

Mirosław WOJTYŁA

AKADEMIA TECHNICZNO-HUMANISTYCZNA W BIELSKU-BIAŁEJ, LABORATORIUM METROLOGII,
ul. Willowa 2, 43-309 Bielsko-Biała

Przybliżony model matematyczny procesu gięcia elementów rurkowych na giętarkach

Dr inż. Mirosław WOJTYŁA

Pracuje w Laboratorium Metrologii Akademii Techniczno-Humanistycznej w Bielsku-Białej. Głównie zainteresowania naukowe to pomiary i szacowanie niepewności pomiaru elementów rurkowych i ich sprawdzianów oraz metrologia wielkości geometrycznych, w tym współrzędnościowa technika pomiarowa. W tym zakresie intensywnie współpracuje z przemysłem.



e-mail: mwojtyla@ath.eu

Streszczenie

Artykuł przedstawia przybliżony model matematyczny operacji gięcia elementów rurkowych na giętarcie. Model nie uwzględnia aspektów fizycznych procesu gięcia. Jednakże, jak obrazuje załączony przykład, może z wystarczającą dokładnością służyć do symulacji procesu gięcia na giętarcie. Model ten posłużył do wyznaczenia tolerancji w punktach nominalnych elementu opisanego w artykule „Dokładność maszyny do gięcia elementów rurkowych”.

Słowa kluczowe: elementy rurkowe, model matematyczny, gięcie.

Approximate mathematical model of the process of bending tubular elements for benders

Abstract

The paper presents an approximate mathematical model for operation of bending tubular elements (such as support frame of a motorbike, brake lines, etc.) on a bender. The model does not take into account physical aspects of the bending process. The process of creating a single length of the element (i -th segment) can be divided into three operations: 1) shifting the tube - identified in the model for m_i , 2) turning the tube - identified in the model by γ_i , 3) bending the tube - identified in the model by α_i . Homogeneous transformation matrices, corresponding to the specified parameters, take form (6), (7), which after multiplication gives the matrix (9). As shown in the presented example, for the element mathematical model (Fig. 6) can be used to simulate the bending process on benders with sufficient accuracy. This model was used to determine the tolerance of the nominal points of the element described in the paper "The accuracy of the machine for bending tubular elements".

Keywords: tube elements, mathematical model, tube bending.

1. Wstęp

Elementy rurkowe wykorzystywane są jako elementy konstrukcyjne (np. rama nośna motoru Harley-Davidson V-Rod) lub w samochodach jako przewody np. paliwowe czy hamulcowe.

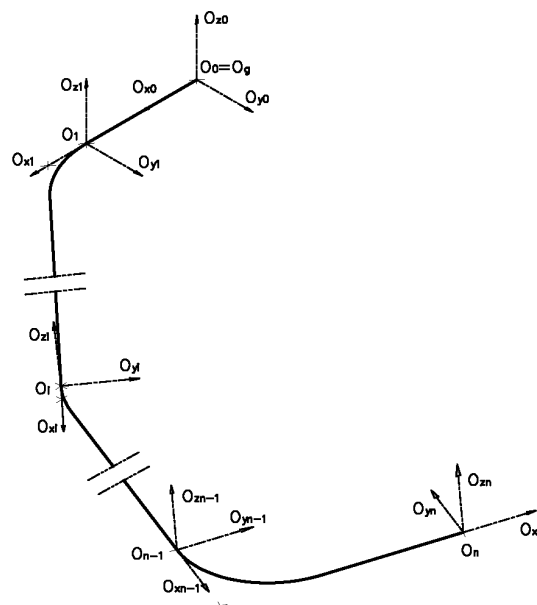
Proces kształtowania elementów rurkowych (stalowych lub aluminiowych) odbywa się na giętarkach. Kolejne kroki gięcia elementu wykonywane są zgodnie z programem CNC, w sekwencji (według standardu przemysłowego): Wysunięcie (Posuw) – Rotacja – Gięcie (ang. *PRB* – Pull, Rotation, Bend). Giętarka pracuje w układzie współrzędnych giętarki (PRB), natomiast element zdefiniowany jest w układzie współrzędnych samochodu (podane są współrzędne punktów przecięcia się prostoliniowych odcinków walcowych elementu). Po wykonaniu elementu na giętarcie sprawdzana jest jego dokładność wykonania przy użyciu współrzędnościowych maszyn lub ramion pomiarowych poprzez dopasowanie (najczęściej metodą najmniejszych kwadratów) zarysu zmierzonego do nominalnego [1, 2]. Po dopasowaniu zarysów i określeniu odchyłek w każdym z punktów nominalnych elementu rurkowego w układzie samochodu następuje korekcja

ustawień giętarki. Określenie odchyłek wygiętego elementu rurkowego, odbywające się w układzie współrzędnych samochodu nie zawsze daje dobre efekty po przeliczeniu współrzędnych na układ giętarki. Przedstawiony przybliżony model matematyczny umożliwia symulowanie pracy giętarki celem znalezienia optymalnych ustawień giętarki, co pozwoli na zredukowanie kosztów braków.

2. Przybliżony model matematyczny

Przy budowaniu modelu matematycznego oparto się na pracach z zakresu teorii mechanizmów, analizy wymiarów, robotyki i metrologii, w których stosuje się opisy pozycji i orientacji lokalnych układów współrzędnych celem analizowania złożonej geometrii części i opisu kinematyki robotów i manipulatorów, a także współrzędnościowych ramion pomiarowych [3, 4, 5, 6].

Dla zorientowania układu np. O_B , względem np. układu O_A , zastosowano konwencję opisu orientacji wokół ustalonych osi X-Y-Z układu O_A .



Rys. 1. Poszczególne układy współrzędnych w modelu matematycznym wygiętego elementu rurkowego (układ O_g = układowi giętarki, O_g – początek procesu gięcia; układ O_n = układowi giętarki O_g – koniec procesu gięcia)

Fig. 1. Particular coordinate systems in the mathematical model of a bent tubular element

Układ giętarki O_g jest układem stałym, a poszczególne punkty przewodu (i związane z nimi lokalne układy współrzędnych) są odniesione i przeliczone do układu giętarki O_g . Rysunek 1 przedstawia poszczególne układy współrzędnych po wygięciu elementu rurkowego.

Proces powstawania pojedynczego odcinka elementu (odcinka i -tego) można podzielić na trzy zabiegi:

- 1) wysunięcie elementu – oznaczone w modelu przez m_i ,
- 2) obrót elementu – oznaczone w modelu przez γ_i ,
- 3) gięcie elementu – oznaczone w modelu przez α_i .

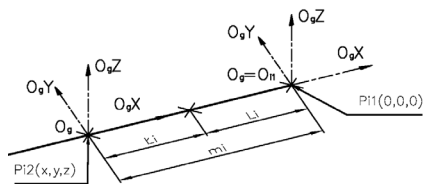
Zabieg 1 i zabieg 2

W układzie współrzędnych giętarki O_g następuje wysunięcie elementu o wartość $m_i = L_i + L_i$ (suma długości odcinka prostoli-

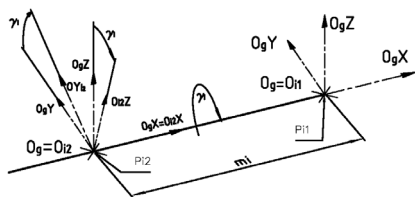
niowego elementu – L_i , oraz długości łuku części elementu – L_i wzdłuż osi $O_g X$ (rys. 2). Układ O_{i1} zostaje naprzód przesunięty (dla punktu początkowego elementu ${}^{O_g}P_{i1}(0,0,0,1)^T$) o wartość m_i .

W zabiegu 2 następuje obrót przewodu wokół ustalonej osi $O_g X$ układu O_g o kąt rotacji γ_i .

Współrzędne punktu $P_{i1}(x, y, z)$ (rys. 3) w układzie O_g są określone przez dwa parametry m_i – wysunięcie wzdłuż osi $O_g X$ (zabieg 1) i kąt rotacji (obrót) γ_i wokół osi $O_g X$ (zabieg 2).



Rys. 2. Zabieg 1 w procesie gięcia elementu rurkowego
Fig. 2. Operation 1 in bending process of tubular elements



Rys. 3. Zabieg 2 w procesie gięcia elementu rurkowego
Fig. 3. Operation 1 and 2 in bending process of tubular elements

Po połączeniu zabiegów 1 i 2 otrzymuje się macierz przekształcenia układów O_{i1} i O_{i2} do układu giętkarki O_g co można zapisać jako:

$${}^{O_g}A_i = {}^{O_g}A_{i2}(\gamma_i) {}^{O_g}A_{i1}(m_i) \tag{1}$$

Po wykonaniu mnożenia otrzymujemy:

$${}^{O_g}A_i(m_i, \gamma_i) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & m_i \\ 0 & \cos(\gamma_i) & -\sin(\gamma_i) & 0 \\ 0 & \sin(\gamma_i) & \cos(\gamma_i) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{2}$$

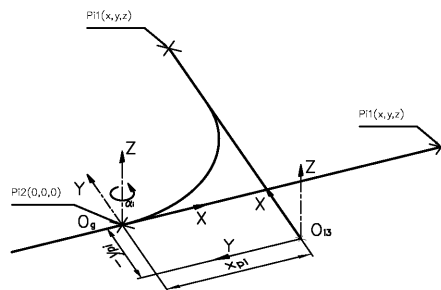
gdzie: ${}^{O_g}A_i(m_i, \gamma_i)$ – macierz transformacji układu $O_{i1}(m_i, \gamma_i)$ do układu O_g

Zabieg 3

W zabiegu 3 (rys. 4) następuje gięcie elementu, o kąt gięcia α_i , wokół osi $O_g Z$. W wyniku gięcia elementu następuje przesunięcie układu współrzędnych (O_{i3}) o wartość $x_{pi}(\alpha_i)$ oraz $-y_{pi}(\alpha_i)$. Wartości przesunięć są zmiennymi, zależnymi od kąta gięcia α_i . Macierz przekształceń jednorodnych, zawierająca parametr niezależny α_i oraz parametry zależne $x_{pi}(\alpha_i)$ oraz $-y_{pi}(\alpha_i)$, transformująca układ współrzędnych O_{i3} do układu giętkarki O_g , ma postać:

$${}^{O_g}A_{O_{i3}}(\alpha_i, x_{pi}, y_{pi}) = \begin{bmatrix} \cos(\alpha_i) & -\sin(\alpha_i) & 0 & x_{pi} \\ \sin(\alpha_i) & \cos(\alpha_i) & 0 & -y_{pi} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{3}$$

gdzie: ${}^{O_g}A_{O_{i3}}(\alpha_i, x_{pi}, y_{pi})$ – macierz rotacji i translacji układu O_{i3} do układu O_g



Rys. 4. Zabieg 3 – gięcie elementu rurkowego
Fig. 4. Operation 3 in bending process of tubular element

Przesunięcie x_{pi} i y_{pi} (rys. 4) oblicza się ze wzorów

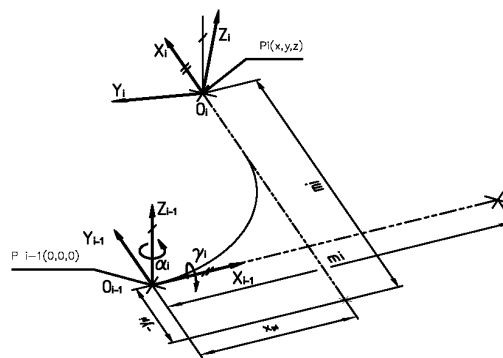
$$\begin{aligned} x_{pi} &= R_i \cdot \sin \alpha_i - L_i \cdot \cos \alpha_i = \\ &= R_i \cdot \sin \alpha_i - \alpha_i \cdot R_i \cdot \cos \alpha_i \end{aligned} \tag{4}$$

$$\begin{aligned} y_{pi} &= L_i \cdot \sin \alpha_i - (R_i - R_i \cdot \cos \alpha_i) = \\ &= (\alpha_i \cdot R_i) \cdot \sin \alpha_i - R_i \cdot (1 - \cos \alpha_i) \end{aligned} \tag{5}$$

gdzie: R – promień zaokrąglenia elementu w i -tym punkcie przewodu, L_i – długość łuku i -tego punktu elementu, α_i – kąt gięcia w i -tym punkcie elementu.

Zdefiniowany powyżej model procesu (zabieg 1, 2 i 3), wytworzenia pojedynczego odcinka elementu rurkowego, zastosowano do zbudowania modelu matematycznego gięcia całego elementu (dla i punktów przewodu $i = 1, 2, \dots, n$).

Przekształcenie układu „ i ” do układu „ $i-1$ ” (rys. 5) określone jest za pomocą trzech parametrów niezależnych (m_i, γ_i, α_i) i dwóch parametrów zależnych $x_{pi}(\alpha_i)$ i $-y_{pi}(\alpha_i)$.



Rys. 5. Transformacja układu i do układu $i-1$
Fig. 5. Transformation of coordinate system i to coordinate system $i-1$

Macierze przekształceń jednorodnych, odpowiadające wymienionym parametrom, mają postać:

$$A(m_i, \gamma_i) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & m_i \\ 0 & \cos(\gamma_i) & -\sin(\gamma_i) & 0 \\ 0 & \sin(\gamma_i) & \cos(\gamma_i) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{6}$$

$$A(\alpha_i, x_{pi}, y_{pi}) = \begin{bmatrix} \cos(\alpha_i) & -\sin(\alpha_i) & 0 & x_{pi} \\ \sin(\alpha_i) & \cos(\alpha_i) & 0 & -y_{pi} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{7}$$

Przekształcenie układu „ i ” do układu „ $i-1$ ” opisuje iloczyn macierzy:

$${}^{i-1}A_i = A(\alpha_i, x_{pi}, y_{pi})A(m_i, \gamma_i), \quad (8)$$

stąd:

$${}^{i-1}A_i = \begin{bmatrix} \cos(\alpha_i) & -\cos(\gamma_i)\sin(\alpha_i) & \dots \\ \sin(\alpha_i) & \cos(\gamma_i)\cos(\alpha_i) & \dots \\ 0 & \sin(\gamma_i) & \dots \\ 0 & 0 & \dots \\ \dots & \sin(\gamma_i)\sin(\alpha_i) & \dots \\ \dots & -\sin(\gamma_i)\cos(\alpha_i) & \dots \\ \dots & \sin(\gamma_i) & \dots \\ \dots & 0 & \dots \\ \dots & \cos(\alpha_i)m_i + R\sin(\alpha_i) - \alpha_i R\cos(\alpha_i) & \dots \\ \dots & \cos(\gamma_i)m_i - \alpha_i R\sin(\alpha_i) + R(1 - \cos(\alpha_i)) & \dots \\ \dots & 0 & \dots \\ \dots & 1 & \dots \end{bmatrix}, \quad (9)$$

gdzie: m_i – wysunięcie elementu, γ_i – kąt rotacji w i – tym punkcie elementu, α_i – kąt gięcia w i – tym punkcie elementu, R – promień gięcia w i – tym punkcie elementu.

Położenie punktu P_i , należącego do części „ i ” elementu ($i = 1, 2, \dots, n$), w lokalnym układzie odniesienia O_i , określa wektor ${}^iP_i = [x_i, y_i, z_i, 1]^T$. Wektor położenia punktu leżącego w początku układu współrzędnych jest wektorem zerowym i można go przedstawić jako ${}^{O_i}P_{O_i} = [0, 0, 0, 1]^T$. W analizach pojawi się też punkt ${}^{O_i}P_i = [x, 0, 0, 1]^T$, potrzebny do dokonania porównań z układem samochodu.

Położenie punktu P_i w układzie odniesienia „0” (giętarce O_g) można wyznaczyć według wzoru:

$${}^{Og=0}P_i = {}^{Og=0}T_i \cdot {}^{O_i}P_i, \quad (10)$$

gdzie: ${}^{Og=0}T_i$ – macierz przekształceń jednorodnych układu „ i ” do układu giętarce $O_g = 0$, którą otrzymuje się jako iloczyn macierzy ${}^{i-1}A_i$ (np.: ${}^0T_n = {}^0A_1 \cdot {}^1A_2 \cdot \dots \cdot {}^{n-1}A_n$), wyznaczonych według wzoru (9).

3. Zastosowanie modelu matematycznego

Model matematyczny zastosowano przykładowo do przewodu o pięciu punktach nominalnych. Dodatkowe punkty (kolejne zamocowania przewodu na giętarce) P_{O2} , P_{O3} i P_{O4} odczytano z modelu CAD. Zestawienie współrzędnych nominalnych punktów w układzie samochodu pokazano w tabeli 1.

Tab. 1. Współrzędne nominalne przewodu w układzie samochodu
Tab. 1. Nominal tube coordinates in car coordinate system

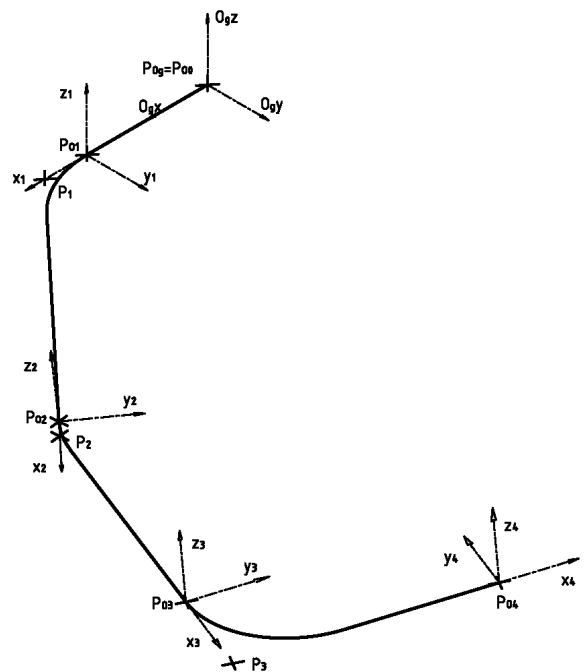
Punkt	X	y	z
1	2662,460	253,350	199,500
2	2758,180	253,350	199,500
P_{O2}	2758,180	213,668	204,530
P_{O3}	2755,235	99,034	219,129
3	2758,180	106,700	218,090
P_{O4}	2688,120	-36,138	236,430
4	2706,180	-28,670	236,430
5	2635,950	-57,710	236,430

Rys. 6 przedstawia poszczególne układy współrzędnych zastosowane w modelu matematycznym.

Stosując równanie (10), oraz macierz przekształcenia układu „ i ” do układu „ $i-1$ ”, co opisuje wzór (9), wyznacza się położenie punktów P_{O_i} , związanych z poszczególnymi układami współrzędnych, w układzie odniesienia giętarce $O_g = „0”$. Wobec tego:

$$\begin{aligned} {}^{Og=0}P_{O4} &= {}^{Og=0}T_4 \cdot {}^4P_{O4} = {}^0A_1 \cdot {}^1A_2 \cdot {}^2A_3 \cdot {}^3A_4 \cdot {}^4P_{O4} \\ {}^{Og=0}P_{O3} &= {}^{Og=0}T_3 \cdot {}^3P_{O3} = {}^0A_1 \cdot {}^1A_2 \cdot {}^2A_3 \cdot {}^3P_{O3} \\ {}^{Og=0}P_{O2} &= {}^{Og=0}T_2 \cdot {}^2P_{O2} = {}^0A_1 \cdot {}^1A_2 \cdot {}^2P_{O2} \\ {}^{Og=0}P_{O1} &= {}^{Og=0}T_1 \cdot {}^1P_{O1} = {}^0A_1 \cdot {}^1P_{O1} \\ {}^{Og=0}P_{O0} &= {}^0P_{O0} \end{aligned}, \quad (11)$$

gdzie: ${}^{Og=0}T_i$ – macierz przekształceń jednorodnych układu „ i ” do układu giętarce $O_g = 0$, którą otrzymuje się jako iloczyn macierzy ${}^{i-1}A_i$ ($i = 1, 2, 3, 4$), P_{O_i} – wektor położenia punktu leżącego w początku danego układu współrzędnych, który jest wektorem zerowym.



Rys. 6. Poszczególne układy współrzędnych zastosowane w modelu matematycznym
Fig. 6. Coordinate systems used in the mathematical model

Po zastosowaniu macierzy (9) w układzie (11) otrzymano współrzędne wygiętego przewodu w układzie giętarce O_g , co przedstawia tabela 2.

Tab. 2. Współrzędne przewodu po zastosowaniu modelu matematycznego
Tab. 2. Tube coordinates after applying the mathematical model

Punkt	x	y	Z
1	143,362	279,547	11,234
2	231,818	243,513	4,955
P_{O2}	216,655	206,523	3,614
P_{O3}	170,129	100,764	0,000
3	175,779	106,812	0,000
P_{O4}	56,454	0,000	0,000
4	75,997	0,000	0,000
5	0,000	0,000	0,000

Współrzędne przewodu w układzie giętkarki obliczone wg modelu porównano ze współrzędnymi przewodu w układzie samochodu po wcześniejszej transformacji obliczonych współrzędnych do układu samochodu. W wyniku porównania stwierdzono, że model matematyczny odwzorowuje proces gięcia przewodu z dokładnością $\pm 0,002$ mm, co jest wystarczające do zobrazowania zagadnienia gięcia przewodów.

4. Wnioski

Model matematyczny dokładności maszyny do gięcia może być stosowany przy projektowaniu procesu wytwarzania elementów rurkowych.

Przedstawiony model matematyczny operacji gięcia elementów rurkowych umożliwia symulowanie procesu gięcia przewodu i pozwala na uzyskanie informacji o możliwych niedokładnościach, występujących w trakcie procesu gięcia (przy wprowadzaniu różnych danych wejściowych: kąta gięcia, kąta obrotu, wysunięcia przewodu).

Model matematyczny nie uwzględnia aspektów fizycznych giętych przewodów, dlatego korzystając z modelu, należy korzystać z informacji podanych przez producenta giętkarki, w celu kompensacji błędów systematycznych i skorygowania kątów rotacji i gięcia.

5. Literatura

- [1] Wojtyła M.: Badanie niepewności pomiaru elementów rurkowych. Zeszyty naukowe ATH nr 22, nr serii 7 Konferencje, Bielsko-Biała 2006.
- [2] Wojtyła M., Starczak M.: Kontrola przewodów rurkowych i ich sprawdzianów stosowanych w pojazdach samochodowych. Archiwum Technologii Maszyn i Automatykacji, Vol. 30 nr 4. Wydawnictwo Politechniki Poznańskiej, Poznań 2010.
- [3] Craig J.J.: Wprowadzenie do robotyki. Mechanika i sterowanie. Wyd. 2 uzupełn., WNT, Warszawa 1995.
- [4] Kozłowski K., Dutkiewicz P., Wróblewski W.: Modelowanie i sterowanie robotów. Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa 2003.
- [5] Śladek J., Ostrowska K., Gąska A.: Wirtualne współrzędnościowe ramię pomiarowe (WWRP). XIII Krajowa i IV Międzynarodowa Konferencja Naukowo-Techniczna „Metrologia w Technikach Wytwarzania”, Poznań, 23-25.09.2009.
- [6] Wojtyła M.: Wymiarowanie pod kątem wymagań funkcjonalnych oraz dokładność pomiarów elementów rurkowych i ich sprawdzianów – praca doktorska. Akademia Techniczno-Humanistyczna w Bielsku-Białej, Wydział Budowy Maszyn i Informatyki, czerwiec 2010.

otrzymano / received: 13.05.2011

przyjęto do druku / accepted: 02.02.2012

artykuł recenzowany / revised paper

INFORMACJE

Regionalne Seminary / Szkolenia dla Służb Utrzymania Ruchu

www.energoelektronika.pl
WORTAL BRANŻOWY

18.04.2012 – Katowice
16.05.2012 – Olsztyn
20.06.2012 – Kielce
03.10.2012 – Szczecin
24.10.2012 – Katowice
05.12.2012 – Poznań

Jeżeli jesteś zainteresowany uczestnictwem w Seminarium, zaprezentowaniem produktu lub nowego rozwiązania napisz do nas: marketing@energoelektronika.pl tel. (+48) 22 70 35 291

Ilość miejsc ograniczona

Partnerzy: