

Anna DOMAŃSKA

POLITECHNIKA POZNAŃSKA, KATEDRA SYSTEMÓW TELEKOMUNIKACYJNYCH I OPTOELEKTRONIKI,
ul. Polanka 3, 60-965 Poznań

Skuteczność cyfrowego uśredniania koherentnego przy nieidealnej synchronizacji

Dr hab. inż. Anna DOMAŃSKA

Ukończyła studia na Wydziale Elektrycznym Politechniki Poznańskiej w 1979 r. i na Wydziale Mat-Fiz-Chem Uniwersytetu Wrocławskiego w 1984 r. W 1987 r. uzyskała stopień doktora n.t. a w 1996 r. stopień doktora habilitowanego n.t., obydwie na Wydziale Elektrycznym PP. Główne zainteresowania naukowe dotyczą systemów pomiarowych z cyfrowym algorytmem pomiaru oraz teorii i zastosowań konwersji a-c z sygnałem ditherowym. Jest członkiem Komitetu Metodologii i Aparatury Naukowej PAN.



e-mail: domanska@et.put.poznan.pl

Streszczenie

Artykuł przedstawia zagadnienie oceny wpływu nieidealnej synchronizacji na wartości próbek sygnału będącego rezultatem cyfrowego uśredniania koherentnego. Podano zależność określającą wariancję wartości sygnału po uśrednieniu, z powodu błędu synchronizacji. W przypadku sygnału sinusoidalnego, wariancja ta zależy od: wariancji błędu synchronizacji, amplitudy, relacji między częstotliwością sygnału i częstotliwością próbkowania oraz od liczby próbek. Przy niezerowym błędzie synchronizacji, uśrednianie koherentne redukuje szum addytywny powodując niekieształcenia chwilowych wartości sygnału będących wynikiem uśredniania.

Słowa kluczowe: uśrednianie koherentne, synchronizacja.

The efficiency of digital cumulative averaging at non ideal synchronization

Abstract

Digital cumulative averaging (CAV) is a form of the digital filtration and belongs to the methods for noise reduction in repeatable signals. An advantage distinguishing CAV from the usual digital filtration is that it also causes noise reduction in the signal band. The CAV algorithm realizes two operations: synchronization of segments and coherence averaging of samples. The paper presents the problem of evaluating the influence of non ideal synchronization on the value of samples of the signal being the CAV result. If the synchronization error does not occur, CAV reducing the noise does not change the recovered signal value. For the non-zero synchronization error, CAV reducing the noise causes distortions of temporary values of this signal. The synchronization error influences the error of the sample value and, in consequence, the error of the CAV result. The CAV efficiency depends, in such a case, on the synchronization accuracy of the converted segments. Section 2 describes the system CAV structure. In Section 3 there is given the dependence defining the variance of the single sample $Var[y_x(i)]$ and the sample $Var[y(i)]$ obtained from CAV caused by the synchronization error. In the case of sinusoidal signals, the variance of the result (samples of the signal after CAV) due to the synchronization error depends on: the synchronization error variance, the amplitude, the relation between the signal frequency and the sampling frequency as well as the number of the averaged samples/ repetitions. One can determine the limit value of this variance.

Keywords: cumulative averaging, synchronization.

1. Wstęp

Cyfrowe uśrednianie koherentne CAV (cumulative averaging) jest formą cyfrowej filtracji i należy do metod redukcji szumów w sygnale. Ma zastosowanie do sygnałów periodycznych bądź sygnałów powtarzalnych przy wielokrotnym ich pozyskiwaniu, zakłóconych addytywnym szumem będącym sygnałem losowym nieskorelowanym z sygnałem badanym. CAV jest stosowana między innymi w przetwarzaniu sygnałów biomedycznych, badaniach maszyn i układów napędowych, badaniach zjawisk cyklicznych. Algorytm CAV jest stosowany także w systemach konwersji

a-c z sygnałem ditherowym, w których sygnał badany jest przetwarzany łącznie z dodatkowym sygnałem (najczęściej szumowym), dzięki czemu błąd kwantowania ulega randomizacji oraz dekorelacji z sygnałem badanym. Błąd kwantowania można wówczas wyeliminować lub znacząco zredukować stosując filtrację. Redukcji ulega także błąd spowodowany nieliniowością różnicową DNL przetwornika A/C, którego widmo ma strukturę szumową.

W systemach z cyfrowym algorytmem pomiaru, próbki ewidencjonowanego sygnału są danymi wykorzystywanymi do estymacji prawdziwej wartości wielkości mierzonej. Stąd wynika postulat, by w wyniku procesu dyskretyzacji treść sygnału nie ulegała zmianie. W praktyce oznacza to dążenie do możliwie wiernego jej zachowania, czyli takiej dyskretyzacji, przy której wartości próbek możliwie wiernie odpowiadałyby wartościom chwilowym sygnału pierwotnego, z którego pochodzą. Algorytm CAV jest ostatnim etapem konwersji a-c z sygnałem ditherowym (dyskretyzacji). Stąd też istotne jest by można było ocenić, jaki jest wpływ tej operacji na wartości próbek ewidencjonowanego sygnału.

Istotną zaletą odróżniającą CAV od zwykłej filtracji cyfrowej jest to, iż w efekcie zachodzi redukcja szumów także w paśmie sygnału, co sprzyja spełnieniu wyżej sformułowanego postulatu. W zwykłej filtracji eliminowany/redukowany jest szum na zewnątrz pasma przepustowego filtra natomiast szum w paśmie przepustowym, czyli w paśmie sygnału pozostaje. W idealnym przypadku CAV oddziałując na szum nie wpływa na wartości odzyskiwanego sygnału.

Zasady CAV przybliżono między innymi w [1] gdzie rozważano skuteczność tego algorytmu w redukcji losowego składnika (szumu addytywnego) występującego łącznie z sygnałem deterministycznym. Celem poniższych rozważań jest określenie wpływu nieidealnego zsynchronizowania uśrednianych wycinków sygnału na zmianę każdej wartości próbki oraz na wynik CAV.

2. Algorytm CAV w rzeczywistym układzie konwersji analogowo-cyfrowej

Na rezultat CAV w rzeczywistym układzie konwersji a-c mają wpływ błędy związane z niestałością związków fazowych między próbkami. Błędy te to: jitter powstający w układzie próbkująco-pamiętającym (aperturowy, zegara i układu sterującego kluczem), jitter źródła sygnału oraz błąd synchronizacji.

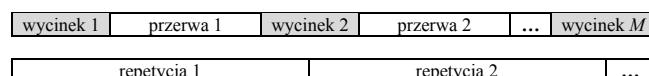
Algorytmowi CAV poddawany jest sygnał zdyskretyzowany będący sumą wielkości deterministycznej x i losowej n , którego i -tą próbkę można zapisać następująco:

$$y(t_i) = x(t_i + \tau_i) + n(t_i), \quad (1)$$

gdzie: τ_i - suma błędów wynikających z jitteru, obciążających i -tą próbkę, n - suma wszystkich rodzajów szumów, obciążających i -tą próbkę.

Błędy związane z niestałością związków fazowych między próbkami nie wpływają na parametry szumu addytywnego. Przenoszą się na wynik CAV poprzez składową deterministyczną toteż dalsze rozważania można ograniczyć do tej składowej.

Ewidencjonowany sygnał dzielony jest na repetycje, bądź też repetycje te mogą być wynikiem odrębnych rejestracji sygnału.



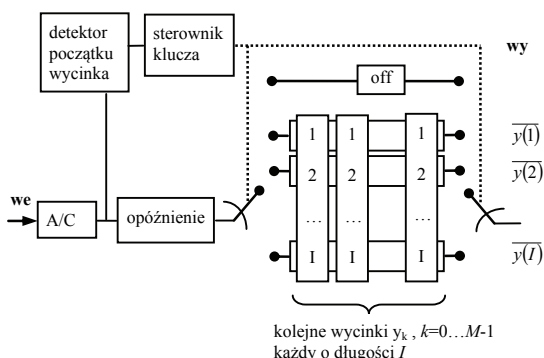
Rys. 1. Struktura rejestrowanego sygnału poddawane CAV
Fig. 1. Structure of the recorded signal subjected to CAV operation

Przyjęto, iż zbiór wycinków/repetycji jest M elementowy. W każdym wycinku jest I próbek ($i=1, \dots, I$). Zbiór próbek z k -tego wycinka ma postać:

$$\{y_k(t_i) = x_k(t_i + \tau_{ik} + \Delta_k), \quad i = 1, \dots, I\} \quad (2)$$

gdzie: τ_{ik} - błąd wynikający z jitteru, obciążający i -tą próbkę z k -tego wycinka, Δ_k - błąd synchronizacji w k -tym wycinku (jednakowy dla wszystkich próbek z tego wycinka).

Strukturę systemu filtracji CAV przedstawiono na rys. 2.



Rys. 2. Struktura systemu CAV
Fig. 2. Structure of the CAV system

Wszystkie wycinki są identycznej długości, w sensie liczby próbek. Podobnie przerwy - także mają identyczne długości. Natomiast długość wycinka i przerwy nie muszą być takie same. Wycinki są rozłączne. Czas trwania każdej repetycji jest całkowitą wielokrotnością okresu sygnału x .

Algorytm CAV realizuje dwie operacje: *synchronizowanie* wycinków i *uśrednianie synfazowe* próbek. *Synchronizowanie* polega na wyznaczaniu próbek pierwszych z każdego wycinka, np. według zasady „pierwsza próbka po zmianie znaku, na zboczu narastającym, po przerwie”. W idealnym przypadku zachodzi pełna synchronizacja, czyli wszystkie uśredniane i -te próbki z każdego wycinka mają tę samą fazę względem początków wycinków, z których pochodzą. W praktyce synchronizacja jest osiągnięta z pewnym przybliżeniem i występuje błąd synchronizacji. Źródła błędów synchronizacji i jitteru są niezależne. Można zatem wpływ tych błędów na wynik CAV rozpatrywać oddzielnie. Dalsze rozważania ograniczono do przypadku występowania tylko błędu synchronizacji. Wówczas zbiór próbek z k -tego wycinka ma postać:

$$\{y_k(t_i) = x_k(t_i + \Delta_k), \quad i = 1, \dots, I\}. \quad (3)$$

Uśrednianie synfazowe próbek z k -wycinków może być przedstawione następująco:

$$\overline{y(i)} = \frac{1}{M} \sum_{k=0}^{M-1} y_k(i), \quad (4)$$

gdzie: $y_k(i)$ - i -ta próbka sygnału z k -tego wycinka, $\overline{y(i)}$ - i -ta próbka sygnału po CAV.

3. Wariancja wartości próbek sygnału wynikająca z błędu synchronizacji

W wyniku rozrzutu momentu rozpoczęcia akwizycji każdego z wycinków nominalny początek akwizycji kolejnego wycinka w rzeczywistości może być przyspieszony lub opóźniony. Przyspieszenie/opóźnienie początku danego wycinka skutkuje przyspieszeniem/opóźnieniem jednakowym dla wszystkich następujących po sobie próbek z tego wycinka. Natomiast fazy i -tych próbek z różnych wycinków cechują się rozrzutem takim jak rozrzut

początków wycinków, z których próbki te pochodzą. Szczegółową postać zależności (4), uwzględniając (3), można zapisać:

$$\begin{aligned} \overline{y(i)} &= \frac{1}{M} \sum_{k=0}^{M-1} y_k(i) = \\ &= \frac{1}{M} [x_0(t_i + \Delta_0) + \dots + x_{M-1}(t_i + \Delta_{(M-1)})] \end{aligned} \quad (5)$$

Ponieważ błędy synchronizacji i -tych próbek branych do uśrednienia, pochodzą z różnych wycinków - z doświadczeń niezależnych, zmienna losowa $\{\Delta_k, k = 0, \dots, M-1\}$ jest niezależna. Przyjęto, iż jej wartość średnia wynosi 0 a rozkład jest równomierny. Skorelowanie próbek sygnału w pojedynczym wycinku nie ma znaczenia. Nie tworzą one bowiem zbioru próbek, które podlegają uśrednieniu.

Występowanie błędu synchronizacji, z powodu którego fazy uśrednianych próbek stają się zmiennymi losowymi, przenosi się na błąd wartości wyniku CAV. Miarą tego błędu jest niepewność wartości wyniku CAV.

Wariancję wartości i -tej próbki sygnału y , z powodu błędu Δ , można określić w poniższy sposób [2]:

$$\begin{aligned} y(t_i) = x(t_i + \Delta) \rightarrow \text{Var}[y(t_i)] &= \text{Var}[x(t_i + \Delta)] = \\ &= [x'(t_i + \Delta)]^2 \cdot \text{Var}[\Delta] = [x'(t_i)]^2 \cdot \text{Var}[\Delta] \end{aligned} \quad (6)$$

gdzie: Δ - zmienna losowa i $\overline{\Delta} = 0$, x - sygnał, funkcja ciągła, różniczkowalna.

W przypadku sygnału sinusoidalnego, czyli:

$$\begin{aligned} y(t) &= A \sin[\omega(t + \Delta)] = A \sin(\omega t + \omega \Delta) \rightarrow \\ \rightarrow y(i) &= A \sin\left(2\pi \frac{f_y}{f_s} i + 2\pi f_y \Delta\right) \end{aligned} \quad (7)$$

gdzie: f_y - częstotliwość sygnału y , f_s - częstotliwość próbkowania.

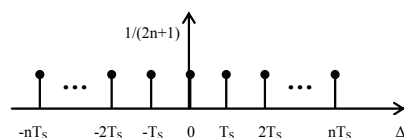
Wykorzystując wzór $\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cdot \cos \beta + \cos \alpha \cdot \sin \beta$ i zależność (6), wariancja i -tej próbki z k -tego wycinka jest określona następująco:

$$\text{Var}[y_k(i)] = A^2 (2\pi f_y)^2 \cos^2\left(2\pi \frac{f_y}{f_s} i\right) \cdot \text{Var}[\Delta_k]. \quad (8)$$

Stąd wariancja wyniku CAV z powodu błędu synchronizacji ma postać:

$$\begin{aligned} \text{Var}[\overline{y(i)}] &= \text{Var}\left[\frac{1}{M} \sum_{k=0}^{M-1} y_k(i)\right] = \frac{1}{M^2} \sum_{k=0}^{M-1} \text{Var}[y_k(i)] \\ &= A^2 (2\pi f_y)^2 \cos^2\left(2\pi \frac{f_y}{f_s} i\right) \frac{1}{M^2} \sum_{k=0}^{M-1} \text{Var}[\Delta_k] \end{aligned} \quad (9)$$

Ponieważ błąd synchronizacji i -tych próbek branych do uśrednienia jest zmienną losową niezależną, zmienna losowa $\{y_k(i), k = 0, \dots, M-1\}$ będąca funkcją tej zmiennej jest także niezależna [2].



Rys. 3. Rozkład prawdopodobieństwa zmiennej losowej $\{\Delta_k\}$
Fig. 3. Probability distribution of random variable $\{\Delta_k\}$

Synchronizacja dotyczy sygnałów zdyskretyzowanych, więc błąd synchronizacji jest zmienną losową dyskretną, której wartości są krotnością okresu próbkowania T_S . Rozkład prawdopodobieństwa tej zmiennej przedstawia rysunek 3.

Wariancja zmiennej losowej $\{\Delta_k\}$ wynosi:

$$\text{Var}[\Delta_k] = \frac{1}{2n+1} \sum_{l=-n}^n (lT_S)^2 = \frac{n(n+1)}{3f_S^2} \quad (10)$$

Wówczas zależność (9) sprowadza się do postaci:

$$\text{Var}[y(i)] = \frac{n(n+1)}{3M} (A\pi)^2 \left(2\frac{f_y}{f_S}\right)^2 \cos^2\left(2\pi\frac{f_y}{f_S}i\right). \quad (11)$$

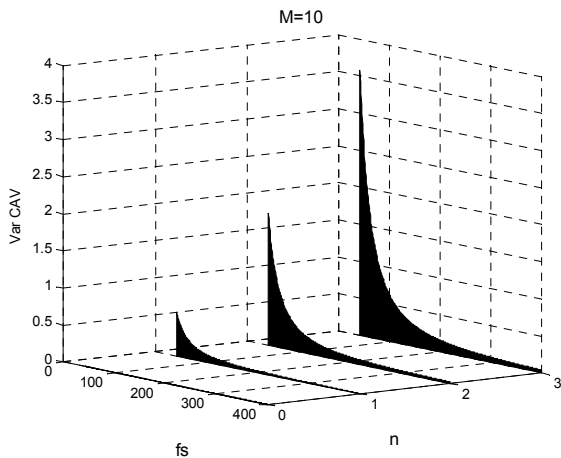
Maksymalna wartość wariancji wyniku CAV (11), przy założeniu spełnienia twierdzenia o próbkowaniu, jest wartością z przedziału:

$$C \cdot \left(2\frac{f_y}{f_S}\right)^2 \leq \text{Var}[y(i)]_{MAX} < C, \quad (12)$$

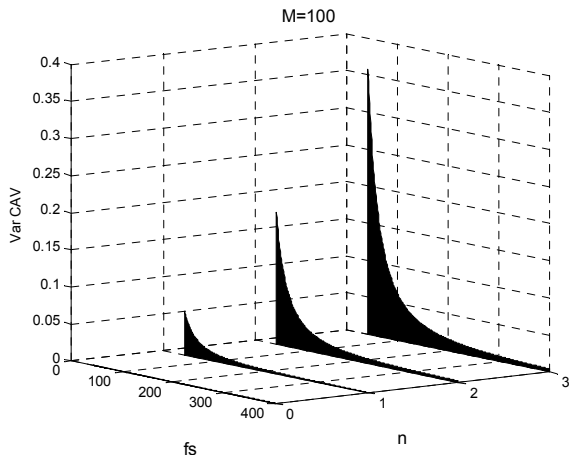
gdzie: $C = \frac{n(n+1)}{3M} (A\pi)^2$; przy czym $f_S > 2f_y \rightarrow \left(2\frac{f_y}{f_S}\right)^2 < 1$.

Zależność wariancji wyniku CAV od rozmiaru błędu synchronizacji n (por. rys. 3) i częstotliwości próbkowania f_S , dla różnej liczby uśrednianych wycinków M sygnału sinusoidalnego ($A=1$, $f_y=20$ Hz) przedstawia rys. 4.

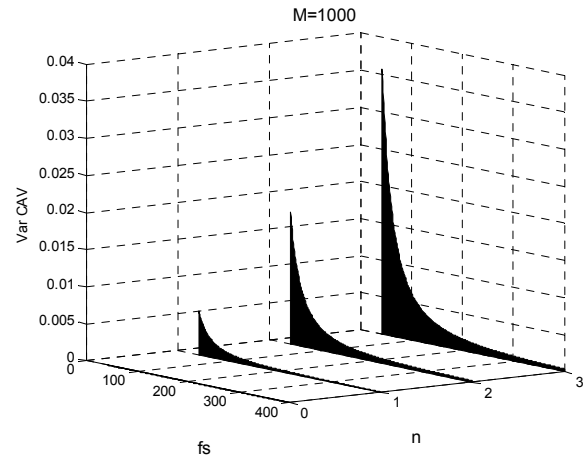
a)



b)



c)



Rys. 4. Wariancja wyniku CAV dla różnej liczby uśrednianych wycinków: a) $M=10$, b) $M=100$, c) $M=1000$

Fig. 4. Variance of the CAV result for a different number of averaged segments

Wpływ błędu synchronizacji n jest istotny przy niskim nadpróbkowaniu i wówczas także silnie zależy od M . Jeśli zaś $f_S > 100$ Hz (nadpróbkowanie $f_S/f_y > 5$) wariancja wyniku CAV ulega znaczącej redukcji i przy $f_S > 200$ Hz (nadpróbkowanie $f_S/f_y > 10$) staje się zanedbywalnie mała i praktycznie niezależna od n oraz M .

Jak wynika z rys. 4a, poniżej pewnej liczby uśrednianych wycinków ($M=10$) wartość wariancji z powodu błędu synchronizacji staje się nie do zaakceptowania. Na podstawie zależności (12) można określić taką M , przy której wartość ta nie przekroczy zadanej granicy.

4. Wnioski

Zaletą odróżniającą CAV od zwykłej filtracji cyfrowej jest to, iż w efekcie zachodzi redukcja szumów także w paśmie sygnału.

Przy niewystępowaniu błędu synchronizacji, CAV redukując szum nie zmienia wartości odzyskiwanego sygnału. Przy niez zerowym błędzie synchronizacji, CAV redukując szum powoduje zniekształcenia chwilowych wartości tego sygnału. Skuteczność CAV zależy w takim przypadku od dokładności synchronizacji przetwarzanych wycinków. Błąd synchronizacji przenosi się na błąd wartości próbek i w efekcie na błąd wyniku CAV.

W przypadku sygnałów sinusoidalnych, wariancja wyniku (bieżącej próbki sygnału po CAV) z powodu błędu synchronizacji zależy od: wariancji błędu synchronizacji, amplitudy, relacji między częstotliwością sygnału i częstotliwością próbkowania oraz od liczby uśrednianych próbek/repetycji. Można określić graniczną wartość tej wariancji.

5. Literatura

- [1] Domańska A.: Ocena wariancji wyniku cyfrowej filtracji uśredniającej, PAK, Vol. 55, Nr 9, 2009.
- [2] Papoulis A., Probability, Random Variables, and Stochastic Processes, McGraw-Hill, New York, 1991.

otrzymano / received: 28.06.2012

przyjęto do druku / accepted: 02.08.2012

artykuł recenzowany / revised paper