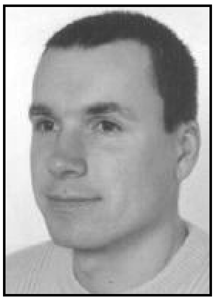
Robert DYLEWSKI
UNIWERSYTET ZIELONOGÓRSKI, ul. Licealna 9, 65-417 Zielona Góra
PAŃSTWOWA WYŻSZA SZKOŁA ZAWODOWA, ul. Teatralna 25, 66-400 Gorzów Wlkp.

Selekcja residualna w metodach rzutowych dla problemów dopuszczalności liniowej

Dr Robert DYLEWSKI

Doktorat uzyskany w roku 2003, z zakresu metod numerycznych i optymalizacji. Od roku 2003 adiunkt na Wydziale Matematyki, Informatyki i Ekonometrii Uniwersytetu Zielonogórskiego. Prowadzone zajęcia: programowanie matematyczne, badania operacyjne, podstawy optymalizacji, algorytmy i struktury danych, metody numeryczne. Tematyka badań naukowych: optymalizacja wypukła nieróżniczkowalna, metody rzutowe i zastosowania, własności i zastosowania sieci Petriego.



e-mail: r.dylewski@wmie.uz.zgora.pl

Streszczenie

W pracy rozważa się problem dopuszczalności liniowej (PDL), do którego sprowadza się wiele praktycznych problemów. Do rozwiązywania niesprzecznego PDL zaproponowano metodę rzutową, w której do konstrukcji wektora rzutowego wykorzystuje się tzw. model selekcji residualnej. Zaproponowano też rozszerzenie tej metody dla przypadku, kiedy nie zakłada się niesprzeczności badanego problemu. Przeprowadzono testy numeryczne, w których porównano prezentowaną metodę z innymi znanymi metodami.

Słowa kluczowe: selekcja residualna, metoda rzutowa, problem dopuszczalności liniowej.

Residual selection in projection methods for linear feasibility problems

Abstract

In this paper there is considered the linear feasibility problem. The projection methods for this problem are studied. The so called residual selection model with a Cholesky factorization for construction of projection vector in each iteration is presented. There is proposed modification of this method for the assumption of inconsistency of the system of linear inequalities. If the considered system is inconsistent, we can find the so called ε-optimal solution. The computation results of numerical experiments are presented for projection methods with relaxation parameter equal to 1.0 and 1.5. The presented methods were programmed in Fortran 90. It can be observed that for each tested problem, the results for the projection method with residual selection are better than for others methods: the projection method with largest residuum and the projection method with regular obtuse cone selection. The influence of the relaxation parameter on the convergence is essential. All methods behave better for a bigger relaxation parameter.

Keywords: residual selection, projection method, linear feasibility problem.

1. Wprowadzenie

W artykule rozważa się problem dopuszczalności liniowej, który można zapisać w następującej postaci:

Problem (PDL):

Dany jest układ nierówności liniowych

$$A^{\mathrm{T}}x \le b\,, \tag{1}$$

gdzie: A jest macierzą typu $n \times m$, $x \in R^n$ i $b \in R^m$.

Znaleźć rozwiązanie $x^* \in M_0 = \{x : A^{\mathrm{T}}x \le b\}$ lub stwierdzić, że $M_0 = \varnothing$.

W powyższym problemie nie zakłada się niesprzeczności. Rozważane są metody, które gwarantują zbieżność w przypadku, gdy zbiór rozwiązań $M_0 \neq \varnothing$; jeśli natomiast $M_0 = \varnothing$, to potrafią ten fakt wykryć.

Wiele innych praktycznych problemów można sprowadzić do PDL. Na przykład zadanie programowania liniowego (minimalizacja lub maksymalizacja funkcji liniowej przy ograniczeniach zadanych funkcjami liniowymi), czy ogólniejsze zadanie minimalizacji wypukłej z ograniczeniami liniowymi, gdzie funkcja celu jest kawałkami liniowa (ma postać maksimum funkcji liniowych) [1]. W wielu praktycznych zagadnieniach otrzymuje się do rozwiązania problemy postaci PDL, np. zagadnienie tomografii komputerowej (wyznaczanie przekroju obiektu), zagadnienie planowania radioterapii z użyciem wiązek o modulowanej intensywności, własności strukturalne (ograniczoność, powracalność) sieci Petriego [2]. Szeroki opis problemów postaci PDL zawarto w pracy [3]. Często w praktycznych problemach $M_0 = \varnothing$ albo nie wiadomo, czy zbiór rozwiązań M_0 jest pusty.

2. Metody rzutowe dla problemu dopuszczalności liniowej

W punkcie tym rozważa się metody rzutowe służące do rozwiązywania problemu PDL. Niech $P_S(x) = \arg\min_{y\in S}\|y - x\|$ oznacza rzut metryczny punktu x na zbiór wypukły S ($\|x\| = \sqrt{x^{\mathrm{T}}x}$ - norma euklidesowa wektora $x \in R^n$). Metody rzutowe mają ogólną postać:

$$\begin{aligned} &x_1 \in R^n - \text{dowolny} \\ &x_{k+1} = x_k + \lambda_k t_k \end{aligned} \tag{2}$$

gdzie wektor rzutowy

$$t_k = P_{M_k}x_k - x_k \tag{3}$$

i parametr relaksacyjny $\lambda_k \in (0, 2)$. Zbiór M_k ma postać:

$$M_k = \{x : A_{L_k}^{\mathrm{T}}x \le b_{L_k}\} \tag{4}$$

gdzie A_{L_k} jest podmacierzą macierzy A, składającą się z kolumn o numerach ze zbioru $L_k \subset J = \{1, 2, ..., m\}$ i b_{L_k} jest podwektorem wektora b, składającym się ze współrzędnych o numerach ze zbioru $L_k \subset J$.

Metody rzutowe różnią się przede wszystkim wyborem nierówności (zbiór L_k) i w konsekwencji konstrukcją wektora rzutowego t_k. W najprostszych metodach zbiór L_k jest jednoelementowy, czyli t_k jest wektorem rzutowym na zbiór rozwiązań dla jednej nierówności. Na przykład, w metodzie największego residuum (M-nr) zbiór $L_k = \{i_k\}$, przy czym

$$i_k \in \operatorname{Arg\,max}_{i\in J}\left(A_i^{\mathrm{T}}x - b_i\right) \tag{5}$$

gdzie A_i oznacza i-tą kolumnę macierzy A. Inne znane metody, w których $|L_k| = 1$ to metoda największej odległości (jeśli $\|A_i\| = 1$ dla każdego $i \in J$, to metoda ta jest równoważna metodzie M-nr), metoda cykliczna, metoda prawie cykliczna i metoda projekcji powtarzalnych (patrz np. [1, 4, 5]).

3. Metoda rzutowa z selekcją residualną

Metody, w których $|L_k| = 1$ są dosyć proste, ale niestety wolno zbieżne do rozwiązania. W celu poprawienia zbieżności można do konstrukcji wektora t_k wybierać więcej niż jedną nierówność z układu (1).

Niech $x_k^+ = P_{M_k} x_k$. Jeżeli macierz A_{L_k} jest pełnego rzędu kolumnowego (rząd macierzy A_{L_k} jest równy $|L_k|$), to układ równań $A_{L_k}^{\mathrm{T}} x = b_{L_k}$ posiada rozwiązanie i rzut metryczny x_k na zbiór $N_k = \{x : A_{L_k}^{\mathrm{T}} x = b_{L_k}\}$ wynosi [6, 7]:

$$\bar{x}_k = P_{N_k} x_k = x_k - A_{L_k}\left(A_{L_k}^{\mathrm{T}} A_{L_k}\right)^{-1}\left(A_{L_k}^{\mathrm{T}} x_k - b_{L_k}\right). \tag{6}$$

Oczywiście, $\bar{x}_k$ nie musi być równe x_k^+. Można pokazać [6, 7], że

$$\bar{x}_k = x_k^+ \Leftrightarrow y = \left(A_{L_k}^{\mathrm{T}} A_{L_k}\right)^{-1}\left(A_{L_k}^{\mathrm{T}} x_k - b_{L_k}\right) \geq 0. \tag{7}$$

W pracy [1] wprowadzono tzw. selekcję stożka rozwartego i szczególny przypadek tej selekcji, metodę selekcji regularnego stożka rozwartego (M-srsr), które gwarantują spełnienie warunków: $\left(A_{L_k}^{\mathrm{T}} A_{L_k}\right)^{-1} \geq 0$ oraz $\left(A_{L_k}^{\mathrm{T}} x_k - b_{L_k}\right) \geq 0$. W konsekwencji zachodzi $y \geq 0$ i $\bar{x}_k = x_k^+$. W pracach [6, 7] wprowadzono metodę selekcji residualnej (dla zadania minimalizacji wypukłej nieróżniczkowalnej), w której zakłada się, że $y \geq 0$ bez konieczności spełnienia warunku $\left(A_{L_k}^{\mathrm{T}} x_k - b_{L_k}\right) \geq 0$. W pracy [8] zastosowano metodę selekcji residualnej (M-sr) w metodzie rzutowej dla problemu PDL i pokazano zbieżność w przypadku, gdy problem (1) jest niesprzeczny ($M_0 \neq \emptyset$). Oczywiście, przy sprawdzaniu warunku $y \geq 0$ i konstrukcji wektora rzutowego t_k metodą M-sr nie trzeba wyznaczać odwrotności macierzy $A_{L_k}^{\mathrm{T}} A_{L_k}$; wykorzystuje się rozkład Cholesky'ego z aktualizacją [9].

Rozważmy teraz ogólniejszą sytuację; nie zakłada się, że $M_0 \neq \emptyset$. Jeżeli rozkład Cholesky'ego macierzy $A_{L_k}^{\mathrm{T}} A_{L_k}$ zostanie przerwany, to oznacza, że $M_0 = \emptyset$ (patrz [8, Theorem 1]). Jeżeli natomiast rozkład Cholesky'ego zakończy się pomyślnie, to $x_k^+ = P_{M_k} x_k = x_k + t_k$ dla $t_k = -A_{L_k} y$ (patrz [8, Corollary 2]). W konsekwencji, jeżeli $M_0 \neq \emptyset$ i ciąg x_k generowany jest przez (2, 3, 4) z L_k wyznaczanym metodą M-sr, to zachodzi (patrz [8, Theorem 5]):

$$\max\{0, A_i^{\mathrm{T}} x_k - b_i : i = 1, 2, \ldots, m\} \to 0. \tag{8}$$

Wprowadźmy teraz metodę, która jest pewną modyfikację metody rzutowej (2, 3, 4) z selekcją M-sr. Podobną ideę zaproponowano dla metody rzutowania naprzemiennego [10, 11]. Niech d_k oznacza tolerancję na spełnienie nierówności w układzie (1),

$$d_k = (1-\mu)\bar{d}_k + \mu \underline{d}_k, \tag{9}$$

gdzie: $\bar{d}_k = \min_{1 \leq j \leq k} \max\{0, A_i^{\mathrm{T}} x_j - b_i : i = 1, 2, \ldots, m\}$ ($\bar{d}_k$ jest najmniejszą z maksymalnych odległości od niespełnionych ograniczeń w dotychczas uzyskanych przybliżeniach x_1, x_2, …, x_k), $\underline{d}_1 = 0$ i $\mu \in (0, 1]$. Ponadto, wprowadźmy zamiast zbioru M_k zdefiniowanego w (4) zbiór

$$M_k^d = \{x : A_{L_k}^{\mathrm{T}} x \leq b_{L_k} + d_k\}. \tag{10}$$

Uwagi:

1) Jeśli $\mu = 1$, to $M_k^d = M_k$ dla każdego k.

2) Jeśli dla pewnego k rozkład Cholesky'ego zostanie przerwany, to oznacza, że $M_k^d = \emptyset$, w konsekwencji też $M_0 = \emptyset$, ponieważ $M_0 \subset M_k \subset M_k^d$. Można wtedy zakończyć metodę z odpowiedzią, że problem PDL jest sprzeczny, albo kontynuować przyjmując $\underline{d}_k = d_k$ ponieważ $\min_{x \in \mathbf{R}^n} \max\{0, A_i^{\mathrm{T}} x - b_i : i = 1, 2, \ldots, m\} \geq d_k$.

3) Jeśli $d_k \geq \min_{x \in \mathbf{R}^n} \max\{0, A_i^{\mathrm{T}} x - b_i : i = 1, 2, \ldots, m\}$ dla każdego k, to $M_k^d \neq \emptyset$ i w konsekwencji dla x_k zachodzi $\max\{0, A_i^{\mathrm{T}} x - b_i - d_k : i = 1, 2, \ldots, m\} \to 0$ (patrz (8)).

4) Jeśli dla pewnego k zajdzie $\bar{d}_k \leq \varepsilon$ dla zadanego ε, to oznacza, że x_k jest rozwiązaniem ε-optymalnym, czyli $A_i^{\mathrm{T}} x - b_i \leq \varepsilon$ dla każdej nierówności $i = 1, 2, \ldots, m$.

4. Wyniki testów numerycznych

W punkcie tym przedstawiono wyniki dla metody rzutowej opisanej w punkcie 2, gdzie do wyboru nierówności (zbioru L_k) i konstrukcji wektora rzutowego zastosowano metody: (1) M-nr – największego residuum, (2) M-srsr – selekcji regularnego stożka rozwartego i (3) M-sr – selekcji residualnej. W kryterium zatrzymania tolerancja optymalności wynosiła $\varepsilon = 10^{-6}$. Metody zostały zaprogramowane w Fortranie 90 (Lahey Fortran 90 v. 3.5) i obliczenia zostały wykonane przy podwójnej precyzji.

Wygenerowano losowo po 10 przykładów dla każdego układu parametrów n, m, l. Współrzędne lewych stron nierówności zostały wygenerowane losowo z przedziału (-0.5, 0.5). Dla $i = 1, 2, \ldots, l$ przyjęto $b_i = 0$, a dla $i = l + 1, \ldots, m$ współrzędne wektora b wygenerowano losowo z przedziału (0, 1), podobnie współrzędne punktów startowych. Zagwarantowano więc niesprzeczność problemu PDL. Wartość l natomiast wpływa na wielkość zbioru rozwiązań.

Wyniki testów dla parametru relaksacyjnego $\lambda_k = 1$ przedstawiono w tabeli 1, przy czym k_i oznacza średnią liczbę iteracji potrzebną do uzyskania rozwiązania ε-optymalnego.

W tabeli 2. przedstawiono wyniki dla parametru relaksacyjnego $\lambda_k = 1.5$. Oznaczenia są takie same jak w tabeli 1.

Zarówno w tabeli 1. jak i w tabeli 2., można zaobserwować przewagę metody drugiej nad pierwszą, a także trzeciej nad drugą. Do wyboru podukładu równań i konstrukcji wektora rzutowego, w przypadku pierwszej metody, brana jest zawsze tylko jedna niespełniona nierówność wyjściowego układu nierówności. W drugiej metodzie liczba wybieranych nierówności dla testowanych przykładów wynosiła od 2 do 8, stąd dużo lepsze wyniki. Trzecia metoda umożliwia wybieranie też nierówności, które są wprawdzie spełnione w aktualnym przybliżeniu rozwiązania, ale pozwala to dodatkowo niewielkim kosztem zwiększyć długość wektora rzutowego, zachowując zbieżność metody.

Tab. 1. Wyniki testów numerycznych dla $\lambda_k = 1$

Tab. 1. Results of numerical tests for $\lambda_k = 1$

		M-nr	M-srsr	M-sr
$n \times m$	l	k_1	k_2	k_3
20 × 20	12	65	12	6
	20	220	40	7
20 × 40	12	222	30	8
	24	1091	168	14
20 × 80	12	231	44	11
	24	2210	479	18
50 × 50	30	295	41	19
	50	542	75	33
50 × 100	30	1536	252	35
	60	2521	461	145
50 × 200	30	1322	156	69
	60	3773	583	122
100 × 100	60	597	86	49
	100	941	133	77
200 × 200	120	1826	230	97
	200	1858	242	164

Tab. 2. Wyniki testów numerycznych dla $\lambda_k = 1.5$

Tab. 2. Results of numerical tests for $\lambda_k = 1.5$

		M-nr	M-srsr	M-sr
$n \times m$	l	k_1	k_2	k_3
20 × 20	12	10	6	5
	20	22	7	5
20 × 40	12	22	10	7
	24	342	28	11
20 × 80	12	29	13	10
	24	389	152	12
50 × 50	30	31	12	10
	50	43	14	14
50 × 100	30	178	34	14
	60	698	44	28
50 × 200	30	131	42	21
	60	743	80	27
100 × 100	60	67	23	17
	100	83	26	19
200 × 200	120	153	46	25
	200	166	48	30

Porównując wyniki w tabeli 2. z wynikami w tabeli 1. można zauważyć, że dla parametru relaksacyjnego większego od 1 ($\lambda_k = 1.5$ w tabeli 2.) uzyskujemy dodatkowo zmniejszenie liczby iteracji.

5. Podsumowanie

Wiele praktycznych problemów ma postać zadania dopuszczalności liniowej albo sprowadza się do takiego zadania. Do rozwiązywania tego typu zadań stosuje się metody rzutowe.

Wyniki testów numerycznych wskazują na przewagę metody selekcji residualnej nad metodą selekcji regularnego stożka rozwartego. Obydwie te metody dają dużo lepsze wyniki od metod, w których do konstrukcji wektora rzutowego wybiera się tylko jedną niespełnioną nierówność, tak jak np. w metodzie największego residuum, czy największej odległości. Dodatkowo, odpowiednie zastosowanie rozkładu Cholesky'ego w metodzie selekcji residualnej pozwala na wykrycie kiedy układ nierówności jest sprzeczny. Można zastosować wtedy modyfikację metody selekcji residualnej do wyznaczania rozwiązania ε-optymalnego, nawet gdy badany układ nierówności liniowych jest sprzeczny albo nie wiadomo, czy jest niesprzeczny.

6. Literatura

[1] Cegielski A.: Metody relaksacyjne w problemach optymalizacji wypukłej. Monografie 67. WSI, Zielona Góra, 1993.

[2] Zaitsev D. A.: Compositional analysis of Petri nets. Cybernetics and Systems Analysis, vol. 42, no. 1, 2006, 126-136.

[3] Deutsch F.: The method of alternating orthogonal projections. Approximation Theory, Spline Functions and Applications, Kluwer Academic Publ., The Netherlands, 105-121, 1992.

[4] Agmon S.: The relaxation method for linear inequalities. Canadian Journal of Mathematics, 6, 1954, 382-392.

[5] Goffin J. L.: The relaxation method for solving systems of linear inequalities. Mathematics of Operations Research, 5, 1980, 388-414.

[6] Cegielski A., Dylewski R.: Selection strategies in projection methods for convex minimization problems. Discussiones Mathematicae. Differential Inclusions, Control and Optimization, 22, 2002, 97-123.

[7] Cegielski A., Dylewski R.: Residual selection in a projection method for convex minimization problems. Optimization, 52, 2003, 211-220.

[8] Dylewski R.: Projection method with residual selection for linear feasibility problems. Discussiones Mathematicae. Differential Inclusions, Control and Optimization, 27, 2007, 43-50.

[9] Kiełbasiński A., Schwetlick H.: Numeryczna algebra liniowa. Wyd. Naukowo-Techniczne, Warszawa, 1992.

[10] Cegielski A., Dylewski R.: Variable target value relaxed alternating projection method. Computational Optimization and Applications, 47, 2010, 455-476.

[11] Dylewski R.: Uogólnienie metody rzutowania naprzemiennego. Pomiary Automatyka Kontrola, 06, 2011, 679-682.

otrzymano / received: 15.03.2012

przyjęto do druku / accepted: 01.05.2012 *artykuł recenzowany / revised paper*