinacja 2. $q_{cw} + q_{5-6}$,
- kombinacja 3. $q_{cw} + q_{4-5} + q_{5-6}$.

6.2. Sformułowanie zadania optymalizacji

W odniesieniu do przedstawionego wyżej obiektu zostanie sformułowane i rozwiązane zadanie optymalnego kształtowania polegające na wyznaczeniu minimalnej wysokości środnika przekroju dwuteowego wszystkich elementów prętowych obiektu, która zapewnia nie przekroczenie stanów granicznych nośności i użytkowa-

nia. Funkcją celu w zadaniu optymalizacji jest objętość stali V , a zmienną decyzyjną wysokość średnicy U . Zmiennymi stanu są:
 $u_i(x_i)$ – przemieszczenie prostopadłe do osi pręta,
 $\alpha_i(x_i)$ – kąt obrotu względem osi pręta,
 $M_i(x_i)$ – moment zginający,
 $Q_i(x_i)$ – siła poprzeczna,
 $N_i(x_i)$ – siła podłużna,
 $w_i(x_i)$ – przemieszczenie styczne do osi pręta,
 gdzie i – numer pręta.

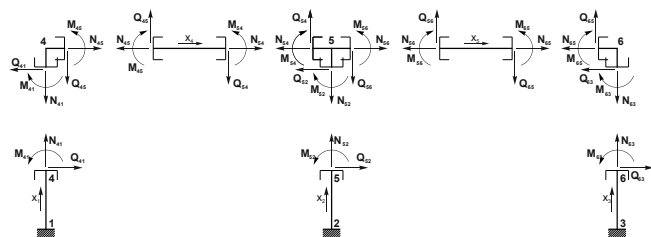
Na rys. 1 zdefiniowano lokalną zmienną niezależną x_i w odniesieniu do każdego pręta, natomiast zwroty osi lokalnych układów współrzędnych zdefiniowano na rys. 3.



Rys. 3. Lokalne układy współrzędnych: a) statycznych zmiennych stanu, b) kinematycznych zmiennych stanu

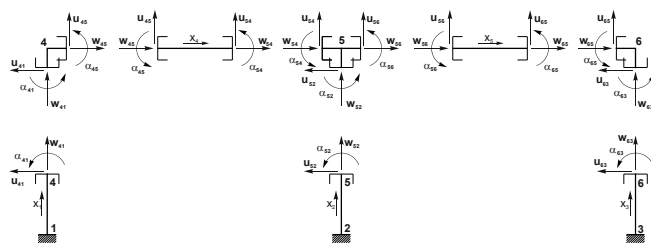
Fig. 3. Local co-ordinate systems for: a) static state variables, b) kinematic state variables

Kolejnym krokiem w formułowaniu zadania jest podział ustroju na pojedyncze pręty w punktach charakterystycznych, wycięcie węzłów i wprowadzenie w powstałych przekrojach zmiennych stanu. Na rysunkach 4 i 5 przedstawiono zmienne stanu w przekrojach w jednym z elementarnych stanów obciążenia. Indeksy w symbolach zmiennych stanu oznaczają numery węzłów i skierowanie przekrojów.



Rys. 4. Statyczne zmienne stanu w punktach charakterystycznych

Fig. 4. Static state variables in their characteristic points



Rys. 5. Kinematyczne zmienne stanu w punktach charakterystycznych

Fig. 5. Kinematic state variables in their characteristic points

Na podstawie rysunków 4 i 5 można sformułować warunki statycznych i kinematycznych zmiennych stanu. Komplet warunków przedstawiony w równaniach (1) ÷ (6) powinien być sformułowany w odniesieniu do każdego elementarnego stanu obciążenia.

Węzeł 4:

$$\begin{aligned}
 -Q_{41} + N_{45} &= 0 \\
 -N_{41} - Q_{45} &= 0 \\
 -M_{41} + M_{45} &= 0 \\
 -u_{41} &= w_{45} \\
 w_{41} &= u_{45} \\
 \alpha_{41} &= \alpha_{45}
 \end{aligned} \tag{1}$$

węzeł 5:

$$\begin{aligned}
 -N_{54} - Q_{52} + N_{56} &= 0 \\
 Q_{54} - N_{52} - Q_{56} &= 0 \\
 -M_{54} - M_{52} + M_{56} &= 0 \\
 w_{54} &= w_{56} \\
 w_{54} &= -u_{52} \\
 u_{54} &= u_{56} \\
 u_{54} &= w_{52} \\
 \alpha_{54} &= \alpha_{56} \\
 \alpha_{54} &= \alpha_{52}
 \end{aligned} \tag{2}$$

węzeł 6:

$$\begin{aligned}
 -N_{65} - Q_{63} &= 0 \\
 Q_{65} - N_{63} &= 0 \\
 -M_{65} - M_{63} &= 0 \\
 w_{65} &= -u_{63} \\
 u_{65} &= w_{63} \\
 \alpha_{65} &= \alpha_{63}
 \end{aligned} \tag{3}$$

podpora 1:

$$\begin{aligned}
 u_{14} &= 0 \\
 w_{14} &= 0 \\
 \alpha_{14} &= 0
 \end{aligned} \tag{4}$$

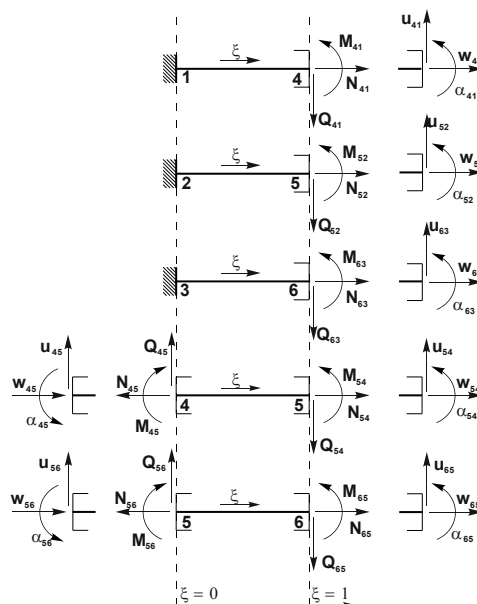
podpora 2:

$$\begin{aligned}
 u_{25} &= 0 \\
 w_{25} &= 0 \\
 \alpha_{25} &= 0
 \end{aligned} \tag{5}$$

podpora 3:

$$\begin{aligned}
 u_{36} &= 0 \\
 w_{36} &= 0 \\
 \alpha_{36} &= 0
 \end{aligned} \tag{6}$$

Na rysunku 6 przedstawiono analizowany ustrój prętowy w postaci pojedynczych prętów. Ich wzajemną współpracę określają sformułowane wyżej warunki zmiennych stanu.



Rys. 6. Ustrój po dekompozycji i normalizacji

Fig. 6. The arrangement after decomposition and normalization

W odniesieniu do każdego pręta w każdym stanie obciążenia elementarnego można sformułować 6 równań stanu, równania (7) ÷ (12).

$$\frac{du_{ij}(\xi)}{d\xi} = \alpha_{ij}(\xi) \cdot l_i, \quad (7)$$

$$\frac{d\alpha_{ij}(\xi)}{d\xi} = \frac{M_{ij}(\xi)}{EI_i} \cdot l_i, \quad (8)$$

$$\frac{dM_{ij}(\xi)}{d\xi} = Q_{ij}(\xi) \cdot l_i, \quad (9)$$

$$\frac{dQ_{ij}(\xi)}{d\xi} = -q_{ij} \cdot l_i, \quad (10)$$

$$\frac{dN_{ij}(\xi)}{d\xi} = p_{ij} \cdot l_i, \quad (11)$$

$$\frac{dw_{ij}(\xi)}{d\xi} = \frac{N_{ij}}{EA_i} \cdot l_i, \quad (12)$$

gdzie:

i – numer pręta,

j – numer elementarnego stanu obciążenia,

l_i – długość i -tego pręta,

$u_{ij}, \alpha_{ij}, M_{ij}, Q_{ij}, N_{ij}, w_{ij}$ – zmienne stanu pręta i w stanie obciążenia j ,

ξ – bezwymiarowa zmienna niezależna.

Wobec powyższego, w każdym stanie obciążenia ustrój jest opisany za pomocą 30 równań stanu postaci (7) ÷ (12), których rozwiązanie jest możliwe dzięki trzydziestu warunkom zapisanych w postaci równań (1) ÷ (6). W zadaniu przyjęto trzy elementarne stany obciążenia, zatem analizowany obiekt jest opisany za pomocą 90 równań stanu typu:

$$y'_{ij} = f_{ij}(\mathbf{U}, \mathbf{y}, \xi) \quad \begin{matrix} i = 1 \div 30 \\ j = 1 \div 3 \end{matrix} \quad (13)$$

z 90 warunkami zmiennych stanu. Pozostałe elementy struktury formalnej to [2]:

funkcja celu zadania optymalizacji

$$J = V, \quad (14)$$

funkcje ograniczeń zmiennych stanu i zmiennych decyzyjnych

$$G_{pg}(\mathbf{U}, \mathbf{y}, \xi) \geq 0 \quad \begin{matrix} p = 1 \div 5 \\ g = 1 \div 2 \end{matrix} \quad (15)$$

funkcja Hamiltona, która w analizowanym problemie ma postać

$$H = \sum_k \sum_l \lambda_{kl} \cdot f_{kl} + \sum_p \sum_g \mu_{pg} \cdot G_{pg} \quad \begin{matrix} k = 1 \div 30 \\ l = 1 \div 3 \\ p = 1 \div 5 \\ g = 1 \div 2 \end{matrix}, \quad (16)$$

układ równań zmiennych sprzężonych

$$\lambda'_{ij} = -\sum_k \sum_l \lambda_{kl} \cdot \frac{df_{kl}}{dy_{ij}} - \sum_p \sum_g \mu_{pg} \cdot \frac{dG_{pg}}{dy_{ij}} \quad \begin{matrix} i, k = 1 \div 30 \\ j, l = 1 \div 3 \\ p = 1 \div 5 \\ g = 1 \div 2 \end{matrix}, \quad (17)$$

układ równań wynikający z warunku maksimum funkcji Hamiltona

$$0 = \sum_k \sum_l \lambda_{kl} \cdot \frac{\partial f_{kl}}{\partial U_s} + \sum_p \sum_g \mu_{pg} \cdot \frac{\partial G_{pg}}{\partial U_s} \quad \begin{matrix} k = 1 \div 30 \\ l = 1 \div 3 \\ s, p = 1 \div 5 \\ g = 1 \div 2 \end{matrix}, \quad (18)$$

gdzie:

i, k – indeksy oznaczające numer zmiennej stanu w jednym stanie obciążenia,

j, l – indeksy oznaczające numer obciążenia elementarnego,

g – indeks ograniczenia sformułowanego w odniesieniu do danego pręta,

s – indeks oznaczający numer zmiennej decyzyjnej,

p – indeks oznaczający numer pręta,

\mathbf{U} – macierz zmiennych decyzyjnych,

\mathbf{y} – macierz zmiennych stanu.

Zasadniczym celem przedstawionego zadania było wykazanie poprawności zaproponowanej metody modelowania ustrojów wielogałęziowych, w związku z tym w formułując funkcje ograniczeń zastosowano uproszczone podejście, zgodnie z którym uwzględniono wyłącznie stany graniczne nośności polegające na osiągnięciu naprężeń równych granicy plastyczności stali oraz stany graniczne użytkowania polegające na osiągnięciu maksymalnego dopuszczalnego przemieszczenia prostopadłego do osi prętów. W procesie projektowania rzeczywistego obiektu należałoby uwzględnić stany graniczne wynikające z obowiązujących norm. Na poziomie formułowania ograniczeń uwzględniono kombinacje obciążeń z zastosowaniem funkcji *maximum* [1].

Ostatecznie problem optymalnego kształtowania ustroju wielogałęziowego został sprowadzony do dwupunktowego problemu brzegowego złożonego ze 197 równań różniczkowo algebraicznych:

- 90 równań stanu (13),
- równania opisującego funkcję celu (zadanie typu Mayera) (14),
- 10 funkcji ograniczeń (15),
- równania Hamiltona (16),
- 90 równań zmiennych sprzężonych (17),
- 5 równań wynikających z warunku maksimum funkcji Hamiltona (18).

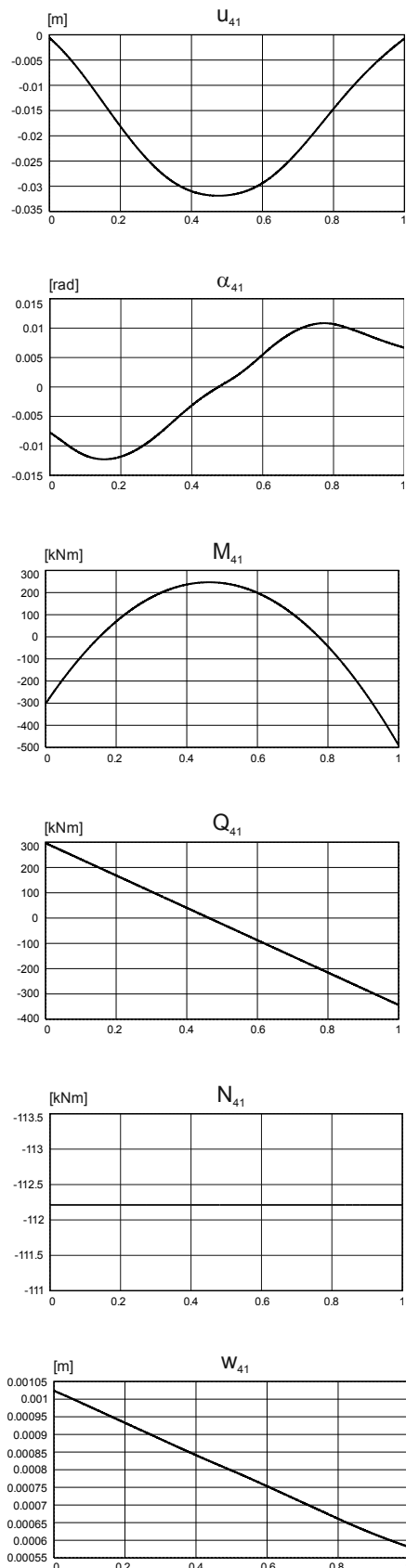
6.3. Wyniki obliczeń

Sformułowany problem został rozwiązany numerycznie za pomocą programu Dircol-2.1 [3]. Wyznaczono wszystkie wielkości opisane zależnościami (13) ÷ (18), a w szczególności rozkład zmiennych decyzyjnych na długości wszystkich prętów, który zapewnia nie przekroczenie rozważanych stanów granicznych nośności i użytkowania w każdej kombinacji obciążeń. Poniżej przedstawiono wybrane wyniki obliczeń w formie graficznej, tj. zmienne stanu pręta 4-1 (rys. 7) oraz wyznaczone zmienne decyzyjne (rys. 8).

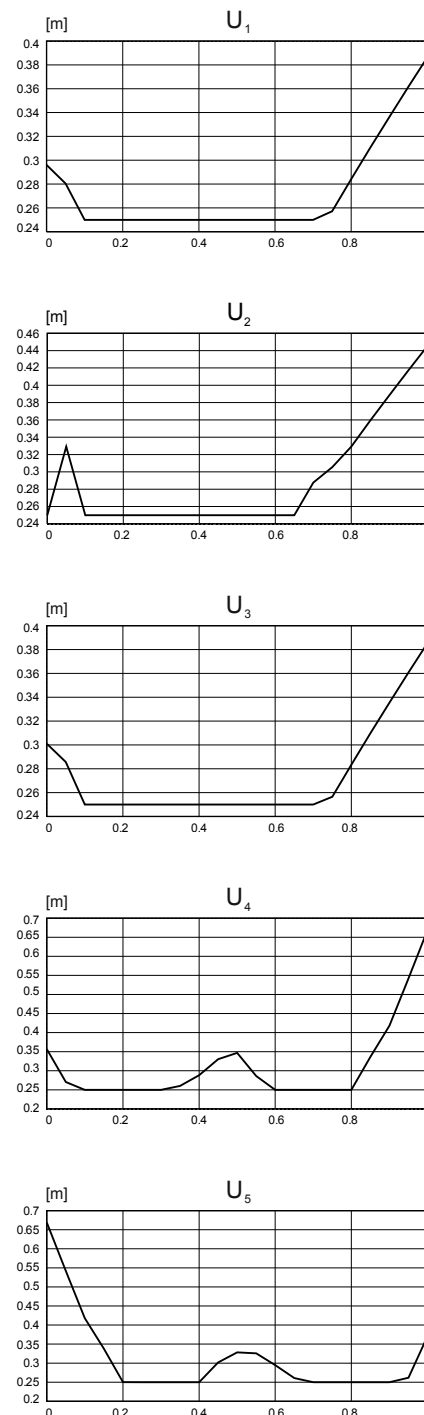
7. Wnioski

- 1) Zaproponowana metoda rozszerza możliwości zastosowania teorii sterowania do optymalnego kształtowania obiektów o osiach rozgałęzionych. Jej zasadniczym elementem są warunki zmiennych stanu określające wzajemną współpracę elementów prętowych.
- 2) Metodę tę można stosować również wtedy, gdy poszukuje się rozwiązań okresowych. W tym przypadku przyjmuje się te same zmienne decyzyjne w odniesieniu do wszystkich prętów ustroju.
- 3) Zadania optymalizacji formułowane w odniesieniu do ustrojów wielogałęziowych z zastosowaniem dekompozycji i normalizacji charakteryzują się rozbudowaną pod względem ilościowym strukturą formalną.

4) Zadania optymalizacji formułowane omawianą metodą sprowadzają się do dwupunktowego problemu brzegowego.



Rys. 7. Zmienne stanu – pręt 4-5, obciążenie elementarne 1
Fig. 7. State variables – bar 4-5, fundamental load 1



Rys. 8. Zmienne decyzyjne – wysokości śródników prętów 1 ÷ 5
Fig. 8. Decision variables – Web heights of bars 1 ÷ 5

8. Literatura

- [1] Laskowski H.: Optymalne kształtowanie stalowo-betonowych dźwignów zespolonych w kategoriach teorii sterowania, Praca doktorska, WIL PK, 1-115, 2006. <http://bc.biblos.pk.edu.pl>
- [2] Mikulski L.: Teoria sterowania w problemach optymalizacji konstrukcji i systemów, Wydawnictwo Politechniki Krakowskiej, Kraków 2007.
- [3] Stryk O. von: User's Guide for DIRCOL. A Direct Collocation Method for the Numerical Solution of Optimal Control Problems, Technische Universität Darmstadt, April 2002.