Jerzy JAKUBIEC
POLITECHNIKA ŚLĄSKA, INSTYTUT METROLOGII, ELEKTRONIKI I AUTOMATYKI,
ul. Akademicka 10, 44-100 Gliwice

O formalnych podstawach składania niepewności A i B

Prof. dr hab. inż. Jerzy JAKUBIEC

Pracownik Instytutu Metrologii, Elektroniki i Automatyki Politechniki Śląskiej. Studia ukończył na Wydziale Elektrycznym Politechniki Śląskiej w 1971 r., w 1978 uzyskał stopień doktora, w 1989 – doktora habilitowanego, a w 2004 – tytuł profesora. Zainteresowania naukowe: analiza propagacji błędów w systemach pomiarowo-sterujących, synteza modeli niepewności algorytmów przetwarzania danych pomiarowych, modelowanie metrologicznych właściwości torów przetwarzania analogowo-cyfrowego.

e-mail: jerzy.jakubiec@polsl.pl

Streszczenie

Przedmiotem rozważań są podstawy formalne procedury składania niepewności typu A i B, zaproponowanej w przewodniku GUM [1]. W artykule poddano analizie podstawy matematyczne tej procedury i wykazano ich niespójność, a następnie omówiono nowy sposób obliczania niepewności, bazujący na modelu wyniku pomiaru.

Słowa kluczowe: niepewność wyniku pomiaru, niepewności typu A i B, model wyniku pomiaru, błąd wyniku pomiaru.

On formal bases of composition of A and B type uncertainties

Abstract

Considerations presented in the paper deal with the visible absence of formal bases of the A and B type uncertainty composition procedure proposed in GUM [1] and based on partial uncertainty composition described by formula (1). This lack of formality is caused by the fact that the uncertainty of type A is calculated on a basis of the measurement result series and one cannot point any other set of measurements, which may be composed with this series. The first part of the paper is devoted to presentation of a single measurement result model (2) in application to the uncertainty calculation procedure based on the uncertainty definition (3) and determined by functional (4). In the succeeding part, an analysis of formula (1) from the point of view of the random error model given by (6) is realised. By analogy to uncertainties of A and B type, the errors of the same type have been determined, which enabled obtaining equation (10) and comparing it with equation (1). The final part of the paper contains discussion of conclusions which can be drawn from this comparison.

Keywords: uncertainty of a measurement result, uncertainties of A and B type, model of a measurement result, error of a measurement result.

1. Składanie niepewności typu A i B

Zgodnie z przewodnikiem [1] niepewność jest traktowana jako swoista miara wpływu czynników losowych na niedokładność zbioru wyników pomiaru, uzyskanych w tych samych warunkach pomiarowych. Składniki niepewności całkowitej dzielone są na dwie kategorie A i B, w zależności od metody ich obliczania. Niepewność typu A obliczana jest statystycznie na podstawie serii wyników pomiaru, natomiast typu B wyznaczana jest probabilistycznie na podstawie „dostępnej wiedzy” [1]. Podstawą procedury obliczeniowej jest formuła matematyczna, polegająca na geometrycznym sumowaniu tzw. niepewności standardowych, które są odchyleniami standardowymi zmiennych losowych, opisujących czynniki zaburzające proces pomiaru. W związku z tym formułę geometrycznego składania niepewności w przypadku, gdy czynniki te są nieskorelowane można zapisać jako:

$$\sigma = \sqrt{\sigma_{\mathrm{A}}^2 + \sigma_{\mathrm{B1}}^2 + \sigma_{\mathrm{B2}}^2 + \ldots + \sigma_{\mathrm{B}J}^2}\ , \qquad (1)$$

gdzie σ jest wypadkowym odchyleniem standardowym, σ_{A} odchyleniem standardowym cząstkowym wyznaczanym statystycznie na podstawie serii pomiarowej (niepewnością typu A), a σ_{B1}, σ_{B2}, ..., $\sigma_{\mathrm{B}J}$ odchyleniami standardowymi zmiennych losowych o rozkładach wyznaczanych na podstawie wiedzy o warunkach, w jakich odbywają się pomiary (niepewnościami typu B). Biorąc pod uwagę, że końcowy wynik pomiaru uzyskiwany jest jako średnia z serii, σ_{A} jest **estymatorem odchylenia standardowego** populacji liczb losowych będącymi wartościami średnimi serii wyników pomiarów o takiej samej długości i uzyskiwanych w tych samych warunkach pomiarowych. Natomiast odchylenia standardowe σ_{B1}, σ_{B2}, ..., $\sigma_{\mathrm{B}J}$ (niepewności standardowe typu B) nie są estymatorami, gdyż nie są uzyskiwane metodami statystycznymi. Są one parametrami rozkładów zmiennych losowych, których opis tworzony jest z reguły na podstawie wiedzy uzyskiwanej w inny sposób, niż przez wykonywanie pomiarów.

Wyrażenie (1) może być stosowane, gdy odchylenia standardowe w wyrażeniu podpierwiastkowym są parametrami nieskorelowanych populacji liczb losowych, których realizacje **są sumowane**. Jednak w rzeczywistości realizacje zbioru wyników pomiaru nie mogą sumowane z żadnymi innymi, gdyż w procesie pomiaru wykorzystuje się tylko **jedną serię wyników**. Zatem wynika stąd wniosek, że składanie niepewności zgodnie z wyrażeniem (1) **nie ma uzasadnienia formalnego**.

Pomimo braku postaw formalnych, zależność (1) jest jednak powszechnie stosowana w praktyce pomiarowej. Uzasadnienie tego ma charakter intuicyjny i bazuje na stwierdzeniu, że wyrażenie (1) łączy ze sobą różne czynniki wpływające na niedokładność wyniku pomiaru. Należy przy tym podkreślić, że takie podejście nadaje zależności (1) **charakter umowny**. W praktyce, gdy porównuje się ze sobą wyniki pomiarów laboratoryjnych, nie stanowi to istotnej przeszkody. Jednak brak podstaw formalnych powoduje, że zależność (1) **nie może być podstawą** rozważań o charakterze naukowym. Stanowi to istotny jej mankament.

W opisanej sytuacji celowe wydaje się celowe podjęcie próby poszukiwanie takich ścieżek rozumowania, które nadałyby sens formalny zależności (1). Jedno z najprostszych podejść może być oparte na założeniu, że wzór (1) powstał przez wprowadzenie uproszczeń do jakiejś innej, formalnie poprawnej zależności. W kolejnym punkcie przedstawiono wykorzystanie modelu pojedynczego wyniku pomiaru jako punktu wyjścia formalnej analizy zależności (1).

2. Zastosowanie modelu pojedynczego wyniku pomiaru do wyznaczania niepewności

Niepewność opisuje właściwości wyniku pomiaru, a zatem podstawą do wyznaczenia zależności służących do składania niepewności cząstkowych powinien być fizycznie uzasadniony model matematyczny tego wyniku. Do dalszych rozważań użyto modelu pojedynczego wyniku pomiaru, uzyskanego na podstawie analizy procesu kwantowania [2]. Jednak model ten może być uogólniony także na inne sytuacje pomiarowe [3]. Zgodnie z tym modelem, nieznana prawdziwa wartość wielkości mierzonej jest opisana zależnością:

$$x = \hat{x} + e\ , \qquad (2)$$

gdzie $\hat{x}$ jest oceną wartości wielkości mierzonej, uzyskaną przez usunięcie z surowego wyniku pomiaru wszystkich składowych o charakterze systematycznym, a e jest błędem losowym opisanym funkcją gęstości prawdopodobieństwa $g_e(e)$ o zerowej wartości oczekiwanej i symetrycznej względem osi rzędnych.

Formalny opis niepewności, przy użyciu symboli specyficznych dla modelu (2), ma postać wyrażenia:

$$\mathbf{Pr}\left[\left|x-\hat{x}\right|\leq U\right]=p\ , \qquad (3)$$

które można odczytać w następujący sposób: prawdopodobieństwo **Pr** tego, że wartość bezwzględna różnicy wartości prawdziwej i jej oceny (wyniku pomiaru) jest nie większa niż niepewność U wynosi p.

Gdy weźmie się pod uwagę, że zgodnie z (2) zachodzi: $x-\hat{x}=e$, to dla znanej symetrycznej funkcji gęstości prawdopodobieństwa $g_e(e)$ błędu e zależność (3) można zapisać w postaci:

$$\int_{-U}^{U} g_e(e)\mathrm{d}e=p \qquad (4)$$

gdzie p jest poziomem ufności o wartości typowo przyjmowanej jako $p=0{,}95$. Rozwiązanie tego funkcjonału ze względu na U prowadzi do uzyskania wartości niepewności.

3. Niepewność całkowita serii pomiarowej

Opisany model pojedynczego wyniku pomiaru powstał dla celów obliczania niepewności danych pomiarowych przetwarzanych algorytmicznie. Może być zatem stosowany do obliczanie średniej z serii pomiarowej, gdyż daje się ona opisać w postaci prostego algorytmu przetwarzania [2].

Przyjmijmy, że seria pomiarowa jest ciągiem N wyników pomiarowych $\{x(1),x(2),\ldots,x(N)\}$, uzyskanych w tych samych warunkach. Średnią z serii można zapisać jako:

$$x_{\mathrm{sr}}=\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}x(n)\,. \qquad (5)$$

Załóżmy także, że błąd całkowity każdego z wyników składających się na serię daje się opisać w postaci takiej samej sumy nieskorelowanych błędów cząstkowych o znanych rozkładach (podejście takie uzasadniają wyniki badań przedstawione w pracy [2]). Przyjmijmy ponadto, że odpowiednie odchylenia standardowe, składane zgodnie z zależnością (1), są parametrami rozkładów tego rodzaju błędów cząstkowych. W takim przypadku uzyskuje się opis błędu całkowitego pojedynczego wyniku z serii w postaci sumy:

$$e=e_{\mathrm{A}}+e_{\mathrm{B1}}+\ldots+e_{\mathrm{B}J}\ , \qquad (6)$$

gdzie symbolami $e_{\mathrm{A}},e_{\mathrm{B1}}\ldots,e_{\mathrm{B}J}$ oznaczono błędy opisywane probabilistycznie o wartości oczekiwanej równej zeru. Przez analogię do składników wyrażenia (1), nazwijmy te błędy odpowiednio błędem typu A i błędami typu B.

Podstawową właściwością zastosowanego modelu wyniku pomiaru jest addytywność jego składników, co pozwala na oddzielne wykonywanie operacji arytmetycznych na ocenach i ich błędach [2]. Rozkład całkowitego błędu wyniku może być wyznaczony przy użyciu splotu funkcji gęstości prawdopodobieństwa błędów cząstkowych i użyty do obliczenia niepewności zgodnie z funkcjonałem (4). Uwzględniając tą właściwość modelu i bazując na wzorze (5), błąd całkowity średniej z serii można zapisać jako:

$$e_{\mathrm{sr}}=\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}e(n)=\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}e_{\mathrm{A}}(n)+\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}e_{\mathrm{B1}}(n)+\ldots+\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}e_{\mathrm{B}J}(n) \qquad (7)$$

Przyjmijmy teraz, że poszczególne błędy, wyszczególnione we wzorze (7), opisują przyczyny występowania niepewności cząstkowych, objętych zależnością (1). I tak, niech pierwszy błąd e_{A} odpowiedzialny jest za występowanie niepewności typu A, a pozostałe błędy za niepewności typu B. Niepewność typu A wyznaczana jest statystycznie, co oznacza, że jest ona skutkiem występowania błędów o charakterze losowym. W takim przypadku można przyjąć, że realizacje błędu e_{A} w kolejnych wynikach serii są pobierane z N niezależnych populacji o takim samym rozkładzie, a zatem odchylenie standardowe średniej z sumy błędów e_{A} wynosi:

$$\sigma_{e\mathrm{Asr}}=\frac{1}{N}\sqrt{\sigma_{e\mathrm{A}}^2(1)+\sigma_{e\mathrm{A}}^2(2)+\ldots+\sigma_{e\mathrm{A}}^2(N)}=\frac{\sigma_{e\mathrm{A}}}{\sqrt{N}}\ , \qquad (8)$$

gdzie $\sigma_{e\mathrm{A}}$ jest odchyleniem standardowym błędu typu A.

Gdy uwzględni się, że wszystkie wyniki serii uzyskiwane są w tych samych warunkach pomiarowych, to błędy typu B mają takie same wartości dla wszystkich wyników z serii. Wynika to z faktu, że wszystkie błędy losowe wyniku pomiaru opisuje łącznie błąd typu A, a więc pozostałe błędy muszą mieć w tych warunkach stałe wartości. Oznacza to, że dla każdego błędu typu B zachodzi:

$$\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}e_{\mathrm{B}j}(n)=\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}e_{\mathrm{B}j}=e_{\mathrm{B}j},\ j=1,\ldots,J. \qquad (9)$$

Losowość tych błędów ujawnia się dopiero wtedy, gdy zmieniają się warunki pomiaru, a odpowiednie funkcje gęstości prawdopodobieństwa błędów opisują ich rozkład w całym zakresie zmienności warunków pomiaru. Można więc powiedzieć, że niepewności typu B są odchyleniami standardowymi $\sigma_{e\mathrm{B}j}$ tego rodzaju błędów. Zatem dla błędu całkowitego średniej z serii (5), o składnikach określonych jako typu A i B, odchylenie standardowe, zgodnie z zależnościami (7), (8) i (9), ma postać:

$$\sigma_{e\mathrm{sr}}=\sqrt{\frac{\sigma_{e\mathrm{A}}^2}{N}+\sigma_{e\mathrm{B1}}^2+\sigma_{e\mathrm{B2}}^2+\ldots+\sigma_{e\mathrm{B}J}^2}\ . \qquad (10)$$

Po porównaniu ze sobą wyrażeń (1) i (10) widoczne jest, że różnią się one tylko pierwszym składnikiem. Zakładając tożsamość obu wyrażeń, uzyskuje się zależność:

$$\sigma_{\mathrm{A}}=\frac{\sigma_{e\mathrm{A}}}{\sqrt{N}} \qquad (11)$$

opisującą związek między niepewnością typu A, a odchyleniem standardowym błędu typu A.

Przyjmijmy ponadto, że niepewność typu A jest wyznaczana przy użyciu estymatora odchylenia standardowego średniej z serii, określonego jako [4]:

$$\bar{s}_{\bar{x}}=\sqrt{\frac{1}{N(N-1)}\sum_{n=1}^{N}\left[\hat{x}(n)-\bar{x}\right]^2}\ , \qquad (12)$$

gdzie $\bar{x}$ jest średnią z ocen $\hat{x}(n)$, czyli zachodzi:

$$\bar{x}=\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}\hat{x}(n)\,. \qquad (13)$$

W takim przypadku porównanie wyrażeń (11) i (12) prowadzi do wniosku, że wykorzystanie estymatora odchylenia standardowego serii wyników pomiaru:

$$\bar{s}=\sqrt{\frac{1}{(N-1)}\sum_{n=1}^{N}\left[\hat{x}(n)-\bar{x}\right]^2} \qquad (14)$$

do wyznaczania wartości odchylenia standardowego $\sigma_{e\mathrm{A}}$ błędu typu A pozwala na uzyskania takiej samej postaci matematycznej zależności (1) i (10). Konsekwencją tego jest stwierdzenie, że użycie we wzorze (1), będącym podstawą procedury wyznaczania niepewności zgodnie z przewodnikiem [1], wartości niepewności typu A obliczonej zgodnie z (12) powoduje, że zależność (1) uzyskuje podstawy formalne w sensie modelu wyniku pomiaru, opisanego zależnościami (2) i (6).

4. Warunki pomiaru a niepewność

Z przedstawionych rozważań wynika, że wyrażenie (1), wiążące niepewności standardowe A i B, może mieć podstawy formalne, gdy przyjmie się, że niepewność typu A jest obliczana jako estymata odchylenia standardowego średniej z serii składającej się z ocen wyników pomiaru. Można to obrazowo uzasadnić w ten sposób, że w przypadku serii pomiarowej rozkład ocen i rozkład losowego błędu pomiaru zgodnie ze wzorem (2) mają ten sam kształt (różnią się wartościami oczekiwanymi), a zatem mają odchylenia standardowe równe co do wartości. Oczywiście takie rozumowanie jest poprawne, gdy zaakceptuje się, że źródłem niepewności jest błąd pomiaru.

Analiza opisanych zależności prowadzi jednak do wniosku, że występuje niespójność w odniesieniu do warunków pomiaru, dla których wyznaczane są niepewności A i B. Mianowicie, seria wyników musi być uzyskiwana w **wąsko rozumianych warunkach pomiaru**, czyli dla stałych wartości wielkości wpływających na niedokładność procesu pomiaru (przykładowo w stałej temperaturze). Takie zastrzeżenie jest niezbędne, aby spełniony był warunek (9), gdyż w przeciwnym przypadku zmieniające się wartości błędów typu B ujawniałyby się w wartościach wyników pomiaru tworzących serię, a tym samym wpływałyby wartość niepewności typu A. Natomiast niepewności typu B w ogólnym przypadku wyznaczane są dla **szeroko rozumianych warunków pomiaru**, gdyż część z czynników powodujących błędy typu B związana jest z wielkościami wpływającymi na proces pomiaru, które zmieniają się w pewnych, dopuszczalnych granicach. Problem ten jest dobrze widoczny w przypadku przyrządów pomiarowych, których parametry metrologiczne zmieniają się w zależności od warunków ich pracy.

Dla przykładu rozważmy w dużym uproszczeniu obliczanie niepewności pomiaru napięcia woltomierzem cyfrowym. Przesunięcie zera i nachylenie charakterystyki woltomierza zależą od temperatury, a ponadto w przypadku dokładnych woltomierzy widoczny jest wpływ szumów wewnętrznych na wyniki pomiaru. W tej sytuacji niepewność typu A obliczana jest statystycznie na podstawie serii wyników uzyskanych w praktycznie stałej temperaturze, której wartość jednak w wielu sytuacjach nie jest brana pod uwagę (nie jest znana). Brak wiedzy odnośnie wartości temperatury i sposobu jej oddziaływania na charakterystykę woltomierza jest reprezentowany w niepewności całkowitej w postaci niepewności typu B. Robi się to, zakładając że w rzeczywistości zmiany temperatury zachodzą w określonych granicach (np. w od 15 do 25 ^{o}C) i wyznaczając na podstawie parametrów katalogowych przyrządu parametry rozkładu błędów typu B, przykładowo przyjmując rozkład jednostajnych tych błędów w podanym zakresie zmian temperatury. Wynika stąd, że niepewności typu B obliczane są dla zmian temperatury w określonym zakresie, natomiast niepewność typu A dla jednej wartości temperatury.

Opisany i zilustrowany powyżej problem niespójności warunków pomiaru dla niepewności typu A i B może nie mieć istotnego znaczenia dla wartości obliczanej niepewności, jednak razi ze względów metodologicznych. Aby go uniknąć należałoby zrezygnować ze statystycznego obliczania niepewności typu A na rzecz wykorzystywania jednolitego modelu błędu wyniku pomiaru (6), w którym wszystkie składowe błędy traktowane są jednolicie. Polega to na tym, rozkłady wszystkich błędów w tym modelu, a zatem również błędu typu A, muszą być znane a priori, czyli przed wykonaniem pomiaru. Nie ma wówczas potrzeby statystycznej obróbki serii wyników pomiaru, gdyż niepewności dla wszystkich błędów wyznaczane są probabilistycznie, na podstawie parametrów ich rozkładów. Procedury statystyczne mogą być wykorzystywane w fazie identyfikacji błędów typu A.

Problem rezygnacji ze statystycznej obróbki wyników pomiaru dla celów obliczania niepewności ma jeszcze jeden, bardziej fundamentalny aspekt. Mianowicie, jest wiele sytuacji, w szczególności występujących w systemach pomiarowo-sterujących [2], kiedy można dokonywać tylko jednego pomiaru. Dzieje się tak w szczególności dla zmiennych w czasie wielkości mierzonych, które są próbkowane, a wartość próbki jest mierzona jednorazowa za pomocą przetwornika A/C [2]. W tych sytuacjach obliczanie niepewności musi być realizowane na podstawie znanego modelu błędu wyniku pomiaru. Nic nie stoi na przeszkodzie, aby takie podejście stosować powszechnie, również przypadkach, gdy istnieje możliwość powtarzania pomiaru.

Techniczna możliwość uzyskiwania serii pomiarowej nie oznacza, że jest to zawsze celowe. Przede wszystkim należy zauważyć, że uzyskanie ciągu pomiarów wymaga wielu działań, a zatem jest na ogół czasochłonne i kosztowne, gdyż wymaga zapewnienia stabilnych warunków pomiaru. Powtarzanie pomiarów ma sens, gdy prowadzi do zmniejszenia niepewności. Tak się jednak dzieje tylko wtedy, gdy niepewność typu A obliczona dla średniej z serii nie jest istotnie mniejsza od innych składników wyrażenia (10). Innymi słowy, niepewność typu A dla średniej musi być porównywalna z niepewnościami typu B. Gdy jest istotnie mniejsza, powtarzanie pomiarów traci sens. A wówczas do obliczania niepewności najlepiej jest wykorzystywać model błędu pojedynczego wyniku pomiaru.

5. Podsumowanie

Z przedstawionych rozważań wynika, należałoby podjąć kroki w celu ustalenia nowego paradygmatu w zakresie wyznaczania niepewności wyniku pomiaru. Dotychczas stosowany, bazujący na propozycjach zawartych w przewodniku [1], ma szereg wad, które zostały scharakteryzowane w artykule. Co prawda, można powiedzieć, że umowność używanych w praktyce procedur wyznaczania niepewności nie stanowi istotnej przeszkody, o ile wszyscy przestrzegają przyjętych reguł. Jednak brak podstaw formalnych powoduje, że wykorzystywanie tych procedur w badaniach naukowych budzi kontrowersje.

Nowy paradygmat musi mieć dobre podstawy formalne, bazujące na uzgodnionym i powszechnie aprobowanym modelu wyniku pomiaru. Powinien to być **model pojedynczego wyniku pomiaru**, gdyż tylko taki może być używany w warunkach zmienności sygnału pomiarowego. Da to możliwość objęcia procedurami obliczania niepewności szerokiego zakresu warunków pomiaru, spotykanych nie tylko w laboratoriach, ale również w warunkach przemysłowych, w tym objęcia tymi procedurami błędów dynamicznych i innych rodzajów błędu [2].

W niniejszym artykule naszkicowano zarys podejścia, które mogłoby być podstawą nowego paradygmatu. Zaletą tego podejścia jest spójność pojęciowa i metodologiczna z dotychczas stosowanymi procedurami obliczania niepewności. Wymaga on jednak zaakceptowania podstawowego stwierdzenia, że źródłem niepewności są błędy pomiaru, a dla celów wyznaczania niepewności opis tych błędów musi być określony a priori. Współczesna technologia wytwarzania narzędzi pomiarowych i stosowane aktualnie techniki pomiarowe stwarzają dobre podstawy do eksperymentalnej realizacji tego rodzaju sposobu wyznaczania opisu błędów pomiaru.

6. Literatura

[1] Wyrażanie niepewności pomiaru. Przewodnik, Główny Urząd Miar, 1999. Guide to the Expression of Uncertainty in Measurement, BIPM, 1993,1995.

[2] Jakubiec J.: Błędy i niepewności danych w systemie pomiarowo-sterującym, Wyd. Pol. Śląskiej, Gliwice 2010.

[3] Jakubiec J.: Przedziałowa interpretacja wyniku kwantowania. Materiały V Kongresu Metrologii, Łódź 2010, s. 66-67.

[4] Skubis T.: Podstawy metrologicznej interpretacji wyników pomiaru, Wyd. Pol. Śląskiej, Gliwice 2004.

otrzymano / received: 18.11.2011
przyjęto do druku / accepted: 02.02.2012 *artykuł recenzowany / revised paper*