

Eugenij T. VOLODARSKY<sup>1</sup>, Larisa A. KOSHEVAYA<sup>2</sup>, Zygmunt WARSZA<sup>3</sup><sup>1</sup> NARODOWY UNIWERSYTET TECHNICZNY UKRAINY - POLITECHNIKA KIJOWSKA<sup>2</sup> NARODOWY UNIWERSYTET LOTNICTWA, Kijów, Ukraina<sup>3</sup> PRZEMYSŁOWY INSTYTUT AUTOMATYKI I POMIARÓW (PIAP) Warszawa

## Niepewność decyzji o zgodności mierzonego obiektu z wymaganiami

## Prof. dr nauk tech. Evgenij T. VOLODARSKY

Narodowy Techniczny Uniwersytet Ukrainy - Politechnika Kijowska „KPI” Kiev, Katedra Automatyzacji badań eksperymentalnych; Przewodniczący Podkomisji „Metrologia” w Państwowej Agencji Akredytacyjnej Ukrainy. Senior member of IEEE. Zainteresowania naukowe: systemy oprogramowania pomiarowego do monitorowania i testowania. Autor ponad 200 publikacji.



e-mail: vet-1@ukr.net

## Prof. dr nauk tech. Larisa A. KOSHEVAJA

Zatrudniona w Narodowym Uniwersytecie Lotnictwa, Kiev, Ukraina; w Katedrze Biocybernetyki i Medycyny Lotniczej. Jej zainteresowania naukowe obejmują: metrologiczne wspomaganie pomiarów medycznych i biologicznych oraz statystyczne przetwarzanie danych. Jest Autorką ponad 70 publikacji.



e-mail: arnis@ukrpost.net

## Doc. dr inż. Zygmunt Lech WARSZA

Studia 1959, doktorat 1967 i praca 1960-70 na wydz. Elektrycznym Politechniki Warszawskiej oraz w Instytucie Elektrotechniki 1958-63. Docent od 1970. Zorganizował i prowadził: Wydział Transportu Pol. Świętokrzyskiej 1970-76, Ośrodek Aparatury Pomiarowej IMGW 1978-81, Zakład Techniki Pomiarowej Instytutu Chemii Przemysłowej 1983-91. Obecnie: główny specjalista w Przemysłowym Instytucie Automatyki i Pomiarów PIAP Warszawa. Autor około 130 publikacji, 2 monografii, 11 patentów.



e-mail: zlw@op.pl

## Streszczenie

Wskazano na konieczność uwzględnienia rodzaju charakterystyki przetwarzania urządzeń pomiarowych przy szacowaniu niepewności decyzji o zgodności parametrów obiektu z wymaganiami, podejmowanej na podstawie wyników pomiarów. Rozpatrzono wpływ parametrów funkcji przetwarzania systemu pomiarowego na prawdopodobieństwo i rodzaj decyzji. Zanalizowano możliwe warianty parametrów funkcji przetwarzania i odpowiadające im niepewności podejmowanych decyzji. Rozważania zilustrowano przykładem. Podano krótkie wnioski i bibliografię.

**Słowa kluczowe:** przyrząd pomiarowy, funkcja przetwarzania, wrażliwość, niepewność, podejmowanie decyzji.

## Uncertainty of the decision about the compliance of the measured object to given requirements

## Abstract

The necessity of taking into account the conversion characteristic form of the instrument in estimating the uncertainty of the decision statement at the comply with the requirements of the object based on the measurement results of its parameters is discussed. The influence of parameters of the instrument conversion function on the character of decision and its probability is considered in the paper. The possible variants of the conversion function components and the corresponding uncertainty of decision-making are discussed. The considerations are illustrated by the example. Short conclusions and bibliography are given.

**Keywords:** means of measurement, the conversion function, sensitivity, uncertainty, decision-making.

## 1. Wprowadzenie

Pomiar stanowi podstawową eksperymentalną procedurę poznawczą, dzięki której otrzymuje się pierwotną informację ilościową o badanym obiekcie. Wyniki te używa się następnie w bardziej skomplikowanych procedurach, takich jak pomiary kontrolne, badania właściwości, identyfikacja modelu i jego parametrów oraz diagnostyka stanu obiektu.

Na podstawie uzyskanej informacji ilościowej podejmuje się właściwą decyzję o badanym obiekcie: dobry - zły, spełnia - nie spełnia wymagania itd. Wynikom pomiarów nieodłącznie towarzyszy ich niepewność [1]. Stanowi ona źródło nieprawidłowości przy podejmowaniu decyzji o tym, czy obiekt spełnia odpowiednie wymagania. Charakteryzuje je prawdopodobieństwem przyjęcia nieprawidłowej decyzji negatywnej  $P_F$  (błędne odrzucenie) oraz prawdopodobieństwem fałszywej decyzji pozytywnej  $P_U$  (niewykryta nieprawidłowość).

Szacowanie wiarygodności wyników badań doświadczalnych (pomiarów kontrolnych, badań stanu obiektu) wiąże się z tzw. badaniami jakości, gdy na podstawie wyników pomiarów parametrów charakteryzujących właściwości obiektu wypracowuje się decyzję o ich zgodności z odpowiednimi normami. Badania jakościowe służą też do wypracowania odpowiednich hipotez i dlatego do tego celu powinno się stosować elementy teorii statystycznego testowania hipotez [2].

## 2. Teoretyczne podstawy zagadnienia

Jeśli określoną właściwość obiektu charakteryzuje się przez wartość  $x$  pewnego parametru, a wymagania zadane są w postaci dolnego  $x_L$  i górnego  $x_H$  progów zakresu dopuszczalnych zmian tego parametru, to odpowiednia reguła służąca podejmowaniu decyzji jest następująca:

$$x_L \leq x \leq x_H \quad (1)$$

Aby dokonać oceny zgodności wykonuje się pomiar wartości  $x$  i jego wynik  $\varphi(x)$  porównuje się z zadanymi wartościami  $\varphi_0(x_L)$  i  $\varphi_0(x_H)$  wyznaczonymi na podstawie znamionowej charakterystyki przetwarzania  $\varphi_0(x)$  użytego systemu pomiarowego. Ze względu na cechy konstrukcyjne i niedoskonałość technologii przy produkcji przyrządu, jego rzeczywista charakterystyka przetwarzania  $\varphi(x)$  różni się od nominalnej  $\varphi_0(x)$  i reguła (1), na podstawie której podejmuje się decyzję co do zgodności obiektu z normami, przyjmie postać:

$$\varphi_0(x_L) \leq \varphi(x) \leq \varphi_0(x_H) \quad (2)$$

Wyrażenie (2) różni się od pierwotnej reguły decyzyjnej (1).

Przy podejmowaniu decyzji nieidealne przetwarzanie może prowadzić do błędnych rezultatów, tj. do nieprawidłowego odrzucenia obiektu dobrego (*false refuse*) lub niewykrycia obiektu wadliwego (*unfound refuse*), tj. stwierdzenia, że spełnia on wymagania. Prawdopodobieństwo powstania błędnych decyzji, tj. niepewność oceny zgodności obiektu z wymaganiami, opisują następujące wyrażenia

- przy odrzuceniu obiektu dobrego:

$$P_F = P[x_L \leq x \leq x_H; \varphi(x) < \varphi_0(x_L)] + P[x_L \leq x \leq x_H; \varphi(x) > \varphi_0(x_H)] \quad (3)$$

- przy niewykryciu obiektu wadliwego:

$$P_U = P [x < x_L; \varphi_0(x_L) \leq \varphi(x) \leq \varphi_0(x_H)] + P [x > x_H; \varphi_0(x_L) \leq \varphi(x) \leq \varphi_0(x_H)] \quad (4)$$

Istnieją dwie metody podejścia do szacowania prawdopodobieństwa oceny (stopnia zaufania) spełniania wymagań przez obiekt. Pierwsza polega na statystycznych obserwacjach parametrów charakteryzujących właściwości obiektu w specjalnie zorganizowanym eksperymencie z użyciem próbek wzorcowych i zliczaniem liczby wyników nieprawidłowych. Drugie podejście opiera się na prognozowaniu przewidywanej decyzji o zgodności obiektu z wymaganiami na podstawie oczekiwanego rozkładu prawdopodobieństwa wartości wielkości badanej i charakterystyki użytego oprzyrządowania.

Stosowanie pierwszego podejścia i otrzymywane wartości prawdopodobieństwa błędnych decyzji przy różnej liczbie obserwacji analizowano w [3]. Z rozważań tych wynika, że takie podejście wymaga zastosowania w badaniach dużej liczby próbek wzorcowych. Ponadto może być ono stosowane do identyfikacji niepewności decyzji tylko przy użytych w eksperymencie narzędziach pomiarowych i uwzględnia jedynie wpływy losowych zmian parametrów obiektu na wiarygodność decyzji. Wpływ zmian losowych na niepewność wyników pomiarów szacuje się według [1] przez niepewność typu A. Z kolei prawdopodobieństwo błędnych decyzji w ocenie zgodności obiektu z wymaganiami zależy od stopnia pokrycia zakresu dopuszczalnych wartości przez wyniki pomiarów z uwzględnieniem ich niepewności rozszerzonej. Algorytm podejmowania decyzji dla takiego przypadku zamieszczono w [4], ale dokument ten nie zawiera rekomendacji - jak przy tworzeniu oceny uwzględniać niepewność instrumentalną. Wobec tego niepewność tę należy ocenić a priori. Jeśli a priori można określić poziom zaufania do wyników badań pojedynczej próbki (takie zadanie jest dość powszechnie spotykane w medycynie i biotechnologii), to na podstawie zależności Bayesa [5] można a posteriori obliczyć wiarygodność decyzji, tj. podać wraz z niepewnością rezultat dotyczący jakości badanego obiektu.

Znamionową funkcję przetwarzania (zwaną dalej charakterystyką znamionową) podaje się z pewnym przedziałem tolerancji, wewnątrz którego powinna znajdować się charakterystyka rzeczywista. Istniejące pojęcie "błąd urządzenia pomiarowego" nie jest w pełni poprawne, ponieważ dla przyrządu nie istnieje wartość prawdziwa wielkości mierzonej, a jedynie przedział możliwych jej wartości. Dlatego można mówić o niepewności wyniku pomiarów wynikającej z odchylenia charakterystyki rzeczywistej od znamionowej. Według zaleceń [1], niepewność tę powinno się oceniać metodą typu B.

Nominalną charakterystykę przyrządu najczęściej przedstawia się jako funkcję  $\varphi_0(x)=x$ , a charakterystykę rzeczywistą, która dla możliwych wartości mierzonej wielkości powinna się mieścić w określonych granicach - w postaci funkcji

$$\varphi(x) = a + bx \quad (5)$$

Wynika stąd, że reguła (2) do oceny zgodności właściwości obiektu z wymaganiami, wykonywanej na podstawie pomiarów parametrów, przyjmie postać:

$$x_L \leq a + bx \leq x_H$$

gdzie:  $a$  - współczynnik charakteryzujący przesunięcie rzeczywistej funkcji przetwarzania który może przyjmować zarówno dodatnie jak i ujemne wartości,  $b$  - współczynnik charakteryzujący zmianę czułości rzeczywistej funkcji przetwarzania, który może być zarówno większy, jak i mniejszy od jedności.

Biorąc pod uwagę niepewność instrumentalną wprowadzaną przez przyrząd pomiarowy o rzeczywistej charakterystyce przetwarzania, można oszacować, a następnie minimalizować ryzyko popełnienia błędnych decyzji o zgodności (lub niezgodności) obiektu z rozpatrywanym wymaganiem. Aby określić wiarygod-

ność orzeczeń zgodnie z wyrażeniami (3) lub (4) trzeba dysponować nie tylko rozkładem gęstości  $f(x)$  możliwych wartości wielkości badanej, ale i jego przetworzeniem  $f[\varphi(x)]$  dla wyników pomiaru. Następnie należy wykonać spłot rozkładu możliwych wartości wielkości mierzonej i wyników ich przetworzenia. Procedura ta jest dość skomplikowana i nie pozwala na szybką analizę przy szacowaniu niepewności decyzji wywołanej instrumentalną niepewnością wprowadzaną przez środki pomiarowe. Tej niedogodności jest pozbawione proponowane poniżej podejście. Nie wymaga ono znajomości funkcji rozkładu pomiarów  $f(x)$  badanej wielkości oraz znajdowania jego spłotu z funkcją rozkładu  $f[\varphi(x)]$  możliwych wartości wielkości mierzonej.

Proponowane podejście opiera się na wyznaczeniu przedziałów niepewności podejmowanej decyzji uzyskanych poprzez wyliczenie progów  $\varphi_0(x_L)$  i  $\varphi_0(x_H)$  dla możliwych wartości mierzonej wielkości przy uwzględnieniu rzeczywistej charakterystyki przetwarzania narzędzia pomiarowego, czyli "doprowadzenia do wejścia" wpływu tej charakterystyki. Jednocześnie dla oszacowania prawdopodobieństwa błędnych decyzji bierze się pod uwagę początkowy rozkład  $f(x)$  możliwych wartości mierzonej wielkości. Aby przynieść rzeczywistą charakterystykę "do wejścia" wprowadza się odwrotne przekształcenie matematyczne nierówności (1) i otrzymuje następujące wyrażenie:

$$\varphi^{-1}[\varphi_0(x_L)] \leq \varphi^{-1}[\varphi(x)] \leq \varphi^{-1}[\varphi_0(x_H)],$$

gdzie:  $\varphi^{-1}(\bullet)$  - operator przetwarzania w kierunku odwrotnym.

W lewą stronę tej nierówności wprowadza się dolne  $\pm x_L$ , a prawą - górne  $x_H$  progi wartości wielkości mierzonej charakteryzującej dany parametr obiektu. Po prostych przekształceniach, wydzieliwszy wartości ograniczeń  $x_L \leq x \leq x_H$  zadane w danej metodyce badania, otrzymuje się nierówność:

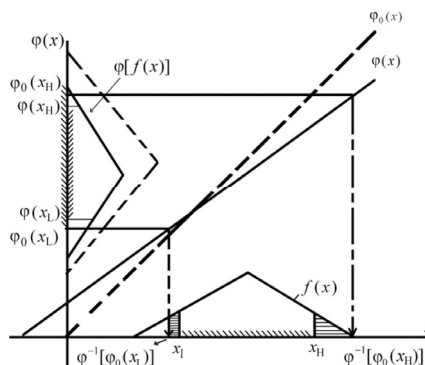
$$x_L + \{\varphi^{-1}[\varphi_0(x_L)] - x_L\} \leq x \leq x_H + \{\varphi^{-1}[\varphi_0(x_H)] - x_H\}$$

lub

$$x_L + \theta_L \leq x \leq x_H + \theta_H \quad (6)$$

gdzie:  $\theta_L, \theta_H$  - długość odpowiednio dolnego i górnego równoważnych przedziałów przesunięcia, odzwierciedlających wpływ rzeczywistej charakterystyki przetwarzania.

Na rysunku 1 przedstawiono interpretację geometryczną wpływu rzeczywistej charakterystyki przyrządu na wiarygodność decyzji. Na osi poziomej zakresowano z lewym pochyleniem przedział wartości, dla badanego parametru  $x$  obiektów, które spełniają odpowiednie wymagania (jego parametr znajduje się w przewidzianym przez normę przedziale), a na osi pionowej zakresowano przedział pokazujący wyniki pomiaru, według których przyjmuje się decyzję o zgodności z normą.



Rys. 1. Mechanizm powstawania niepewności decyzji  
Fig. 1. The mechanism of formation of the decision uncertainty

Prawdopodobieństwo błędnych decyzji będzie proporcjonalne do pola powierzchni pod krzywą rozkładu  $f(x)$  w przedziale pomiędzy  $\theta_L$  i  $\theta_H$ . Wychodząc z wyrażenia (6) równoważnego (2),

otrzymuje się prawdopodobieństwo  $P_F$  podjęcia decyzji o zgodności (found fit) obiektu

$$P_F = \int_{x_L + \theta_L}^{x_H + \theta_H} f(x) dx = \int_{x_L + \theta_L}^{x_L} f(x) dx + \int_{x_L}^{x_H} f(x) dx + \int_{x_H}^{x_H + \theta_H} f(x) dx$$

lub

$$P_F = P_S + P_{err}$$

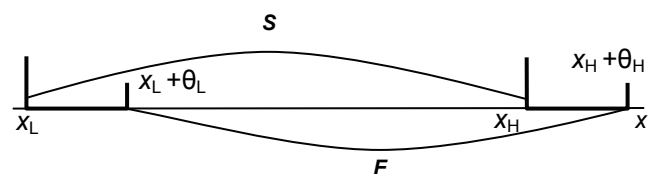
gdzie:  $P_S = \int_{x_L}^{x_H} f(x) dx$  - prawdopodobieństwo zgodności obiektu

z ustalonymi normami.

Prawdopodobieństwo błędnego wyniku  $P_{err}$  zawsze będzie mniejsze niż  $P(S)$

$$P_{err} = P_U + P_F = \int_{x_H}^{x_H + \theta_H} f(x) dx - \int_{x_L}^{x_L + \theta_L} f(x) dx \quad (7)$$

W wyrażeniu (7) pierwszy człon opisuje prawdopodobieństwo niewykrytych niesprawności, tzn. zdarzeń, gdy do obiektów sprawnych zalicza się dodatkowo obiekty niesprawne. Drugi człon określa prawdopodobieństwo nieprawidłowego odrzucenia obiektu. Znak "minus" wskazuje na usunięcie go ze zbioru obiektów dobrych, tj. rzeczywiście spełniających wymogi, do obiektów niespełniających wymagań, czyli złych. Tak więc przedział  $S$  ustalono dla parametru obiektu dobrego i przedział  $F$ , do którego trafiają wyniki pomiarów i podejmują się decyzje o zgodności obiektów, są względem siebie przesunięte. Pokazano to na rysunku 2. Pogrubionymi liniami oznaczono równoważne sobie przedziały tych przesunięć.



Rys. 2. Położenie wzajemne przedziałów parametru  $x$  dla obiektów spełniających normę zdatowności i obiektów uznanych za zdadne

Fig. 2. Mutual location of the intervals of the data  $x$  of serviceable objects due norms and objects of "found fit"

Jak już wspomniano, przy normalizacji parametrów przyrządu ustala się pewne granice, wewnątrz których powinna znajdować się charakterystyka przetwarzania  $\varphi(x) = a + bx$ . Przy tym może występować dowolna kombinacja wartości współczynników  $a$  i  $b$ , tj.  $a > 0$ ,  $a < 0$ ,  $b > 1$ ,  $b < 1$ . Długości interwałów  $\theta_H$  i  $\theta_L$ , jak również ich przesunięcie w stosunku do ograniczających progów  $x_H$  i  $x_L$  będzie zależało od rodzaju funkcji przetwarzania. Z (7) wynika, że prawdopodobieństwo podejmowania błędnych decyzji będzie zależało od długości tego przedziału. Odpowiada ona powierzchni pod krzywą rozkładu możliwych wartości przedziału. Rodzaj błędnego orzeczenia o zgodności obiektu z normą będzie zależało od kierunku przemieszczenia (znak "+" lub "-") przed odpowiednim przedziałem w (7).

### 3. Rodzaje błędnych decyzji

Zbadamy rodzaj błędnej decyzji dla różnych kombinacji współczynników  $a$  i  $b$ . Analizy zaczniemy dla przypadku  $b > 1$ . Wyrażenie (5) przekształcimy do postaci:

$$\varphi(x) = a + bx = b \left( \frac{a}{b} + x \right).$$

Ponieważ dla znamionowej charakterystyki  $b=1$ , to dla analizowanego przypadku

$$b = (1 + \gamma)$$

gdzie:  $\gamma$  - dodatni przyrost czułości charakterystyki przetwarzania (tangens kąta nachylenia jest wówczas większy od  $45^\circ$ ).

Dla  $b > 1$  możliwe są dwa rodzaje znaku współczynnika  $a$ , tj.  $a > 0$  lub  $a < 0$ , które rozpatrzy się po kolei.

#### Przypadek 1. $b > 1$ , $a > 0$

Reguła służąca podejmowaniu decyzji przyjmuje tu postać:

$$x_L \leq b \left( \frac{a}{b} + x \right) \leq x_H.$$

Po jej przekształceniu otrzymuje się:

$$\frac{x_L}{b} - \frac{a}{b} \leq x \leq \frac{x_H}{b} - \frac{a}{b}.$$

i następnie po wprowadzeniu do lewej strony nierówności  $\pm x_L$  oraz do prawej  $\pm x_H$

$$x_L - \frac{(b-1)}{b} x_L - \frac{a}{b} \leq x \leq x_H - \frac{(b-1)}{b} x_H - \frac{a}{b}.$$

Ponieważ długość zastępczego przedziału jest liczbą dodatnią, to:

$$x_L - \theta_{L1} \leq x \leq x_H - \theta_{H1} \quad (8)$$

gdzie:  $\theta_{L1} = \frac{(b-1)x_L + a}{b}$ ,  $\theta_{H1} = \frac{(b-1)x_H + a}{b}$ .

Górna granica zastępczego przedziału jest przesunięta do wnętrza zakresu zgodności, więc dla obiektów o wyniku pomiaru w zakresie o granicach  $(x_H - \theta_{H1})$  i  $x_H$  może zostać podjęta zła decyzja, tj. o błędnym wyniku (niezgodności). Prawdopodobieństwo takiej decyzji będzie:

$$P_{\bar{r}_1} = F(x_H) - F(x_H - \theta_{H1}). \quad (9)$$

Po rozłożeniu drugiego składnika prawej strony (9) w szereg Taylora wokół  $x_H$  z ograniczeniem do trzech członów, dla możliwych wartości mierzonego parametru o rozkładzie normalnym otrzymuje się:

$$\begin{aligned} P_{\bar{r}_1} &\approx f(x_H) + f(x_H)\theta_{H1} - \frac{1}{2}f'(x_H)\theta_{H1}^2 - F(x_H) = \\ &= f(x_H)\theta_{H1} - \frac{1}{2}f'(x_L)\theta_{L1} \end{aligned} \quad (10)$$

Dla rozkładu arc sinus zmieni się znak przed pochodną funkcji gęstości możliwych wartości wielkości mierzonej, a dla rozkładu równomiernego – człon ten w ogóle nie wystąpi.

Analiza nierówności (8) pokazuje, że zastępcza przesunięta dolna granica wykracza poza zakres zgodności parametru obiektu, tj. dla wartości mierzonego parametru w przedziale o granicach:  $(x_L - \theta_{L1})$  i  $x_L$  podejmuje się decyzję pozytywną i występuje niewykryte odstępstwo obiektu od normy z prawdopodobieństwem

$$P_{U_1} = F(x_L) - F(x_L - \theta_{L1}) \approx f(x_L)\theta_{L1} - \frac{1}{2}f'(x_L)\theta_{L1}^2 \quad (11)$$

W przypadku symetrycznego położenia dopuszczalnych wartości krańcowych  $x_1$  i  $x_h$  względem centrum rozkładu możliwych wartości parametru mierzonego  $f(x_L) = f(x_H)$  i  $f'(x_L) = -f'(x_H)$ , z wyrażenia (10) i (11) otrzymuje się:

$$P_{err1} = f(x_L)(\theta_{L1} + \theta_{H1}) - \frac{1}{2}f'(x_H)(\theta_{L1}^2 + \theta_{H1}^2).$$

Dla równomiernego rozkładu możliwych wartości wielkości mierzonej  $f(x_L) = 0$  i prawdopodobieństwo popełnienia błędnych decyzji jest wprost proporcjonalne do sumy długości przedziałów

zastępczych. Przy tym dla rozpatrywanego przypadku  $P_F > P_U$ . Dla rozkładu normalnego, pomimo, że  $\theta_{H1} > \theta_{L1}$  należy dodatkowo wziąć pod uwagę zależność pomiędzy odchyleniem standardowym możliwych wartości mierzonego parametru  $\sigma_H$  i rozmiarem dopuszczalnego zakresu od  $x_H$  do  $x_L$ .

#### Przypadek 2. $b > 1, a < 0$

Wskutek zmiany znaku przed współczynnikiem  $a$  reguła decyzyjna przyjmuje postać:

$$x_L - \frac{(b-1)}{b}x_L + \frac{a}{b} \leq x \leq x_H - \frac{(b-1)}{b}x_H + \frac{a}{b}. \quad (12)$$

Istnieją trzy możliwe warianty reguły decyzyjnej w zależności od stosunku modułów wyrażen:  $\frac{a}{b}$ ,  $\frac{b-1}{b}x_L$  i  $\frac{b-1}{b}x_H$ .

#### Wariant 2.1: $a < (b-1)x_L$

Z (12) otrzymuje się

$$x_L - \theta_{L2} \leq x \leq x_H - \theta_{H2},$$

$$\text{gdzie: } \theta_{L2} = \frac{(b-1)x_L - a}{b}, \quad \theta_{H2} = \frac{(b-1)x_H - a}{b}.$$

Rodzaj błędnej decyzji jest taki sam jak w poprzednio rozważanym przypadku, ale przy pozostałych danych bez zmian, prawdopodobieństwo tego rozwiązania będzie niższe, gdyż

$$\theta_{L2} < \theta_{L1} \text{ i } \theta_{H2} < \theta_{H1}.$$

#### Wariant 2.2: $(b-1)x_L \leq a \leq (b-1)x_H$

W tym przypadku nierówność (12) można zapisać jako:

$$x_L + \theta_{L3} \leq x \leq x_H - \theta_{H3}$$

$$\text{gdzie: } \theta_{L3} = \frac{a - (b-1)x_L}{b}, \quad \theta_{H3} = \frac{(b-1)x_H - a}{b}.$$

Oba przedziały zastępcze są przesunięte do środka obszaru wartości prawidłowych. Dlatego tylko może wystąpić błędne odrzucenie obiektu o prawdopodobieństwie:

$$P_{\text{err3}} = P_{F3} = f(x_L)(\theta_{L3} + \theta_{H3}) + \frac{1}{2}f'(x_L)(\theta_{L3}^2 + \theta_{H3}^2)$$

#### Wariant 2.3: $a > (b-1)x_H$

W tym ostatnim przypadku reguła decyzyjna ma postać:

$$x_L + \theta_{L4} \leq x \leq x_H + \theta_{H4},$$

$$\text{gdzie: } \theta_{L4} = \frac{a - (b-1)x_L}{b}, \quad \theta_{H4} = \frac{a - (b-1)x_H}{b}.$$

Stąd wynika wyrażenie na prawdopodobieństwo dokonania błędnych decyzji:

$$P_{\text{err4}} = f(x_L)(\theta_{L4} + \theta_{H4}) + \frac{1}{2}f'(x_L)(\theta_{L4}^2 + \theta_{H4}^2)$$

Należy zauważyć, że dla innego niż równomierny rozkładu wartości mierzonej wielkości, przy szacowaniu wpływu rzeczywistej charakterystyki przyrządu trzeba uwzględnić stosunek parametrów tego rozkładu i rozmiarów dopuszczalnego zakresu zmian wartości wielkości mierzonej (obszaru zgodności).

## 4. Przypadki ogólne dla $b < 1$

Zależności teoretyczne pomiędzy wynikami pomiaru i uzyskanymi decyzjami o zgodności dla różnych przesunięć  $a$  charakterystyki przetwarzania przyrządu przy czułości  $b < 1$  podano w tabeli 1. Zastosowanie w praktyce ilustruje przykład liczbowy dla dwu wartości  $b$ .

#### Przykład liczbowy

Wartości pewnej mierzonej wielkości  $x$ , która charakteryzuje badany produkt mają rozkład równomierny o gęstości  $f(x) = 0,1$  i wartości oczekiwanej  $m_x = 8,0$ . Według wymagań normy dopuszcza się stosowanie tego produktu dla odchyień od  $m_x$  nie przekraczających  $\pm 1,0$ . Podział wartości  $x$  na obszary zgodności i niezgodności z wymaganiami następuje więc dla wartości granicznych  $x_L = 7,0$  i  $x_H = 9,0$ . Charakterystyka przetwarzania przyrządu pomiarowego jest:

$$\varphi(x) = 0,1 + 1,1x.$$

Należy zbadać niepewność decyzji o zgodności obiektu z wymaganiami.

Według (8) zaobserwuje się więc dla dolnej wartości granicznej  $x_L$  stan *unfound* i dla górnej  $x_H$  - stan *false* o prawdopodobieństwach

$$P_U = \frac{7.0(1.1-1)+0.1}{1.1} \times 0.1 = 0.073;$$

$$P_{F_L} = \frac{9.0(1.1-1)+0.1}{1.1} \times 0.1 = 0.091$$

Natomiast, jeśli charakterystyka przetwarzania przyrządu będzie

$$\varphi(x) = 0,1 + 0,9x \text{ i } \text{gd}y \ a < x_L(1-b),$$

to dla dolnej granicy obszaru zgodności wystąpi stan - *false*, zaś dla górnej - *unfound*, a więc odwrotnie niż poprzednio.

Prawdopodobieństwa obu stanów wynoszą zaś odpowiednio:

$$P_{F_L} = \frac{7.0(1-0.9)-0.1}{0.9} \times 0.1 = 0.067;$$

$$P_U = \frac{9.0(1-0.9)+0.1}{0.9} \times 0.1 = 0.110$$

Jak widać z tego przykładu, przy zmianie charakterystyki przetwarzania zmieniło się zarówno prawdopodobieństwo jak i rodzaj błędnych decyzji, choć wartości  $P_{\text{err}}$  są zbliżone.

Dla rozkładu normalnego, przy ocenie wpływu rzeczywistej charakterystyki przetwarzania na niepewność oceny, należy wziąć pod uwagę fakt, że rozkład gęstości prawdopodobieństwa wartości mierzonej nie jest stały. Przy określaniu prawdopodobieństwa błędnych decyzji trzeba więc uwzględnić stosunek długości odcinka zgodności i standardowego odchylenia wartości badanego parametru.

Jeśli natomiast  $b = 1,1$ , to na podstawie wyników pomiarów występujących w granicach  $x_L, (x_L + \theta_{L1})$ , tj. (7,0; 7,73), albo gdy  $x_H, (x_H + \theta_{H1})$ , tj. (9,0; 9,91) zostaną podjęte błędne decyzje. Tak więc, gdy  $x = 6,5$  otrzymuje się wynik 7,25, na podstawie którego podejmie się decyzję o zgodności obiektu z wymaganiami, choć w rzeczywistości nie spełnia on normy (*unfound*).

Gdy  $b = 0,9$ , to błędne decyzje występują dla rezultatów pomiaru położonych w obrębie przedziału  $(x_L - \theta_{L2}), x_L$ , tj. dla (6,3; 7,0) oraz dla (7,9; 9,0). Stąd wynika, że wolną od błędów decyzję można podjąć tylko w granicach (7,0; 7,9). Jednakże wartość  $b$  może przyjmować dowolną wartość z przedziału  $0,9 \leq b \leq 1,1$ . Dlatego dla tego przedziału wartości  $b$  otrzymuje się dwa rodzaje wyników, tj. zarówno stwierdzające zgodność, jak i stwierdzające niezgodność obiektu z wymaganiami.

Tab. 1. Zależności rodzaju i prawdopodobieństwa decyzji o zgodności obiektu z wymaganiami od stosunku składników charakterystyki przetwarzania przyrządu pomiarowego  
 Tab. 1. Dependence of the type and probability of a decision to comply of the object with the requirements of the processing characteristic of the measuring instrument

$\varphi(x)$		$\theta_L$	$\theta_H$	$P_{err}$
$b > 1$	$a > 0$	unfound $\frac{x_L(b-1)+a}{b}$	false $\frac{(b-1)x_L+a}{b}$	
	$a < 0$	unfound $\frac{x_L(b-1)-a}{b}$	false $\frac{x_H(b-1)-a}{b}$	
	$a < 0$	false $\frac{a-x_L(b-1)}{b}$	false $\frac{x_H(b-1)-a}{b}$	
	$a < 0$	false $\frac{a-x_L(b-1)}{b}$	unfound $\frac{a-x_H(b-1)}{b}$	
$b < 1$	$a < 0$	false $\frac{a-x_L(b-1)}{b}$	unfound $\frac{x_H(1-b)+a}{b}$	
	$a > 0$	false $\frac{x_L(1-b)-a}{b}$	unfound $\frac{x_H(1-b)-a}{b}$	
	$a > 0$	unfound $\frac{a-x_L(1-b)}{b}$	unfound $\frac{x_L(1-b)-a}{b}$	
	$a > 0$	unfound $\frac{a-x_L(1-b)}{b}$	false $\frac{a-x_L(1-b)}{b}$	

Na przykład wynik pomiaru  $y = 7,85$  uzyskuje się, gdy wartość wejściowa  $x = 9,69$  i  $b = 0,8$  oraz dla  $x = 7,38$  i  $b = 1,05$ . Świadczy to o niepewności oceny decyzji dotyczącej zgodności lub niezgodności obiektu z wymaganiami. Jeśli wprowadzić ograniczenia dla wartości  $b$  (powyżej lub poniżej  $b = 1$ ), to niepewność zmniejszy się dwukrotnie i można się wówczas spodziewać występowania tylko jednego określonego rodzaju błędnej decyzji (patrz tabela 1).

## 5. Podsumowanie

Z powyższych rozważań, jak i zależności zestawionych w tabeli 1 wynika, że aby uzyskać wiarygodną decyzję o stanie obiektu nie wystarczy, aby zadać (znormalizować) maksymalne dopuszczalne odchylenie rzeczywistej charakterystyki przetwarzania przyrządu pomiarowego. Przesunięcie rzeczywistej charakterystyki i jej czułość (wrażliwość) mogą w tych granicach przyjmować różne wartości. Może to spowodować nie tylko zmianę prawdopodobieństwa decyzji (czyli jej niepewności), ale również zmianę jej rodzaju.

Konieczna jest więc normalizacja nie tylko zakresu odchylenia rzeczywistej charakterystyki przetwarzania stosowanego przyrządu pomiarowego od znamionowej, ale również jej dopuszczalnego przesunięcia i nachylenia (czułości). Takie podejście pozwala na rozwiązanie jednego z dwóch zadań.

Po pierwsze - na podstawie możliwej formy rzeczywistej charakterystyki przetwarzania  $\varphi(x)$  i otrzymanych zależności można oszacować niepewność podjętej decyzji i wyznaczyć zakres możliwych wartości mierzonych wielkości jako parametru badanego obiektu, tj. zakres, w którym błędne decyzje mogą występować z określonym prawdopodobieństwem.

Po wtóre - w oparciu o wymaganą wiarygodność i charakter podejmowanych decyzji można sformułować wymagania doty-

czące rzeczywistej charakterystyki przetwarzania przyrządu lub systemu pomiarowego.

Powyższe rozważania i otrzymane na ich podstawie wnioski mogą być wykorzystane dla oceny niepewności podejmowanych decyzji o zgodności obiektu z wymaganiami wszędzie tam, gdzie taka decyzja opiera się na pomiarach przyrządami o możliwej do oszacowania niepewności instrumentalnej (typu B) parametrów ich charakterystyki przetwarzania.

## 6. Literatura

- [1] Guide to the Expression of Uncertainty in Measurement, revised and corrected version of GUM 1995, BIPM\_JCGM 100:2008. (tłumaczenie polskie wydania GUM z 1995 r. Wyrażanie Niepewności Pomiaru. Przewodnik. z komentarzem J. Jaworskiego, Wydawnictwo Głównego Urzędu Miar Alfávero Warszawa 1999, 2002).
- [2] Peter J. Bickel, Kjell A. Doksum, Mathematical Statistics, vol.1, Basic Ideas and Selected Topics, 2nd ed. Prentice Hall, 2001.
- [3] Ellison Stephen L.R., Soumi Gregory and Harcastl William A.: Quantifying uncertainty in qualitative analysis. Analyst, May, 1998, vol. 123 (1155-1161).
- [4] ISO 10576 -1: 2003. Statistical methods. Guidelines for evaluation of conformity with specified requirements.
- [5] Bishop C.: Pattern Recognition and Machine Learning. Springer 2006.
- [6] [6] Volodarsky E.T., Koshevaya L. A., Warszawa Z.: Niepewność jako miara poziomu zaufania do wyników niektórych procedur doświadczalnych. PAK, vol. 57, nr 5/2011 s. 483 -486.

otrzymano / received: 16.01.2012

przyjęto do druku / accepted: 02.03.2012

artykuł recenzowany / revised paper