

**Adam ŻUCHOWSKI**

ZACHODNIOPOMORSKI UNIWERSYTET TECHNOLOGICZNY W SZCZECINIE, KATEDRA STEROWANIA I POMIARÓW  
ul. 26 Kwietnia 10, 71-126 Szczecin

**Prosta metoda pomiaru prognozy zmian mesurandu w funkcji czasu**

Prof. dr hab. inż. Adam ŻUCHOWSKI

Profesor zwyczajny zatrudniony w Katedrze Sterowania i Pomiarów w Zachodniopomorskim Uniwersytecie Technologicznym. Ze szkolnictwem wyższym związany zawodowo od 1955 roku (Politechnika Wroclawska, Politechnika Szczecińska). Jest współtwórcą polskiej szkoły miernictwa dynamicznego, posiada w dorobku około 350 publikacji. W kwietniu 2010 roku upłynęło 55 lat jego działalności naukowej.



e-mail: adam.zuchowski@zut.edu.pl

**Streszczenie**

Prognozowanie zmian pewnej wielkości fizycznej w funkcji czasu może się odbywać z wykorzystaniem znajomości jej aktualnego stanu (pomiar) i znajomości ogólnych praw, lub reguł, którym te zmiany podlegają, albo wyłącznie na podstawie wyników pomiarów i określonych algorytmów prognozowania. Zaprezentowana zostanie metoda oparta o takie właśnie założenia, umożliwiającą praktycznie ciągły pomiar prognozy w przypadku sygnałów o stosunkowo gładkim przebiegu.

**Słowa kluczowe:** prognozy, metoda pomiaru, dokładność.

**Simple Measurement Method for Forecast of Mesurand Variations****Abstract**

The forecast of variations of certain physical quantity can be done on the basis of its present state (result of measurement) and information on general rules describing possible state variations. Alternatively, one can design the forecast procedure using measurement results and dedicated algorithms for prediction. The paper presents the method using such alternative assumptions. Using this method one can obtain the continuous measurement of forecast for relatively smooth signals.

**Keywords:** forecasts, measurement method, accuracy.

**1. Wstęp**

Prognozowanie, to jest przewidywanie stanów przyszłych jakiegoś zjawiska, można wykonać w dwojaki sposób: albo wykorzystując jego model o tak zwanej „zasadności prognostycznej” i znajomość stanu aktualnego, albo – przy całkowitym braku takiego modelu – wykorzystując informacje uzyskane na drodze pomiarów.

Pierwsza metoda pozwala tworzyć prognozy nawet o rozległym horyzoncie czasowym, ale na ogół wymaga dłuższego czasu na opracowanie prognozy, druga – odwrotnie, jeśli zastosuje się właściwą metodę obliczeniową i spełnione będą warunki, które sprecyzujemy w dalszej części artykułu. Zajmiemy się tą drugą metodą.

Terminem „prognoza zmian sygnału  $x(t)$  w czasie” określimy zależność  $x(t+v)_p$  uzyskiwaną w oparciu o pomiar sygnału  $x(t)$  i wyznaczoną dla zmian  $v$  w zadanym przedziale czasu  $0 \leq v \leq v_{\max}$  przy ciągłych zmianach chwili bieżącej  $t$ . Przyjmując, że sygnał  $x(t)$  należy do kategorii „gładkich” wolno posłużyć się rozwinięciem  $x(t+v)$  w szereg Taylora, z wykorzystaniem kilku pierwszych członów tego rozwinięcia [1, 6]:

$$x(t+v)_p \cong \sum_{i=0}^k \frac{1}{i!} v^i \cdot x^{(i)}(t) \quad (1)$$

z błędem nie przekraczającym wartości:

$$D \leq \frac{1}{(k+1)!} v^{k+1} \cdot x_{\max}^{(k+1)}(t+v). \quad (2)$$

Oznacza to jednak konieczność wyznaczania pochodnych  $x^{(k)}(t)$  w oparciu o pomiar  $x(t)$  co prowadzi do znacznych błędów – zwłaszcza przy obecności zakłóceń sygnału obserwowanego  $x(t)$ . Problemem jest także uzyskiwanie wartości prognozy dla wszystkich chwil  $v$  z przedziału  $0 \leq v \leq v_{\max}$ , to jest tworzenie wykresu zależności  $x(t+v)_p = f(v)$ , aktualizowanego dla kolejnych chwil czasu bieżącego  $t$ . Proponowana metoda wykorzystuje wstępną filtrację sygnału  $x(t)$  celem zmniejszenia wpływu zakłóceń, użycia pochodnych  $x^{(k)}(t)$ , oraz zwiększenia stopnia gładkości sygnału prognozowanego.

**2. Opis metody**

Prognoza (1) zostanie w istocie wyznaczona dla pewnego zastępczego sygnału  $y(t)$  uzyskiwanego poprzez filtrację sygnału  $x(t)$  przeprowadzoną zgodnie z arbitralnie przyjętą zależnością:

$$\sum_{i=0}^n a_i \cdot y^{(i)}(t) = x(t), \quad a_0 = 1, \quad n \geq k \quad (3)$$

a więc przy transmitancji filtru o postaci:

$$K(s) = \frac{1}{1 + a_1 \cdot s + \dots + a_n \cdot s^n}, \quad (4)$$

realizowanego z wykorzystaniem integratorów i sumatora [1], co umożliwia uzyskanie jednoczesne sygnału  $y(t)$  i jego pochodnych aż do rzędu  $n$ , przy wprowadzeniu na wejście filtru zakłóconego sygnału  $x(t)$ . Rząd filtru  $n$  i jego parametry należy dobrać właśnie z uwzględnieniem typu i intensywności zakłóceń. Przy ich braku i jeśli sygnał  $x(t)$  jest dostatecznie „gładki” – należy parametry te dobrać tak, by proces przejściowy filtru trwał krótko, a charakterystyka przenoszenia filtru była możliwie płaska, co zapewnia znaczne podobieństwo przebiegów  $x(t)$  i  $y(t)$ .

W rzeczywistości sygnał  $x(t)$  po przejściu przez filtr zostaje w przybliżeniu [4] opóźniony o czas  $t_0 = a_1$ , co można skorygować przyjmując odpowiednio większą wartość  $v_{\max}$ .

Ponieważ dostępne obserwacjom są teraz sygnał  $y(t)$  i jego  $n$  pochodnych – można wykorzystując dodatkowy sumator utworzyć zależność:

$$y(t+u)_p = \sum_{i=0}^k \frac{1}{i!} u^i \cdot y^{(i)}(t) \quad (5)$$

Przyjmując określoną wartość  $v$  – na przykład  $v = v_{\max} = \text{const}$ . otrzymuje się dla każdej chwili  $t$  aktualną wartość prognozy według zależności (5). Można jednak generować przebiegi  $u(v)$  tak, by  $u(v)$  zmieniało się okresowo w zadanym przedziale  $0 \leq u(v) \leq u_{\max}$  i jeśli okres tych powtarzających się zmian będzie dostatecznie krótki – otrzyma się po czasie równym długości tegoż okresu – wykres zmian prognozy w zadanym zakresie dla przedziału czasowego  $(t, t+t_{\text{okresu}})$ , powtarzany kolejno - następny w przedziale  $(t+t_{\text{okresu}}, t_{\text{okresu}})$ , itp.

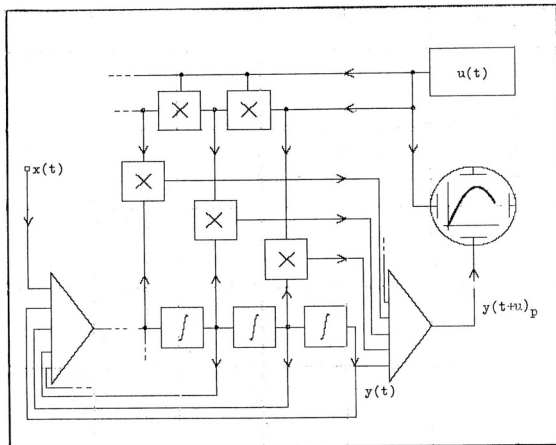
Można w tym celu przyjmując np.

$$u(t) = \frac{1}{2} \cdot u_{\max} \cdot [1 - \cos(\omega \cdot t)] \quad (6)$$

dla dostatecznie dużych pulsacji  $\omega$  i przy użyciu oscyloskopu tworzyć wykres o osiach:

$$X = u(t), \quad Y = y(t+u(t)) \quad (7)$$

Realizacja układu oprócz filtru wymaga wykorzystania generatora sygnału  $u(t)$  i szeregu mnożarek. Schemat układu pokazano na rys. 1.



Rys. 1. Schemat układu pomiarowego prognozy  $y(t+u)_p$   
Fig. 1. The scheme of system for measurement of forecast  $y(t+u)_p$

### 3. Optymalizacja układu pomiarowego

Założmy, że należy wyznaczyć prognozy zmian sygnału wejściowego  $x(t+u)$  o gęstości mocy  $G_x(\omega)$  w obecności losowych, nieskorelowanych z tym sygnałem zakłóceń  $z(t)$  o gęstości widma mocy  $G_z(\omega)$ . Jako kryterium jakości można przyjąć średniokwadratowy błąd  $\bar{d}^2$ , przy tym:

$$d(t) = y(t+u)_p - x(t+u) \quad (8)$$

Uwzględniając (4) i (5), po prostych przekształceniach, których przytaczanie wydaje się zbędne – otrzymuje się:

$$\bar{d}^2 = \frac{1}{2 \cdot \pi} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \{ G_x(\omega) \cdot |K(j\omega) \cdot K_1(j\omega) - 1|^2 + G_z(\omega) \cdot |K(j\omega) \cdot K_1(j\omega)|^2 \} d\omega \quad (9)$$

gdzie:

$$K_1(j\omega) = \exp(-j\omega u) \cdot \sum_{i=0}^k \frac{u^i}{i!} \cdot (j\omega)^i \quad (10)$$

Jeśli założyć, że zależność (5) dostatecznie dokładnie wyznacza prognozę, to w praktyce  $K_1(j\omega) = 1$  i wtedy:

$$\bar{d}^2 = \frac{1}{2 \cdot \pi} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \{ G_x(\omega) \cdot |K(j\omega) - 1|^2 + G_z(\omega) \cdot |K(j\omega)|^2 \} d\omega \quad (11)$$

i jako optymalny należy przyjąć filtr Wienera [2], a liczbę  $k$  członów składowych wzoru (5) dostosować do typu sygnału  $y(t)$  tak, by błąd (2) był dostatecznie mały. Wykorzystanie pełnej zależności (9) wydaje się znacznie trudniejsze dla praktycznej realizacji.

Ponieważ użycie filtru o transmitancji  $K(j\omega)$  jest konieczne z powodu konieczności wyznaczania pochodnych  $y^{(i)}(t)$  zatem korzystne może się wydawać zrealizowanie filtru w taki sposób, by jego transmitancja odpowiadała rozwinięciu funkcji  $\exp(-j\omega T_1)$  w szereg, a więc np.

$$K(s) = \frac{1}{1 + sT_1 + \frac{1}{2}(s \cdot T_1)^2 + \frac{1}{6}(s \cdot T_1)^3 + \dots} \quad (12)$$

Oznacza to, że sygnał  $y(s)$  będzie ze stosunkowo dobrym przybliżeniem odpowiadał sygnałowi  $x(t)$  opóźnionemu o czas  $T_1$  to jest  $y(s) = x(s) \cdot \exp(-sT_1)$ . Jeśli więc poszukujemy prognozy  $x(t+u)$  czyli  $x(s) \cdot \exp(su)$  - błąd wyniesie:

$$d(s) = x(s) \cdot \exp(su) - x(s) \cdot K(s) \cdot \sum_{i=0}^n (-1)^i \frac{1}{i!} \cdot (s \cdot u)^i \quad (13)$$

z uwzględnieniem w budowie transmitancji  $K(s)$  członów odpowiednio licznych, co najmniej do  $\frac{1}{n!}(sT_1)^n$ . Dla skompensowania wprowadzonego w ten sposób dodatkowo opóźnienia  $T_1$  należałoby teraz w miejsce postulowanego opóźnienia  $u$  przyjąć w ostatnim członie wzoru (13) po jego prawej stronie wielkość  $u+T_1$ . Niestety transmitancja (12) posiada złe własności tłumienne i jeśli sygnał  $x(t)$  nie jest dostatecznie „gładki” takie rozwiązanie nie wchodzi w rachubę.

### 4. Układ z przetworzeniem sygnału wejściowego

Mesurandem może być wynik określonej operacji na sygnale wejściowym  $x_1(t) = 0_2[x(t)]$  i wtedy dla wyznaczenia prognozy zmian mesurandu  $x_1(t)$  w funkcji czasu należy układ uzupełnić o człon dokonujący owego przetworzenia  $0_2[\ ]$ . Jeśli przetworzenie zdefiniowane jest w postaci równania różniczkowego

$$0_2 [x_1^{(r)}, x_1^{(r-1)}, x_1^{(r-2)}, \dots, x_1] = x(t) \quad (14)$$

liniowego, lub nieliniowego – można w miejsce filtru realizować to właśnie równanie – jeśli tylko w układzie dostępne będą  $x_1(t)$  i jego pochodne, aż do rzędu  $x_1^{(k)}(t)$ .

Dla przykładu – jeśli mesurandem jest średnia arytmetyczna sygnału  $x(t)$  za okres ostatnich  $t_u$  sekund:

$$x_1(t) = \frac{1}{t_u} \cdot \int_{t-t_u}^t x(t) \cdot dt \quad (15)$$

to takie przekształcenie można uzyskać stosując układ o transmitancji:

$$k(s) = \frac{1 - \exp(-s \cdot t_u)}{s \cdot t_u} \quad (16)$$

lub zastępując ją modelem uproszczonym:

$$K_u(z) = \frac{1}{1 + z + \frac{1}{3} \cdot z^2} \quad \text{gdzie} \quad z = s \cdot \frac{t_u}{2} \quad (17)$$

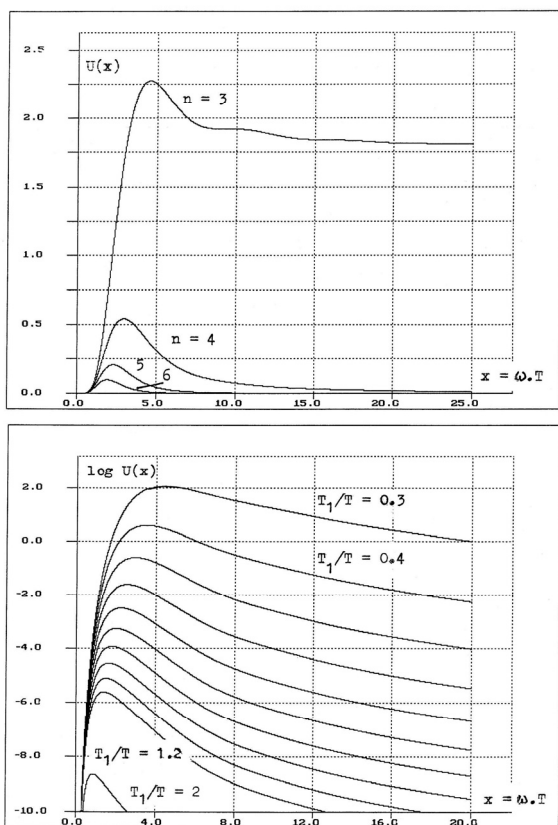
Tu dostępna będzie co najwyżej druga pochodna sygnału  $y(t)$  i korzystniejszy byłby filtr wyższego rzędu. Jeśli przyjąć we wzorze (5) rząd dynamiki  $k$  jako maksymalny, to filtr musi być co najmniej rzędu  $k$ , a korzystniejszy okazuje się rząd wyższy. Przyjmując dla przykładu, że transmitancja filtru posiada postać

$$K(s) = \frac{1}{(1 + s \cdot T_1)^n}, \quad n \geq k \quad (18)$$

jako miarę wrażliwości błędu  $d(t)=y(t+T)-y(t+T)_{prog}$  na składowe sygnału  $x(t)$  o pulsacji  $\omega$  otrzymuje się zależność:

$$U(\omega) = \left| K(j\omega) \cdot \exp(j\omega \cdot T) - \sum_{i=0}^k (-1)^i \cdot \frac{1}{i!} \cdot (j\omega \cdot T)^i \right|^2 \quad (19)$$

Przykładowe wykresy  $U(\omega \cdot T)$  dla  $k=3, n=3,4,5, i 6$  oraz  $T_1/T=0,5$ , a także  $\log U(\omega \cdot T)$  dla  $k=3, n=5$ , oraz  $T_1/T=0,3, 0,4, \dots, 1,2$  i  $2$  pokazano na rys. 2. Wynika z nich celowość stosowania filtra o rzędzie dynamiki zdecydowanie wyższym niż  $k$ , przy dostatecznie dużym stosunku  $T_1/T$  (lub według poprzednich oznaczeń  $T_1/u_{max}$ ).



Rys. 2. Wykresy przebiegów  $U(x)$  dla  $k=3, T_1/T=0,5, n=3, 4, 5, i 6$  przy  $x=\omega T$  oraz  $\log U(x)$ , dla  $k=3, n=4, T_1/T=0,3, 0,4, \dots, 1,2, i 2,0$

Fig. 2 The curves  $U(x)$  for  $k=3, T_1/T=0,5, n=3, 4, 5$ , and  $6$ , where  $x=\omega T$ , and curves  $\log U(x)$ , for  $k=3, n=4, T_1/T=0,3, 0,4, \dots, 1,2$ , and  $2,0$

### 5. Dodatkowe uwagi o pracy układu

Niezależnie od sposobu realizacji zależności  $u(t)$  układ w każdej chwili  $t$  wyznacza prognozę (5) z błędem  $D(t)$  nie przekraczającym wartości:

$$D(t) \leq \frac{1}{(k+1)!} \cdot u(t)^{k+1} \cdot y^{(k+1)}(t)_{max} \quad (20)$$

i wykorzystując oscyloskop dwukanałowy można na ekranie prezentować obok prognozy także wykres  $x=u(t), Y_1=D(t)$  orientując obserwatora o skali błędów. Błąd ten można zmniejszyć (istotnie przy dużej wartości  $u_{max}$ ) realizując układ pomiarowy o odpowiednio dużej liczbie składników  $k$ .

Należy uwzględnić dwie istotne sprawy:

- Po pierwsze w chwili uruchomienia układu wystąpi proces przejściowy spowodowany zerowymi warunkami początkowymi w równaniu różniczkowym (3). Ten stan pracy układu można

pominąć przy obserwacjach, lub uruchamiać gałąź układu realizującą zależność (5) dopiero po czasie ustalonej pracy filtru.

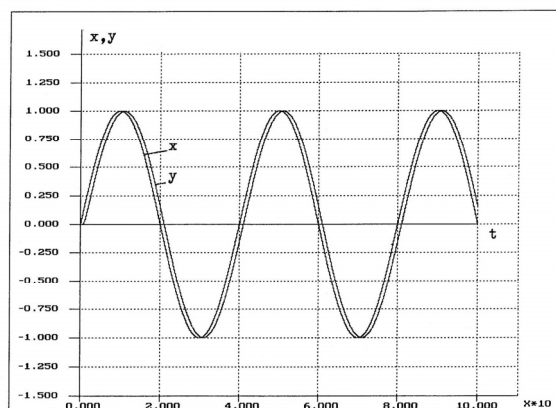
- Po drugie należy pamiętać, że prognoza (5) jest przez układ aktualizowana „na bieżąco”, ale w przedziale okresowych zmian  $u(t)$  i w związku tym wykres  $Y(X)$  „wędruje” po ekranie oscyloskopu. Z tego względu korzystne wydaje się operowanie dużą wartością pulsacji  $\omega$ , którą należy dostosować do typu przebiegu  $x(t)$ . Jeśli wykres  $Y(X)$  ma być zarejestrowany, należy zapisów dokonywać co pewien czas wybiórczo, ograniczając za każdym razem czas rejestracji do niewielu okresów zmian  $u(t)$ , w przeciwnym razie zapis nie będzie czytelny [4].

### 6. Przykłady

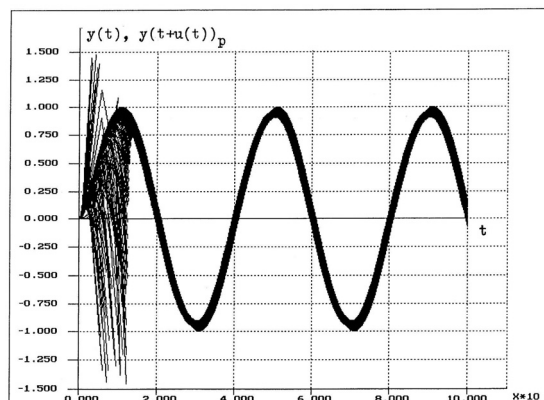
Zrealizowano proponowany układ przyjmując najpierw, że

$$x(t) = \sin\left(\frac{\pi \cdot t}{20}\right), k=3, K(s) = \frac{1}{(1+0.2s)^5}, u_{max}=10, \omega=200s^{-1}.$$

Na rysunku 3 pokazano wykresy przebiegów  $x(t)$  i  $y(t)$  (widoczne opóźnienie wykresu przebiegu  $y(t)$  względem  $x(t)$  wprowadzone przez filtr), a na rysunku 4 – pomocniczy wykres przebiegu  $y(t+u(t))_p$  ilustrujący wpływ procesu przejściowego w filtrze na prognozy (początkowy fragment wykresu), oraz szerokość pasma, w którym mieszczą się błędy kolejnych, wyznaczanych prognoz, powtarzanych z okresem około 0,03 s. Szerokość tego pasma można zmniejszyć powiększając liczbę składników wzoru (5).



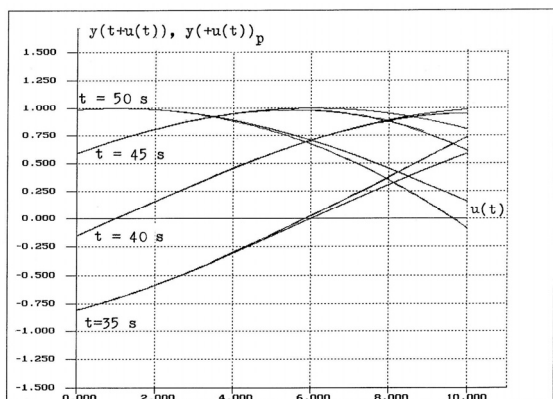
Rys. 3. Wykresy przebiegów  $x(t)$  i  $y(t)$  dla opisywanego przykładu  
Fig. 3. Curves  $x(t)$  and  $y(t)$  for considered example



Rys. 4. Wykres przebiegu  $y(t+u(t))_p$ , oraz  $y(t+u(t))$ . Widoczny wpływ procesu przejściowego filtru na wypracowaną prognozę (faza początkowa), oraz pasmo błędów prognozy

Fig. 4. The curves representing  $y(t+u(t))_p$ , and  $y(t+u(t))$ . One can observe how the filter transient states influence the forecast and range of forecast errors

Na rys. 5 pokazano kilka fragmentów przebiegu  $y(t+u(t))$  rozpoczynających się w chwilach  $t=35, 40, 45$  i  $50$  s, i odpowiadające im wykresy uzyskiwanych prognoz  $y(t+u(t))_p$  każdorazowo wyznaczane przez symulowany układ pomiarowy w ciągu jednego okresu przebiegu.



Rys. 5. Kilka fragmentów przebiegu  $y(t+u(t))$  dla chwil czasu  $t=35...50$  s, oraz odpowiadające im wykresy prognoz, wyznaczane w ciągu jednego okresu zmian  $u(t)$

Fig. 5. The several fragments representing  $y(t+u(t))$  for time instants  $t=35...50$  s, and curves representing respective forecasts determined during one period of  $u(t)$

## 7. Wnioski

Wydaje się, że układ przy odpowiednio dobranych parametrach  $a_i, n, k, u_{\max}$  i  $\omega$  spełnia swoje zadania. Jest to układ analogowy, ale być może da się zrealizować cyfrowo. Może służyć np. do prognozowania przebiegów temperatur, zmian obciążeń sieci elektrycznych, ciśnienia atmosferycznego itp.

## 8. Literatura

- [1] Box G.E.P., Jenkins G.M.: Analiza szeregów czasowych. Prognozowanie i sterowanie. PWN Warszawa 1983.
- [2] Kulikowski R.: Wstęp do syntezy liniowych układów elektrycznych. PWN Warszawa – Wrocław 1957.
- [3] Palusiński O., Skowronek M., Znamirowski L.: Modelowanie analogowe i hybrydowe. Zadania i problemy. WNT Warszawa 1976.
- [4] Żuchowski A.: Pomiary dynamiczne. Wydawnictwo Uczelniane Politechniki Szczecińskiej, Szczecin 1984.
- [5] Żuchowski A.: Modele dynamiki i identyfikacja. Wydawnictwo Uczelniane Politechniki Szczecińskiej, Seria Tempus, Szczecin 2003.
- [6] Żuchowski A.: Uwagi o rejestracji przebiegów czasowych z jednoczesną prognozą ich zmian. PAK, vol. 53, 9/2007.

otrzymano / received: 04.11.2011

przyjęto do druku / accepted: 02.07.2012

artykuł recenzowany / revised paper

## INFORMACJE

### Szanowni Autorzy artykułów publikowanych w PAK,

W trosce o jak najwyższy poziom punktacji miesięcznika PAK zwracam się z prośbą o cytowanie artykułów opublikowanych w PAK w innych artykułach, zwłaszcza tych publikowanych w czasopiśmie z listy filadelfijskiej. Ma to bezpośredni wpływ na współczynnik IF (Impact Factor) miesięcznika PAK.

W algorytmach oceny czasopism współczynnik IF ma największą wagę. Na zwiększenie wartości współczynnika IF redakcja czasopisma nie ma żadnego wpływu, ale wszystko zależy od Autorów cytujących. W przypadku miesięcznika PAK aktualnie każde cytowanie zwiększa IF o około 0,002. Oczywiście cytowanie artykułu tylko wtedy jest uzasadnione, jeżeli jest on tematycznie związany z artykułem cytującym, a autor korzystał z niego przy przygotowaniu pracy.

Aby ułatwić Autorom korzystanie z artykułów opublikowanych w PAK (a także możliwość cytowania) została opracowana przez redakcję PAK „Wyszukiwarka”, umożliwiająca wyszukiwanie artykułów według nazwiska autora, słowa tytułu artykułu, albo frazy kluczowej.

Aby skorzystać z „Wyszukiwarki” należy:

- wejść na stronę: [www.pak.info.pl](http://www.pak.info.pl)
- w menu „Wyszukiwarka” (po lewej stronie ekranu) wybrać „Artykuły”.

Strona zawiera również szereg innych łatwo dostępnych funkcjonalności, m.in. wykazy artykułów opublikowanych w PAK, a cytowanych w artykułach opublikowanych w czasopiśmie z listy filadelfijskiej.

Zdaję sobie sprawę, że redakcje niektórych czasopism usuwają cytowania artykułów publikowanych w czasopiśmie spoza listy filadelfijskiej, np. argumentując, że są one mało dostępne. Taka argumentacja będzie mniej uzasadniona, jeżeli tytuł naszego miesięcznika oraz tytuły artykułów będą podane w cytowaniach w języku angielskim. Proszę zauważyć, że oficjalny tytuł anglojęzyczny miesięcznika PAK (występujący na okładce) ma formę: Measurement, Automation and Monitoring (MA&M), a wszystkie artykuły naukowe publikowane w PAK są napisane albo w języku angielskim, albo mają rozszerzone abstrakty w tym języku.

Tadeusz SKUBIS  
Redaktor naczelny Wydawnictwa PAK