

Michał BOŁTRUKIEWICZ

POLITECHNIKA POZNAŃSKA, INSTYTUT ELEKTROTECHNIKI I ELEKTRONIKI PRZEMYSŁOWEJ,
ul. Piotrowo 3A, 60-965 Poznań

Badania modelu fragmentu systemu naczyń krwionośnych

Dr inż. Michał BOŁTRUKIEWICZ

Ukończył studia na kierunku Automatyka i Robotyka (1994). Stopień doktora nauk technicznych uzyskał w 2003 roku. Od 1995 roku jest pracownikiem Politechniki Poznańskiej, obecnie na stanowisku adiunkta w Zakładzie Metrologii i Optoelektroniki. Jest autorem lub współautorem ponad 50 publikacji naukowych. Zajmuje się pomiarami i przetwarzaniem sygnałów biomedycznych, oraz konstrukcją elektronicznych przetworników sygnałów.



e-mail: boltruk@et.put.poznan.pl

Streszczenie

Przedstawiona praca dotyczy modelowania właściwości dynamicznych systemu naczyń krwionośnych. W pracy wykorzystuje się uzyskaną eksperymentalnie transmitancję fragmentu systemu naczyń krwionośnych znajdującego się pomiędzy stawem łokciowym i nadgarstkiem. W artykule rozważa się dwa modele podatnej tętnicy, które są badane w aspekcie dopasowania do danych uzyskanych doświadczalnie. Do dalszych prac zostaje wybrany model charakteryzujący się dużym stopniem dopasowania do danych eksperymentalnych, uwzględniający rzeczywiste zachowanie cieczy w odkształconej podatnie tętnicy.

Słowa kluczowe: naczynia krwionośne, właściwości dynamiczne, transmitancja, odpowiedź skokowa, fala uderzeniowa, model fizyczny.

Investigations of a model of the blood vessel part

Abstract

The paper concerns the modeling of dynamic specificity of blood vessel. The simple physical models of blood vessel part were investigated. In the experiments a PPG signal was used. The optoelectronic sensors were installed on a wrist and forearm. After the acquisition, the obtained samples of the PPG signal were identified by the RLS method. As a result of the experiments the transfer function of the investigated blood vessel part was obtained. This transmittance is described with Eq. (4), and its step response is shown in Fig. 2. In the work two physical models are considered. The structures of these models are shown in Figs.1 and 3. The first one uses the phenomenon of suppressed oscillations, while the second one - the phenomenon of impact of the liquid wave. The transfer functions of the models are described by Eqs. (6) and (13), respectively. In the study compatibility between the obtained transfer function and the physical models was verified. The transfer function of blood vessel and the transfer functions of physical models were compared. Their step responses were compared, too. Finally, the correspondence between the second physical model and the transmittance of the blood vessel part was experimentally proved.

Keywords: blood vessel, dynamic specificity, transfer function, step response, impact wave, physical model.

1. Wprowadzenie

Sprężystość naczyń krwionośnych, a w szczególności tętnic należących do tzw. powietrznicy (m.in. aorta i bezpośrednio jej rozgałęzienia) ma istotne znaczenie dla poprawnej pracy układu krwionośnego. Przede wszystkim umożliwia utrzymanie ciągłego i jednokierunkowego przepływu krwi w układzie krwionośnym pomimo, że jest ona dostarczana do obiegu tętniczego w sposób okresowy.

Podczas skurczu serca dochodzi do zamiany energii kinetycznej krwi, wypływającej z dużą prędkością z lewej komory serca, na energię potencjalną sprężystości kumulującą się w rozciągniętych ścianach naczyń krwionośnych powietrznicy. Po jego zakończeniu i zamknięciu zastawki lewej komory serca, ściany naczyń krwionośnych powietrznicy powracają do pierwotnych rozmiarów wta-

czając krew do dalszych tętnic układu krwionośnego, podtrzymując ciągłość przepływu pomimo zaniku wymuszenia.

Do ilościowej oceny sprężystości ścian naczyń krwionośnych wykorzystuje się współczynnik sprężystości objętościowej będący analogią dla modułu Younga wykorzystywanego w systemach mechaniki. Jest on definiowany jako przyrost ciśnienia wewnątrznaczyniowego spowodowany przyrostem jego objętości, i dany zależnością

$$E = \frac{\Delta P}{\Delta V} \quad (1)$$

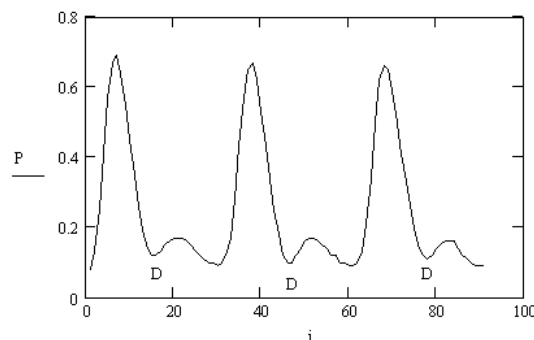
Dla naczyń krwionośnych powietrznicy charakteryzujących się największą sprężystością wartość współczynnika sprężystości określana jest na ok. 177 Pa/m³. Dla całego układu tętniczego jest ona szacowana na poziomie ok. 133 Pa/m³.

Jedną z najpoważniejszych chorób układu krążenia jest miażdżyca. Polega ona na osadzaniu na wewnętrznych ściankach tętnic cholesterolu mającego postać blaszek miażdżycowych [1]. Ten proces prowadzi do zmniejszenia pola przekroju poprzecznego naczynia krwionośnego, wywołując tym samym wzrost oporów przepływu. Blaszką miażdżycową ulega następnie zwężeniu co z kolei prowadzi do utwardzenia się warstwy osadu. W konsekwencji oprócz zwiększenia oporów przepływu zmniejsza się sprężystość naczyń krwionośnych. Badanie tego parametru może więc zostać wykorzystane do oceny stopnia zaawansowania miażdżycy.

2. Badanie właściwości dynamicznych naczyń krwionośnych

W badaniach właściwości dynamicznych naczyń krwionośnych wykorzystuje się sygnał fotopletyzmograficzny. Zawiera on informacje o ilości krwi w naczyniach krwionośnych poddawanych transiluminacji światłem w paśmie podczerwieni o długości 940nm. Do jego najważniejszych zastosowań należą wyznaczanie i monitorowanie saturacji tlenowej krwi. Jednak nieinwazyjny i relatywnie nieskomplikowany sposób pozyskiwania sygnału fotopletyzmograficznego [2] skłaniają do poszukiwania jego nowych zastosowań diagnostycznych.

Na rys. 1 pokazano przykładowy przebieg sygnału fotopletyzmograficznego.



Rys. 1. Sygnał fotopletyzmograficzny
Fig. 1. The photoplethysmographic signal (PPG)

Jego najbardziej charakterystycznym elementem jest tzw. wcięcie dykrotyczne, oznaczone na rysunku symbolem „D”, które identyfikuje oscylacje towarzyszące powstawaniu sygnału fotopletyzmograficznego. Uzasadnia to próbę wykorzystania tego sygnału

do identyfikacji zjawisk o charakterze dynamicznym zachodzących w przepływającej krwi, świadczących o interakcjach pomiędzy krwią i ściankami naczyń krwionośnych.

Badanie właściwości dynamicznych naczyń krwionośnych składa się z trzech etapów:

- akwizycji sygnałów i wyznaczenia transmitancji (funkcji przejścia) stanowiącej empiryczny model matematyczny badanego fragmentu układu krwionośnego,
- sformułowania modelu fizycznego badanego fragmentu układu krwionośnego,
- parametryzacji współczynników modelu fizycznego.

Przeprowadzone dotychczas prace eksperymentalne opisane w [3] koncentrowały się na akwizycji i wstępnym kondycjonowaniu sygnałów z dwóch optoelektronicznych czujników odbiciowych umieszczonych w okolicach stawu łokciowego i nadgarstka. Zarejestrowane przebiegi sygnału fotopletyzmoграфического, stanowiące wejściowy i wyjściowy sygnał badanego systemu dynamicznego poddawano identyfikacji parametrycznej metodą RLS, otrzymując empiryczny model matematyczny. Jedną z uzyskanych w ten sposób transmitancji dana jest zależnością

$$G(z) = 0,2857 - \frac{0,0053z^{-1} - 0,0054z^{-2}}{1 - 1,9408z^{-1} + 0,9445z^{-2}} \quad (2)$$

Pierwsza jej składowa jest stałą i nie wnosi istotnych informacji. W dalszych badaniach podjęto próbę sformułowania modelu fizycznego drugiej składowej, która dana jest zależnością

$$G(z) = \frac{-0,0053z^{-1} + 0,0054z^{-2}}{1 - 1,9408z^{-1} + 0,9445z^{-2}} \quad (3)$$

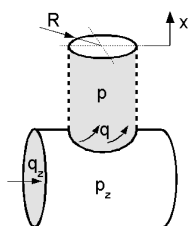
Celem przeprowadzonych prac było uzyskanie modelu fizycznego o możliwie najprostszej strukturze, z uwagi na to, że empiryczny model matematyczny był opisany transmitancją 2-go rzędu. W warstwie obliczeniowej wykorzystano równania Lagrange'a oraz znane analogie pomiędzy układami mechanicznymi, elektrycznymi i hydraulicznymi [4].

Ponieważ opisywane zjawiska fizyczne miały charakter ciągły transmitancję dyskretną (3) poddano transformacji biliniowej [5] uzyskując zależność

$$G(s) = \frac{-0,5508s + 1,0295}{s^2 + 5,7138s + 38,0923} \quad (4)$$

3. Wykorzystanie modelu tłumionych drgań harmonicznyc

Początkowo uważano, że sprężystość naczyń krwionośnych można modelować przy użyciu komory hydraulicznej o przekroju kołowym pokazanej na rys. 2, do której w wyniku wzrostu ciśnienia zewnętrznego napływa pewna, niewielka ilość krwi.



Rys. 2. Model podatnej tętnicy
Fig. 2. The model of artery susceptibility

Dla ułatwienia obliczeń przyjęto ponadto, że pod wpływem wzrostu ciśnienia wewnętrznego zmienia się długość komory

natomiast jej średnica wewnętrzna pozostaje stała. Oznacza to, że zmiana objętości komory jest proporcjonalna do jej wydłużenia. W przeprowadzonych rozważaniach pominięto także wpływ ściśliwości krwi.

Do wyznaczenia opisu matematycznego modelu, wykorzystano twierdzenie o pochodnej geometrycznej momentu pędu [6]. Pozwoliło to na uwzględnienie zmienności masy krwi oznaczonej jako m , pokonującej wewnątrz pulsującej komory opory ruchu sparametryzowane współczynnikiem b i rozciągającej jej ściany o współczynnik sprężystości k . Uzyskany w ten sposób model matematyczny, mający postać nieliniowego równania różniczkowego danego zależnością

$$m \left(x \frac{d^2x}{dt^2} + \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 \right) + b \frac{dx}{dt} + kx = 0 \quad (5)$$

był przedmiotem dokładnej analizy w pracy [7].

Wyznaczonego równania różniczkowego nie udało się jednak rozwiązać znanymi metodami, co z dużym prawdopodobieństwem oznacza, że nie posiada ono rozwiązania w postaci zależności funkcyjnej. Ponieważ jednak przebieg tego rozwiązania w funkcji czasu był znany, próbowano przewidywać jego postać analityczną, do której numerycznie dopasowywano dane eksperymentalne. Przeprowadzone prace nie przyniosły jednak spodziewanych rezultatów ponieważ uzyskiwane rozwiązania charakteryzowały się niewielką korelacją z danymi eksperymentalnymi.

Przyczyną nieliniowości równania (5) był składnik związany ze zmiennością masy znajdującej się wewnątrz pulsującej komory. Jego istnienie nawiązuje do rzeczywistego przebiegu badanego zjawiska i zarazem spełnia obowiązującą w układach przepływowych zasadę ciągłości przepływu [8]. Ponieważ jednak jest to jedyny składnik wprowadzający nieliniowość rozważano potrzebę jego wprowadzenia.

Uzyskany doświadczalnie model jest liniowy, pomimo iż rzeczywistość mechaniki płynów jest z definicji nieliniowa. Nie można jednak wykluczyć, że charakterystyka statyczna wiążąca zmiany objętości badanej tętnicy ze zmianami ciśnienia tętniczego daje się aproksymować linią prostą. Wobec liniowości modelu eksperymentalnego, sens wprowadzenia czynnika nieliniowego wydaje się wątpliwy.

W grupie tzw. tętnic umięśnionych stosunek ich promienia wewnętrznego do grubości ścianki zmienia się od wartości 3:1 przy minimalnej wartości ciśnienia do wartości 5:1 przy ciśnieniu maksymalnym. Jeżeli przyjąć, że zewnętrzna średnica tętnicy wynosi 4 mm, to przyrost masy na odcinku pomiędzy czujnikami, wynoszącym ok. 300 mm, wynosi tylko ok. 0,5 g co stanowi niecałe 25% masy krwi w badanym fragmencie tętnicy. Biorąc ponadto pod uwagę, że tylko część z 25% przyrostu masy bierze udział w oddziaływaniach dynamicznych, rezygnacja z uwzględnienia zmienności masy wydaje się uzasadniona tym bardziej.

Ostatecznie, po rezygnacji z uwzględniania zmienności masy, uzyskano transmitancję daną zależnością

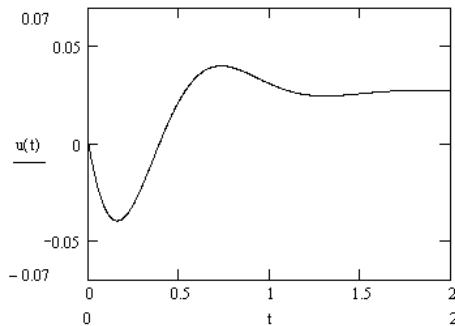
$$G(s) = \frac{1}{ms^2 + bs + k} \quad (6)$$

wykorzystywaną często jako ogólny model tłumionych drgań harmonicznyc. Porównując ją z transmitancją uzyskaną eksperymentalnie stwierdzono ostatecznie, że istotne różnice wynikające z postaci liczników obu transmitancji dyskwalifikują strukturę modelu fizycznego pokazaną na rys. 2.

4. Koncepcja modelu z „nieruchomą cieczą”

Poszukiwany model powinien spełniać dwa kryteria: liniowość oraz podobieństwo właściwości dynamicznych. Wymaga to zwrócenia szczególnej uwagi na charakter zjawisk, które opisuje transmitancja uzyskana eksperymentalnie.

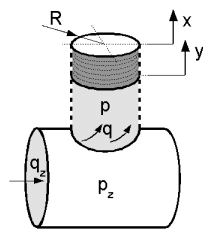
Zaprezentowany na rys. 3 przebieg jej odpowiedzi skokowej, wyznaczonej w programie MathCad11 oznacza, że zwiększenie prędkości przepływu, towarzyszące skokowemu wzrostowi ciśnienia wewnątrz naczyniowego oznaczonego jako P_z , powoduje ruch części cieczy w kierunku przeciwnym, co wydaje się dość dziwne.



Rys. 3. Odpowiedź skokowa transmitancji fragmentu naczyń krwionośnych
Fig. 3. The step response of the blood vessel part transfer function

Transmitancja, dana zależnością (4) reprezentuje system dynamiczny 2-go rzędu. Jego zachowanie można więc badać przy pomocy prostych analogii mechanicznych: masy oraz tłumienia i sprężystości reprezentujących odpowiednio opory przepływu i podatność naczyń krwionośnych. Jednak pomimo przeprowadzonych licznych prób nie udało się tak skonfigurować trzech wymienionych elementów, aby ich transmitancja miała poszukiwaną postać.

Poszukując modelu „dopasowanego” do transmitancji uzyskanej eksperymentalnie zauważono, że w układach hydraulicznych, w pewnych określonych sytuacjach, może dochodzić do ruchu cieczy w kierunku przeciwnym do kierunku przepływu wymuszonego przez warunki zewnętrzne. Zjawisko to nosi nazwę fali uderzeniowej, która powstaje w gwałtownie zatrzymanej cieczy (np. nagle zamknięcie zaworu) [9]. Ciecz zgromadzona w przewodzie nie potrafi zatrzymać się jednocześnie. W chwili zamknięcia zaworu zatrzymuje się pierwsza „umowna” warstwa cieczy znajdująca się na końcu przewodu, w pobliżu zaworu. Jakkolwiek jej prędkość względem przewodu jest zerowa, to wskutek bezwładności rozciąga podatny przewód poruszając się razem z nim. W ten sam sposób zatrzymują się kolejne umowne warstwy do momentu gdy energia kinetyczna poruszającej się masy nie zostanie całkowicie zamieniona na energię potencjalną, skumulowaną w sprężystości ścian przewodu, i na ciepło powstające wskutek tarcia wewnątrz cieczy (lepkość). Granica obszaru nieruchomej i płynącej jeszcze cieczy nazywa się falą uderzeniową i porusza się ona od miejsca, w którym przepływ został zatrzymany w kierunku przeciwnym do kierunku przepływu cieczy. Uwzględniając fakt powstawania obszaru „nieruchomej cieczy”, zaznaczonego kolorem ciemnoszarym, badano właściwości dynamiczne modelu pokazanego na rys. 4.



Rys. 4. Model podatnej tętnicy „z nieruchomą cieczą”
Fig. 4. The model of artery susceptibility with “immovable liquid”

W rozważanym modelu x i y są współrzędnymi obu końców obszaru wyhamowanej cieczy. Wartość współrzędnej x wyraża

jednocześnie zmianę wymiarów zewnętrznych przewodu. Różnica wartości x - y wyraża natomiast wielkość odkształcenia sprężystego. Analiza przedstawionego modelu przeprowadzona metodą równań Lagrange'a prowadzi do układu równań różniczkowych jednorodnych danego zależnością

$$\begin{cases} m\ddot{x} + k(x - y) = 0 \\ b\ddot{y} - k(x - y) = 0 \end{cases} \quad (7)$$

Po jego rozwiązaniu metodą przekształcenia Laplace'a, przy założeniu zerowych warunków początkowych, otrzymuje się transmitancje dane zależnościami

$$X(s) = \frac{bs + k}{s(bms^2 + kms + kb)} Q(s) \quad (8)$$

$$Y(s) = \frac{k}{bs + k} X(s) = \frac{k}{s(bms^2 + kms + kb)} Q(s) \quad (9)$$

Wymuszeniem dla badanego systemu jest tzw. przepływ $q(t)$, powstający w chwili skokowego wzrostu ciśnienia wewnątrz naczyniowego oznaczonego na rys. 4 symbolem P_z . Wyraża on objętość krwi $v_1(t)$ wpływającą do podatnego przewodu w jednostce czasu, co prezentuje zależność

$$q(t) = \frac{d}{dt} v_1(t) \quad (10)$$

Uwzględniając ponadto, że zmiana objętości przewodu dana zależnością

$$v_2(t) = \pi R^2 x(t) \quad (11)$$

jest proporcjonalna tylko do jego wydłużenia, uzyskuje się ostatecznie transmitancję daną zależnością

$$V_2(s) = \frac{\frac{1}{m} s + \frac{k}{bm}}{s^2 + \frac{k}{b} s + \frac{k}{m}} V_1(s) \quad (12)$$

w której sygnały wymuszenia i odpowiedzi mają wymiar objętości (ilości) czynnika.

Gdyby więc w liczniku transmitancji uzyskanej eksperymentalnie (4) nie występował znak minus, reprezentowałaby ona model fizyczny pokazany na rys. 4, mając postać daną zależnością

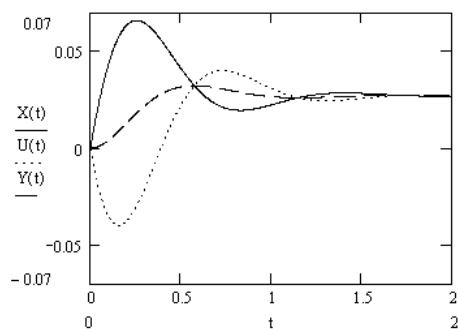
$$G(s) = \frac{0,5508s + 1,0295}{s^2 + 5,7138s + 38,0923} \quad (13)$$

5. Transmitancja fali uderzeniowej

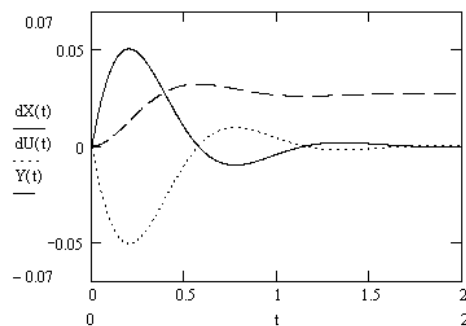
Badając relacje zachodzące między obiema transmitancjami wyznaczono ich odpowiedzi skokowe, które pokazano na rys. 5.

Odpowiedź transmitancji eksperymentalnej (4) zaznaczono linią kropkowaną, a odpowiedź systemu o transmitancji ze zmienionym znakiem (13), zaznaczono linią ciągłą. Jak widać obie odpowiedzi skokowe charakteryzuje ta sama wartość końcowa.

Na rys. 6 pokazano natomiast składowe odpowiedzi skokowych obu transmitancji. Dwie z nich będące odpowiedzią na pochodną sygnału wejściowego tworzą tzw. falę stojącą



Rys. 5. Odpowiedzi skokowe transmitancji
Fig. 5. The step responses of transfer functions



Rys. 6. Składowe odpowiedzi skokowych
Fig. 6. The components of step responses

Trzeci przebieg narysowany linią przerywaną pokazuje ruch końca obszaru zatrzymanej cieczy, który w równaniu różniczkowym (7) oznaczony jest jako $y(t)$.

Zbieżna wartość końcowa i istnienie fali stojącej oznacza, że badane transmitancje opisują ten sam system dynamiczny, przy czym jest on obserwowany z różnych układów odniesienia.

Transmitancja modelu pokazanego na rys. 4 reprezentuje przebiegi charakterystycznych punktów modelu oznaczonych jako $x(t)$ i $y(t)$ względem zewnętrznego układu odniesienia.

Transmitancja modelu eksperymentalnego reprezentuje natomiast przebiegi tych samych punktów w układzie odniesienia, który porusza się razem z końcem odkształcanego przewodu i stanowi model matematyczny fali uderzeniowej.

6. Podsumowanie

Przeprowadzone analizy pozwalają stwierdzić, że zjawiska dynamiczne zachodzące w podatnej tętnicy mogą zostać opisane przy użyciu dwóch komplementarnych modeli matematycznych, których transmitancja jest daną zależnością

$$G(s) = \frac{\pm \frac{1}{m} s + \frac{k}{bm}}{s^2 + \frac{k}{b} s + \frac{k}{m}} \quad (14)$$

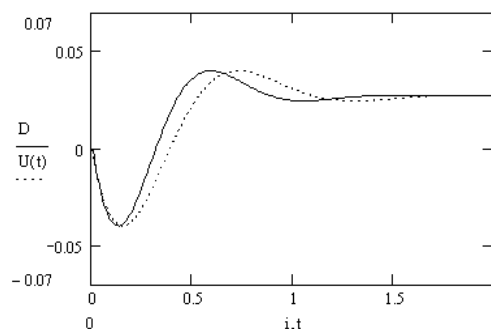
Gdy w liczniku transmitancji występuje znak minus stanowi ona model matematyczny fali uderzeniowej, która powstaje w odkształconej tętnicy, stając się składową sygnału fotopletyzmo graficznego. W przypadku przeciwnym uzyskana transmitancja jest matematycznym modelem sprężystości tętnicy, a uzyskanie empirycznego modelu matematycznego o takiej postaci wymaga akwizycji sygnału pletyzmograficznego.

Sygnał fotopletyzmo graficzny, który wykorzystywano w badaniach, zawiera informację o ilości krwi w naczyniu krwionośnym poddawany transiluminacji. Jakkolwiek ma ona wymiar objętości to jednak próba przypisania jej konkretnego kształtu geome-

trycznego może prowadzić do istotnych błędów interpretacyjnych, ponieważ komponenty przebiegu fotopletyzmo graficznego mogą zostać zinterpretowane jako przebiegi odpowiedzi naczyń krwionośnych na zmiany ciśnienia wewnątrz naczyniowego. Ich transmitancje nie dają się jednak dopasować do „modelu sprężystości”, co wykazano na przykładzie analizowanych danych eksperymentalnych.

Celem przeprowadzonych badań była analiza zjawisk fizycznych zachodzących w badanym fragmencie naczyń krwionośnych. Ponieważ w badaniach nie dokonywano oceny ilościowej, realizując konwersję transmitancji dyskretnych (3) do postaci transmitancji ciągłej (4) nie uwzględniono tzw. nieliniowego odwzorowania osi częstotliwości.

Na rys. 7 pokazano odpowiedzi skokowe transmitancji dyskretnych i ciągłych przy czym pierwszą z nich narysowano linią ciągłą natomiast drugą linią kropkowaną.



Rys. 7. Odpowiedzi skokowe transmitancji danych zależnościami (3) i (4)
Fig. 7. The step responses of transfer function described with Eqs. (3) and (4)

Porównując oba przebiegi można stwierdzić, że niezależnie od widocznych różnic reprezentują one system fizyczny o identycznych właściwościach dynamicznych, co jest wystarczające ze względu na charakter przeprowadzonych badań.

7. Literatura

- [1] Traczyk W.Z., Trzebski A., (red): Fizjologia człowieka z elementami fizjologii klinicznej. Państwowy Zakład Wydawnictw Lekarskich, Warszawa 1980.
- [2] Boltrukiewicz M.: Sposoby pozyskiwania i kondycjonowania sygnału fotopletyzmo graficznego, Praca doktorska pod kier. A. Cysewskiej Sobusiak., Politechnika Poznańska 2003.
- [3] Boltrukiewicz M., Prokop D.: Modelowanie parametryczne fragmentu układu krwionośnego z wykorzystaniem wieloczułnikowego systemu akwizycji sygnału PPG. Materiały IX Sympozjum Modelowanie i Pomiary w Medycynie, Krynica Zdrój, Maj 2009, str. 95-99.
- [4] Węgrzyn S.: Podstawy automatyki; PWN, Warszawa 1980.
- [5] Janiszowski K.: Identyfikacja modeli parametrycznych w przykładach; Akademicka Oficyna Wydawnicza EXIT, Warszawa 2002.
- [6] Niezgodziński T.: Mechanika ogólna; PWN Warszawa 2002.
- [7] Boltrukiewicz M.; Przepływowy model fragmentu systemu naczyń krwionośnych. Materiały X Sympozjum Modelowanie i Pomiary w Medycynie, Krynica Zdrój, Maj 2011, str. 107-110.
- [8] Bukowski J., Kijkowski P.: Kurs mechaniki płynów; PWN, Warszawa 1980.
- [9] Mitosek M.: Mechanika płynów w inżynierii i ochronie środowiska; PWN, Warszawa 2001.
- [10] Zieliński T.: Cyfrowe przetwarzanie sygnałów. Od teorii do zastosowań; WKŁ, Warszawa, 2005.