

**Przemysław KRZYK**

UNIwersytet Zielonogórski, Instytut Metrologii Elektrycznej,  
ul. Podgórna 50, 65-246 Zielona Góra

## Wyznaczanie parametrów dwójnika zasilanego prądem sinusoidalnie zmiennym z użyciem algorytmu o minimalnej złożoności obliczeniowej

Dr inż. Przemysław KRZYK

Absolwent Wydziału Elektrotechniki, Informatyki i Telekomunikacji Uniwersytetu Zielonogórskiego. Stopień doktora nauk technicznych uzyskał w 2011 roku na Wydziale Inżynierii Elektrycznej i Komputerowej Politechniki Krakowskiej. Obecnie pracuje na stanowisku adiunkta w Instytucie Metrologii Elektrycznej Uniwersytetu Zielonogórskiego. Zajmuje się zagadnieniami z zakresu teorii obwodów i sygnałów, w szczególności generowania i analizy sygnałów okresowych.



e-mail: p.krzyk@ime.uz.zgora.pl

### Streszczenie

Zaprezentowany algorytm służy do wyznaczania podstawowych parametrów prądu sinusoidalnie zmiennego oraz zasilanego nim dwójnika. Do wyznaczania tych wielkości wykorzystuje się próbkowanie synchroniczne z wykorzystaniem pętli PLL. Cechą charakterystyczną tego algorytmu jest najmniejsza możliwa złożoność obliczeniowa umożliwiająca redukcję mocy obliczeniowej procesora, a tym samym poboru prądu przez urządzenie pomiarowe.

**Słowa kluczowe:** prąd sinusoidalnie zmienny, amplituda zespolona, moc zespolona, impedancja, PLL.

### Determination of basic parameters of a two-terminal network powered by sine-wave current with use of a low computational complexity algorithm

#### Abstract

The presented algorithm is used for determining basic parameters of a two-terminal network powered by sine-wave current. All parameters describe electrical properties of the supply (equations (13)-(21)) or the impedance (equations (22)-(26)) of the two-terminal network. The supply parameters are: voltage (13) and current amplitude (14), effective voltage (15) and current (16), complex (17), active (18), reactive (19) and apparent power (20) as well as power factor (21). The two-terminal network parameters are: impedance (22), resistance (23), reactance (24) and impedance module (25) as well as factor  $\tan \varphi$  (26). For calculations of all these parameters, there are used only four samples (two of voltage and two of current), which are sampled synchronically with the supply voltage according to the formula (10) or (27). All the formulas (13)-(26) are in the same form independently if it is first sampled voltage (10) or current (27). For sampling synchronization there are used a phase locked loop PLL triggering ADC and a frequency divider switching a multiplexer MUX (Fig. 1). The most important thing is that this algorithm is characterised with the lowest possible numerical computation complexity, which enables reduction of the processor capacity and thus the power consumption of the whole measuring device.

**Keywords:** sinusoidal current complex amplitude, complex power, impedance, PLL.

### 1. Wstęp

Obecnie jest znanych wiele algorytmów służących do wyznaczania parametrów sygnału sinusoidalnie zmiennego. Można je podzielić na dwie główne grupy [1]: analiza w dziedzinie czasowej (metody najmniejszych kwadratów, korelacyjne) i analiza w dziedzinie widmowej (DFT i FFT). Metody te charakteryzują się różnym poziomem złożoności obliczeniowej. Generalnie można zauważyć, że wzrost dokładności metody obarczony jest zwiększeniem liczby próbek (nadpróbkowanie) lub zwiększeniem ilości obliczeń (np. okna czasowe). Niewątpliwą wadą tych metod

jest to, że wzrost dokładności szacowania wyniku obarczony jest wydłużonym czasem obliczeń. W przypadku prostych analiz w niektórych systemach pomiarowych ważnym kryterium jest nie tylko dokładność, lecz także koszt i czas obliczeń. Wielokrotnie stosowane są tanie układy (np. wielofunkcyjne multimetry baterijne), których klasa 1 bądź 0,1 jest w pełni wystarczająca, natomiast bardzo istotny jest czas i koszt pomiaru. Pod pojęciem koszt rozumie się zarówno koszt samego urządzenia jak i poziom zużywanej energii mający wpływ na żywotność baterii użytej w danym urządzeniu. Poziom zużycia energii przez stosowany w tego typu układach mikroprocesor jest w przybliżeniu wprost proporcjonalny do częstotliwości taktowania, stąd wyznaczenie szybkiego prostego algorytmu numerycznego, przy założeniu danego czasu pomiaru, pozwala na zmniejszenie częstotliwości taktowania układu, a tym samym na zmniejszenie zużycia energii.

### 2. Podstawy matematyczne algorytmu

Monoharmoniczny sygnał sinusoidalnie zmienny  $x(t)$  o pulsacji:

$$\omega = 2\pi f \quad (1)$$

i amplitudzie zespolonej:

$$X = A + jB = |X|e^{j\angle X} \quad (2)$$

można opisać za pomocą równania:

$$\begin{aligned} x(t) &= |X| \cos(2\pi ft + \angle X) = \\ &= |X| \cos(\omega t + \angle X) = \\ &= \frac{1}{2} (Xe^{j\omega t} + X^* e^{-j\omega t}) \end{aligned} \quad (3)$$

gdzie odpowiednio  $f$  jest częstotliwością,  $T = 1/f$  okresem,  $|X|$  amplitudą zaś  $\angle X$  fazą początkową sygnału  $x(t)$ .

Jeśli jest znana częstotliwość (pulsacja) sygnału  $x(t)$ , to możliwe jest wyznaczenie jego amplitudy zespolonej na podstawie wartości dwóch próbek:  $x(t_1)$ ,  $x(t_2)$  spełniających kryterium  $t_1 - t_2 \neq \frac{1}{2}kT$ , gdzie  $k \in Z$ . Wartość współczynników amplitudy zespolonej  $X$  wyznacza się na podstawie wzoru [2]:

$$\begin{bmatrix} \cos(\omega t_1) & \sin(\omega t_1) \\ \cos(\omega t_2) & \sin(\omega t_2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x(t_1) \\ x(t_2) \end{bmatrix} \quad (4)$$

Stąd:

$$\begin{cases} A = \frac{x(t_1)\sin(\omega t_2) - x(t_2)\sin(\omega t_1)}{\cos(\omega t_1)\sin(\omega t_2) - \sin(\omega t_1)\cos(\omega t_2)} = \\ = \frac{x(t_1)\sin(\omega t_2) - x(t_2)\sin(\omega t_1)}{\sin(\omega(t_2 - t_1))} \\ B = \frac{x(t_1)\cos(\omega t_2) - x(t_2)\cos(\omega t_1)}{\cos(\omega t_1)\sin(\omega t_2) - \sin(\omega t_1)\cos(\omega t_2)} = \\ = \frac{x(t_1)\cos(\omega t_2) - x(t_2)\cos(\omega t_1)}{\sin(\omega(t_2 - t_1))} \end{cases} \quad (5)$$

Jeżeli  $t_1 = 0$ ,  $t_2 = \frac{1}{4}T$  to wzory (4) i (5) upraszczają się odpowiednio do postaci:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x(0) \\ x(\frac{1}{4}T) \end{bmatrix}, \quad (6)$$

$$\begin{cases} A = x(0) \\ B = x(\frac{1}{4}T) \end{cases}, \quad (7)$$

zaś amplitudę zespoloną  $X$  można wyrazić, jako:

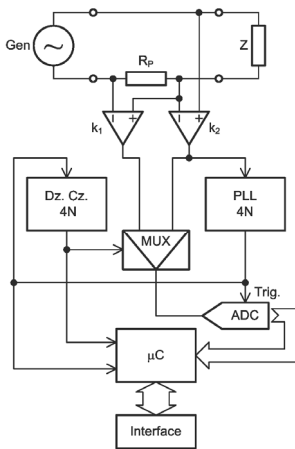
$$X = A + jB = x(0) + jx(\frac{1}{4}T). \quad (8)$$

Jednocześnie przyjmując  $t_2 = t_1 + \frac{1}{4}T$  dla dowolnego  $t_1 \in \mathbb{R}$  na podstawie wzoru (8) uzyskuje się:

$$\begin{aligned} X &= (A + jB)e^{-j\omega t_1} = \\ &= (x(t_1) + jx(t_1 + \frac{1}{4}T))e^{-j\omega t_1} = \\ &= (x(t_1) + jx(t_2))e^{-j\omega t_1}. \end{aligned} \quad (9)$$

### 3. Konstrukcja układu pomiarowego

Do wyznaczania podstawowych parametrów dwójnika służy układ przedstawiony na rysunku 1.



Rys. 1. Schemat układu pomiarowego  
Fig. 1. Schematic diagram of the measuring circuit

Składa się on z 11 podstawowych elementów. Pierwszym z nich jest układ zasilający generujący prąd sinusoidalnie zmienny. Drugim elementem jest badany dwójnik  $Z$ . Pomiedzy wymiennymi dwoma elementami znajduje się połączony łańcuchowo czwórnik pomiarowy z rezystorem  $R_p$  umożliwiający pomiar prądu i napięcia na badanym dwójniku. Do czwórnika podłączone są dwa wzmacniacze pomiarowe o wzmocnieniach odpowiednio  $k_1$  i  $k_2$  kondycjonujące sygnały pomiarowe z czwórnik pod kątem zakresu przetwornika analogowo-cyfrowego (ADC). Do skondycjonowanego sygnału pomiarowego napięcia na dwójniku podłączona jest pętla fazowa PLL z licznikiem  $4N$ , na której wyjściu jest sygnał prostokątny zsynchronizowany z sygnałem napięciowym dwójnika, przy czym jego częstotliwość jest  $4N$  razy większa (w najprostszym przypadku  $N=1$ ). Sygnał z pętli podawany jest do dzielnika częstotliwości (Dz. Cz.), dzielący częstotliwość  $4N$  razy, czyli przez pół okresu sygnału napięciowego na dwójniku na multiplexer (MUX) jest podawana wartość 0 a przez drugie pół okresu wartość 1. Oznacza to, że układ naprzemiennie przez pół okresu wykonuje  $2N$  pomiarów prądu i napięcia. Sygnały wyjściowe z pętli PLL i dzielnika częstotliwości

oraz cyfrowa wartość z przetwornika ADC podawane są do mikrokontrolera ( $\mu C$ ), który przetwarza zebrane dane i wysyła uzyskane wyniki za pomocą interfejsu (Interface).

### 4. Opis metody pomiaru

Jeżeli  $N=1$ , napięcie jest mierzone w czasie  $t_1$  i  $t_2$ , zaś prąd w czasie  $t_3$  i  $t_4$ , gdzie spełniona jest zależność:

$$t_1 = t_2 - \frac{1}{4}T = t_3 - \frac{1}{2}T = t_4 - \frac{3}{4}T, \quad (10)$$

to amplitudy zespolone napięcia i prądu przyjmują odpowiednio postać:

$$U = (u(t_1) + ju(t_2))e^{-j\omega t_1}, \quad (11)$$

$$\begin{aligned} I &= (i(t_3) + ji(t_4))e^{-j\omega t_3} = \\ &= (i(t_3) + ji(t_4))e^{-j\omega(t_3 + \frac{1}{2}T)} = \\ &= (i(t_3) + ji(t_4))e^{-j\omega t_3} e^{-j\pi} = \\ &= -(i(t_3) + ji(t_4))e^{-j\omega t_3}. \end{aligned} \quad (12)$$

Stąd można wyznaczyć odpowiednio amplitudę napięcia i prądu dwójnika:

$$|U| = \sqrt{u^2(t_1) + u^2(t_2)}, \quad (13)$$

$$|I| = \sqrt{i^2(t_3) + i^2(t_4)}, \quad (14)$$

oraz ich wartości skuteczne:

$$U_{sk} = \sqrt{\frac{u^2(t_1) + u^2(t_2)}{2}}, \quad (15)$$

$$I_{sk} = \sqrt{\frac{i^2(t_3) + i^2(t_4)}{2}}. \quad (16)$$

Jednocześnie ze wzorów (11) i (12) uzyskuje się wartość mocy zespolonej:

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2}UT^* = \\ &= -\frac{1}{2}(u(t_1)i(t_3) + u(t_2)i(t_4)) + \\ &+ j\frac{1}{2}(u(t_1)i(t_4) - u(t_2)i(t_3)), \end{aligned} \quad (17)$$

na podstawie której można wyznaczyć odpowiednio moc czynną, bierną, pozorną oraz współczynnik mocy  $\cos \varphi$ :

$$P = \text{Re}(S) = -\frac{1}{2}(u(t_1)i(t_3) + u(t_2)i(t_4)), \quad (18)$$

$$Q = \text{Im}(S) = \frac{1}{2}(u(t_1)i(t_4) - u(t_2)i(t_3)), \quad (19)$$

$$|S| = \frac{1}{2}\sqrt{(u^2(t_1) + u^2(t_2))(i^2(t_3) + i^2(t_4))}, \quad (20)$$

$$\cos \varphi = -\frac{u(t_1)i(t_3) + u(t_2)i(t_4)}{\sqrt{(u^2(t_1) + u^2(t_2))(i^2(t_3) + i^2(t_4))}}. \quad (21)$$

Ponadto ze wzorów (11) i (12) otrzymuje się wartość impedancji dwójnika:

$$\begin{aligned} Z &= \frac{U}{I} = \\ &= -\frac{u(t_1) + ju(t_2)}{i(t_3) + ji(t_4)} = \\ &= -\frac{u(t_1)i(t_3) + u(t_2)i(t_4)}{i^2(t_3) + i^2(t_4)} + j\frac{u(t_1)i(t_4) - u(t_2)i(t_3)}{i^2(t_3) + i^2(t_4)}, \quad (22) \end{aligned}$$

na podstawie której można wyznaczyć odpowiednio rezystancję reaktancję oraz moduł impedancji (zawada) i współczynnik przesunięcia fazowego  $\text{tg } \varphi$ :

$$R = \text{Re}(Z) = -\frac{u(t_1)i(t_3) + u(t_2)i(t_4)}{i^2(t_3) + i^2(t_4)} \quad (23)$$

$$Q = \text{Im}(Z) = \frac{u(t_1)i(t_4) - u(t_2)i(t_3)}{i^2(t_3) + i^2(t_4)} \quad (24)$$

$$|Z| = \sqrt{\frac{u^2(t_1) + u^2(t_2)}{i^2(t_3) + i^2(t_4)}} \quad (25)$$

$$\text{tg } \varphi = \frac{u(t_2)i(t_3) - u(t_1)i(t_4)}{u(t_1)i(t_3) + u(t_2)i(t_4)} \quad (26)$$

Dodatkową zaletą wzorów (13) – (26) jest identyczna postać, niezależnie od tego czy najpierw jest mierzone napięcie a potem prąd (wzór (10)), czy na odwrót, kiedy:

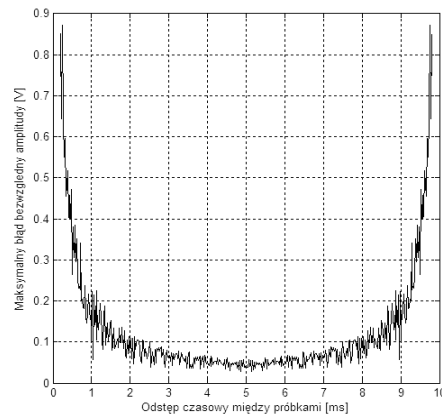
$$t_3 = t_4 - \frac{1}{4}T = t_1 - \frac{1}{2}T = t_2 - \frac{3}{4}T. \quad (27)$$

Oznacza to, że w powyższym układzie stosując te same wzory, wyniki można wyznaczać co drugi pomiar, czyli co połowę okresu, przy czym całkowity czas pomiaru wynosi  $\frac{3}{4}T$ . Zwiększając wartości stałej  $N$  można zwiększyć liczbę wyników do  $2N$  na okres, natomiast czas pomiaru jest stały i zawsze wynosi  $\frac{3}{4}T$ . Wynika stąd, że zwiększanie  $N$  ma wpływ jedynie na częstotliwość pomiarów, natomiast czas pomiaru pozostaje stały. Wzrost częstotliwości pomiarów ma znaczenie w przypadku, gdy chcemy na przykład stosować metodę uśredniania wyników w celu filtrowania szumu.

## 5. Przykładowa analiza

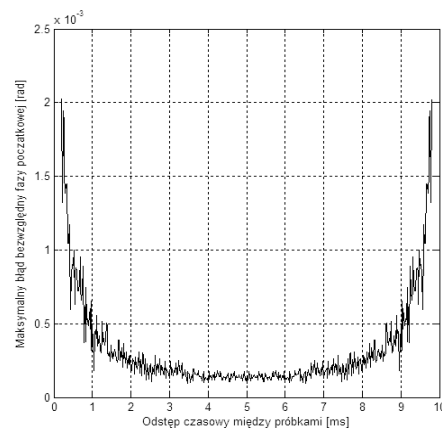
W celu weryfikacji wzoru (5), będącego podstawowym wzorem wyjściowym dla dalszych przekształceń, wykonana została symulacja pomiaru amplitudy i fazy dla różnych faz początkowych i odstępów czasowych między próbkami. Wykresy maksymalnego błędu bezwzględnego pomiaru amplitudy i fazy początkowej w zależności od odstępu czasowego, uzyskane za pomocą symulacji, przedstawione są odpowiednio na rysunkach 2 i 3.

Przyjęto, że badany jest sygnał sinusoidalny o częstotliwości  $f = 50\text{Hz}$  ( $T = 20\text{ms}$ ) i wartości skutecznej  $U_{sk} = 230\text{V}$ , co daje wartość amplitudy  $|U| = 325,26\text{V}$ . Przyjęto, że do badań wykorzystany został przetwornik mierzący napięcie chwilowe z dokładnością  $0,1\text{V}$ . Pomiaru wykonano dla odstępu czasowego  $t_2 - t_1 = 0,2 \div 9,8\text{ms}$  co  $0,02\text{ms}$  i fazy początkowej  $\varphi = 0 \div 2\pi$  co  $0,1\pi$ . Z wykresów wynika że najmniejszy błąd bezwzględny zarówno dla amplitudy jak i fazy uzyskuje się dla odstępu czasowego  $t_2 - t_1 = 5\text{ms}$  odpowiadającemu  $\frac{1}{4}T$ .



Rys. 2. Wykres błędu bezwzględnego amplitudy w zależności od odstępu czasowego między próbkami

Fig. 2. The absolute error of the amplitude vs. the time interval between two samples



Rys. 3. Wykres maksymalnego błędu bezwzględnego fazy początkowej w zależności od odstępu czasowego między próbkami.

Fig. 3. The maximum absolute error of the initial phase vs. the time interval between two samples

## 6. Wnioski

Do wyznaczania wartości impedancji lub mocy zespolonej zawsze potrzebne są dwie liczby zespolone, czyli cztery próbki o wartościach rzeczywistych. Jednocześnie stosując próbkowanie co  $\frac{1}{4}T$  uzyskuje się najprostsze wzory obliczeniowe pozbawione współczynników niewymiernych. Dodatkowo stosując pętlę PLL możliwe jest omińnięcie wyznaczania częstotliwości oraz związanych z nią funkcji trygonometrycznych. Ponieważ wyznaczanie funkcji trygonometrycznych i operacje zmiennoprzecinkowe są najbardziej czasochłonne, więc ich eliminacja ma znaczący wpływ na skrócenie czasu obliczeń i zapotrzebowania na moc obliczeniową procesora. Dodatkowo z przykładowej analizy badania amplitudy i fazy początkowej sygnału sinusoidalnego wynika, że zaproponowana metoda jest również najbardziej dokładną metodą spośród metod wykorzystujących minimalną liczbę próbek.

## 7. Literatura

- [1] Krajewski M.: Analiza właściwości wybranych algorytmów cyfrowego przetwarzania sygnałów w pomiarze zespolonego stosunku napięć. Oficyna Wydawnicza Uniwersytetu Zielonogórskiego, Zielona Góra 2010.
- [2] Krzyk P.: Comparative analysis of weakly non-linear self-excited oscillations in autonomous analogue and digital circuits, University of Zielona Góra Press, Zielona Góra 2011.