Aneta SZYDA
POLITECHNIKA ŚLĄSKA, WYDZIAŁ AUTOMATYKI, ELEKTRONIKI I INFORMATYKI, INSTYTUT AUTOMATYKI,
ul. Akademicka 16, 44-100 Gliwice

O regularności ciągłych układów

Mgr inż. Aneta SZYDA

Absolwentka Politechniki Śląskiej. Obecnie jest doktorantką na kierunku Automatyki i Robotyki w Instytucie Automatyki Politechniki Śląskiej w Gliwicach. Jej zainteresowania badawcze obejmują głównie zagadnienia związane z zastosowaniem matematyki w teorii sterowania. Prowadzi również prace z zakresu akwizycji i przetwarzania obrazów barwnych na potrzeby cyfrowej archiwizacji i prezentacji multimedialnej obiektów zabytkowych.

e-mail: Aneta.Szyda@polsl.pl

Streszczenie

W pracy rozważano zagadnienia regularności ciągłego układu liniowego z niestacjonarną macierzą stanu $A(t)$. Przedstawiono formalną definicję układów regularnych, ich własności – wpływ na stabilność czy wykładniki Lapunowa. W artykule poszukiwane były warunki, dla których liniowy układ ciągły o przedziałami stałych współczynnikach będzie układem regularnym. Jednym z warunków regularności badanych układów jest komutowanie macierzy układu oraz zapewnienie istnienia granicy średniego czasu przebywania układu w danym stanie.

Słowa kluczowe: układy regularne, ciągłe liniowe układy niestacjonarne, układy o przedziałami stałych współczynnikach, wykładnik Lapunowa.

On regularity of continuous systems

Abstract

In this paper there is considered the problem of regularity of continuous linear systems with a nonstationary state matrix on example of systems with piecewise constant coefficients. In Section 2 there is presented a formal definition of regular systems [3], necessities theorems and basic concepts. The properties of regular systems [4, 5] – impact on the stability and Lyapunov exponents are described in Section 3. Section 4 gives the conditions under which a continuous linear system with piecewise constant coefficients is a regular system. One of the conditions is that the state matrices should commute. The second condition is to ensure the existence of a limit of the average time of being in a given state (Fig. 1). The considerations in this paper are useful for understanding the nonstationary systems with constant coefficients. The study provided a proof under what assumptions and conditions a continuous linear system with piecewise constant coefficients is a regular system. The properties of regular systems: continuous dependence of the Lapunov exponents on coefficients, resistance to low noise and the fact that the Lyapunov exponents are sharp are important. These considerations can be applied to mathematical modelling and systems design.

Keywords: regular systems, nonstationary continuous linear systems, systems with piecewise constant coefficients, Lyapunov exponent.

1. Wprowadzenie

W artykule rozważane będą zagadnienia regularności ciągłego układu liniowego z niestacjonarną macierzą stanu $A(t)$ na przykładzie układów o przedziałami stałych współczynnikach. Znane są przykłady układów, które mogą być niestabilne pomimo tego, że dla każdego *t*, wartości własne macierzy $A(t)$ leżą w lewej półpłaszczyźnie. Stabilność takiego układu zależy nie tylko od położenia wartości własnych, ale również od „szybkości zmian" macierzy stanu. Znany jest również fakt, że wejściowy układ będący stabilnym może stać się niestabilny, gdy do układu wprowadzimy niewielkie zaburzenie parametryczne. W literaturze znany jest przypadek układów regularnych, o których wiemy, że badany układ regularny możemy zaburzyć dowolnie małą wartością i nie zdestabilizuje to układu – wejściowy układ z dodanym zaburzeniem będzie nadal stabilny. Dlatego zamierzamy poszukiwać warunków i założeń, dla których liniowy układ ciągły o przedziałami stałych współczynnikach będzie układem regularnym.

O układach stacjonarnych, gdzie w dowolnej chwili czasu równania opisujące działanie układu nie zmieniają się, wiemy zarówno jakie są warunki stabilności jak i znamy różne metody służące do jej określenia [3, 4]. Wiemy również, że układy stacjonarne są układami regularnymi [1, 3]. W literaturze przedmiotu [1, 2, 3] spotkać można nie tylko definicję układu regularnego, ale również różne współczynniki opisujące regularność, które określają czy dany układ jest regularny i jak bardzo.

Dla układów stacjonarnych podawane są zarówno warunki stabilności jak i pewne własności, które dla układów niestacjonarnych są cały czas poszukiwane. W tego typu układach, gdzie współczynników lub macierzy stanu jest wiele, gdzie nie są one stałe lecz zmienne w czasie problem określenia interesujących nas cech, korzystnych własności czy stabilności nie jest zadaniem łatwym i trywialnym. Ze względu na złożoność samego problemu, wielość rozpatrywanych przypadków są bardziej skomplikowane. Ciekawym wydaje się sprawdzenie czy pewne własności układów stacjonarnych, jak ich regularność, przekładają się na układy niestacjonarne. A jeżeli faktycznie układy niestacjonarne są regularne to przy jakich warunkach i założeniach tak jest.

Na potrzeby badań rozważane w pracy układy są ciągłymi układami liniowymi niestacjonarnymi opisanymi następującym równaniem:

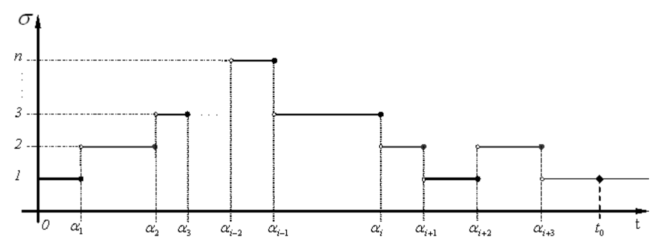
$$\dot{x}(t) = A(t)x(t), \text{ dla } \quad t \geq 0 \tag{1}$$

z warunkiem początkowym $x(0) = x_0$.

Dodatkowo zakładamy, że macierz $A(t)$ opisująca układ niestacjonarny nie zmienia się w sposób dowolny lecz jej współczynniki zmieniają się skokowo i są przedziałami stałe. Układ taki nazywamy ciągłym układem liniowym o przedziałami stałych współczynnikach, a formalnie układ ten opisuje zbiór $A(\sigma(t)) \in \Sigma = \{A_1, \dots, A_m\}$, który jest zbiorem macierzy rzeczywistych R^{nxn} oraz funkcja przełączająca $\sigma : [0, \infty) \to \Sigma$, o której zakładamy, że jest funkcją przedziałami stałą, lewostronnie ciągłą (rys. 1). W konkretnym przedziale czasu działanie układu opisane jest przez stałą, niezmienną macierz stanu *A* zależną od chwili *t*. Rozwiązanie równania (1) przy poczynionych założeniach ma postać:

$$x(t, x_0) = \left[e^{A(t_k)(t - t_k)} e^{A(t_{k-1})(t_k - t_{k-1})} \cdot \ldots \cdot e^{A(0)(t_1)} \right] \cdot x(0) \tag{2}$$

gdzie chwile t_i, $i = 1, 2, \dots$ są chronologicznymi chwilami czasu, w których następują kolejne przełączenia.



Rys. 1. Przykładowa funkcja przełączająca
Fig. 1. Example switching signal

W pracy rozważane są ciągłe układy liniowy o przedziałami stałych współczynnikach jako układy regularne. Definicja układów regularnych oraz pomocnicze twierdzenia i przydatne oznaczenia do dalszych wyprowadzeń podane zostały w rozdziale 2. W rozdziale 3. przedstawiono przydatne informacje oraz własności interesujących nas układów istotne z punktu prowadzonych badań. Kolejny, 4 rozdział zawiera dowód i odpowiedź na postawione w pracy pytanie: kiedy układ o przedziałami stałych współczynnikach jest regularny. Rozdział 5. zawiera podsumowanie otrzymanych wyników.

2. Układy regularne – opis formalny

W rozdziale tym przedstawiona zostanie formalna definicja układów regularnych oraz wprowadzone zostaną pojęcia i terminy, które posłużą w dalszej części pracy do dowodzenia twierdzeń.

Niech $X(t)=[x_{jk}(t)]$ będzie **macierzą fundamentalną** układu (1), gdzie $A(t)$ jest macierzą ciągłą i ograniczoną, tzn. macierzą utworzoną z n liniowo niezależnych rozwiązań układu

$$\begin{array}{l} x^{(1)}(t)=kolumna\left[x_{11}(t),\dots,x_{n1}(t)\right] \\ \dots \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad , \\ x^{(n)}(t)=kolumna\left[x_{1n}(t),\dots,x_{nn}(t)\right] \end{array} \tag{3}$$

gdzie $[x_{jk}(t)]$, j – numer współrzędnej, k – numer rozwiązania.

Definicja 1 Liczbę (lub symbol ∞), określoną wzorem

$$\chi(f)=\overline{\lim_{t\to\infty}}\frac{1}{t}\ln\left|f(t)\right|, \tag{4}$$

gdzie $\overline{\lim_{t\to\infty}}(\cdot)$ oznacza granicę górną nazywamy **wykładnikiem charakterystycznym** funkcji f.

Dla $x_0\in R^s$, $x_0\neq 0$ **wykładnik Lapunowa** układu jest zdefiniowany jako wykładnik charakterystyczny rozwiązania $\|x(t,x_0)\|$

$$\chi(x_0)=\overline{\lim_{t\to\infty}}\frac{1}{t}\ln\|x(t,x_0)\|. \tag{5}$$

Każde rozwiązanie układu (1) ma skończony wykładnik Lapunowa [3], przy czym zbiór wszystkich wykładników Lapunowa zawiera co najwyżej n elementów, gdzie n jest wymiarem macierzy A.

Definicja 2 Liczbę n_k nazywamy krotnością wykładnika α_k, jeżeli w pewnym układzie fundamentalnym $X(t)$ istnieje n_k kolumn o wykładniku α_k.

Liczbę

$$\sigma_X=\sum_{k=1}^{m}n_k\alpha_k \tag{6}$$

nazywamy sumą wykładników charakterystycznych układu liniowego.

Twierdzenie 1 Dla każdego układu fundamentalnego $X(t)$ zachodzi nierówność:

$$\sigma_X\geq\overline{\lim_{t\to\infty}}\frac{1}{t}\int_{t_0}^{t}trA(t)dt, \tag{7}$$

gdzie $trA(t)$ jest śladem macierzy, czyli sumą elementów na głównej przekątnej.

Na szczególną uwagę zasługuje sytuacja, gdy w twierdzeniu 1 w nierówności (7) zachodzi równość. Układy takie wówczas nazywamy regularnymi w sensie Lapunowa [3], krócej będziemy układy te nazywać układami regularnymi. Poniżej podamy formalną definicję takich układów.

Definicja 3 [3] Układ (1) nazywamy układem regularnym, jeżeli suma jego wykładników charakterystycznych jest równa dolnej granicy średniej wartości śladu macierzy układu, tzn. jeśli zachodzi równość:

$$\sigma_X=\underline{S}, \tag{8}$$

gdzie $\underline{S}=\underline{\lim}_{t\to\infty}\frac{1}{t}\int_{t_0}^{t}trA(t)dt$, a $\underline{\lim}_{t\to\infty}(\cdot)$ granica dolna.

3. Układy regularne – własności

Powodem badania ciągłych układów liniowych o przedziałami stałych współczynnikach jako układów regularnych są pożądane własności tych drugich – poniżej zostaną podane niektóre z nich.

Ciągłość wykładników w funkcji współczynników – znane są przykłady układów będących stabilnymi, gdzie po wprowadzeniu niewielkiego zaburzenia możemy doprowadzić do sytuacji, w której układ zaburzony nie będzie już stabilnym. Wejściowy układ będący stabilnym (1) może stać się niestabilny, gdy do układu wprowadzimy niewielkie zaburzenie parametryczne $\Delta(t)$

$$\dot{x}(t)=(A(t)+\Delta(t))x(t). \tag{9}$$

Zaburzenie to powoduje destabilizację układu wcześniej stabilnego. W przypadku układów regularnych jeśli zaburzenie spełnia pewien ściśle określony warunek, wówczas układ taki będzie nadal stabilny. Własność tą opisuje poniższe twierdzenie.

Twierdzenie 2 [4] Jeżeli (1) jest asymptotycznie stabilny i regularny, to istnieje takie δ_0, że dla wszystkich Δ takich, że $\sup_t\|\Delta(t)\|<\delta_0$ układ (9) jest asymptotycznie stabilny.

Inne własności układów regularnych opisują dalsze twierdzenia.

Twierdzenie 3 [5] Każde nietrywialne rozwiązanie $x(t)$ układu regularnego (1) posiada ścisły wykładnik charakterystyczny, tzn. istnieje granica postaci:

$$\lim_{t\to\infty}\frac{1}{t}\ln\|x(t)\|=\chi(x_0). \tag{10}$$

Twierdzenie 4 [5] Jeżeli układ jest regularny, to dla każdego normalnego układu fundamentalnego $X(t)=\{x_1(t),\dots x_n(t)\}$ istnieje poniższa granica równa 0, tzn. zachodzi

$$\lim_{t\to\infty}\frac{1}{t}\ln\sin(x_k,x_k^*)=0,\quad k=2,3,\dots,n, \tag{11}$$

gdzie x_k^* należy do podprzestrzeni rozpiętej na wektorach $x_1,x_2,\dots,x_{k-1}$, zatem wektor x_k^* jest rzutem wektora x_k na podprzestrzeń o bazie $x_1,x_2,\dots,x_{k-1}$, natomiast kąt (x_k,x_k^*) jest kątem pomiędzy x_k i wskazaną podprzestrzenią.

Twierdzenie 5 [5] Jeżeli układ fundamentalny $X(t)=\{x_1(t),\dots x_n(t)\}$ układu (1) posiada ścisłe wykładniki charakterystyczne i funkcje

$$\sin(x_k,x_k^*),\quad k=2,3,\dots,n \tag{12}$$

również posiadają ścisłe wykładniki charakterystyczne równe 0, wówczas układ fundamentalny jest normalny, a układ jest regularny.

Twierdzenie 6 [1,2] Układ sprzężony

$$\dot{y}(t)=-A^T(t)y(t), \tag{13}$$

do układu regularnego (1) jest regularny, wówczas

$$\lambda_i = -\mu_i, \quad i = 1,\ldots,m, \tag{14}$$

gdzie $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$ to wykładniki Lapunowa układu (1) uszeregowane rosnąco $\lambda_1 < \lambda_2 < \ldots$, natomiast $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_m$ są wykładnikami Lapunowa układu (13) uszeregowanymi malejąco $\mu_1 > \mu_2 > \ldots$, gdzie każda z wartości liczona jest krotnością wystąpienia danej wielkości.

4. Układy regularne a ciągłe układy liniowe

Zanim odpowiemy na pytanie czy ciągłe układy liniowe o przedziałami stałych współczynnikach są regularne przytoczymy pewne dodatkowe twierdzenia. Za pracą [1] wprowadźmy pewne własności regularności dla układów trójkątnych.

Układem górnotrójkątnym nazywamy układ (1) postaci:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= a_{11}(t)x_1 + a_{12}(t)x_2 + \ldots + a_{1n}(t)x_n, \\ \dot{x}_2 &= a_{22}(t)x_2 + \ldots + a_{2n}(t)x_n, \\ &\ldots \\ \dot{x}_n &= a_{nn}(t)x_n, \end{aligned} \tag{15}$$

w którym $A(t)$ jest macierzą górno trójkątną

$$A = \begin{pmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) & \ldots & a_{1n}(t) \\ 0 & a_{22}(t) & \ldots & a_{2n}(t) \\ \ldots & & & \\ 0 & 0 & \ldots & a_{nn}(t) \end{pmatrix}. \tag{16}$$

Następujące twierdzenie podaje warunek regularności układów trójkątnych.

Twierdzenie 7 [1] Układ trójkątny (15) jest regularny wtedy i tylko wtedy, gdy jego współczynniki na diagonalnej mają skończone wartości średnie, tzn. jeśli istnieją granice:

$$\mu_k = \lim_{t\to\infty} \frac{1}{t}\int_{t_0}^{t} a_{kk}(u)du, \quad k = 1,\ldots,n \cdot \tag{17}$$

Rozważmy układ o przedziałami stałych i komutujących współczynnikach $A_iA_j = A_jA_i \in \Sigma, \; i,j = 1,\ldots,m$. Dodatkowo zakładamy, że będzie istnieć granica

$$\tau_i = \lim_{t\to\infty} \frac{1}{t}\tau_i(t), \quad i = 1,\ldots,m \tag{18}$$

nazwiemy ją średnim czasem przebywania układu w stanie *i*, natomiast $\tau_i(t)$ jest czasem przebywania układu w stanie *i* do chwili *t*. Jeżeli istnieją granice (18) możemy ten czas zapisać jako całka z funkcji charakterystycznej:

$$\tau_i(t) = \int_{t_0}^{t} 1_i(\sigma(s))ds, \tag{19}$$

gdzie

$$1_i(\sigma(s)) = \begin{cases} 1 \text{ dla } s \text{ takich, że } \sigma(s) = i, \\ 0 \text{ dla } s \text{ takich, że } \sigma(s) \neq i. \end{cases} \tag{20}$$

Przykładowa funkcja przełączająca z zaznaczonym czasem $\tau_2(t)$ została pokazana na rysunku 1.

Przy poczynionych założeniach zapisać możemy następujące twierdzenie.

Twierdzenie 8 Jeżeli macierze $\Sigma = \{A_1, \ldots, A_m\}$ komutują $A_iA_j = A_jA_i$ i istnieją granice (18), to układ (1) jest regularny.

Dowód Wiedząc, że macierze komutują możemy wszystkie macierze A_j, $j = 1,\ldots,m$ przy pomocy tego samego przekształcenia *P* doprowadzić do postaci kanonicznej Jordana. Niech J_j oznacza postać kanoniczną Jordana macierzy A_j. Wówczas

$$P^{-1}A_jP = J_j \tag{21}$$

i jeżeli w układzie (1) dokonamy podstawienia

$$y = P^{-1}x, \tag{22}$$

to otrzymamy układ o macierzy współczynników

$$A(t) = \sum_{j=1}^{m} J_j 1_j(\sigma(t)). \tag{23}$$

Układ ten jest układem trójkątnym. Zgodnie z (19) i założeniem o istnieniu granic (18) istnieją dla niego granice (17). Z twierdzenia 7 wynika, że układ o macierzy $A(t)$ jest regularny, a ponieważ podstawienie (22) zachowuje regularność, to układ (1) o przedziałami stałych współczynnikach jest regularny. Twierdzenie 8 zostało udowodnione. ■

5. Podsumowanie

Rozważania zawarte w pracy mają na celu bliższe poznanie układów niestacjonarnych jakimi są układy o przedziałami stałych współczynnikach. W pracy podany został dowód kiedy, przy jakich założeniach i warunkach, ciągły układ liniowy o przedziałami stałych współczynnikach jest układem regularnym – podane twierdzenie jest odpowiedzią na te pytanie. Próbę zbadania kiedy układy niestacjonarne są regularne podjęto ze względu na korzystne własności układów regularnych takich jak: ciągła zależność wykładników od współczynników, odporność na małe zakłócenia czy fakt, że wykładniki Lapunowa są ścisłe. Rozważania te przybliżają własności układów niestacjonarnych. Mogą mieć również zastosowanie w modelowaniu matematycznym i projektowaniu układów, aby spełniały one pewne konkretne, stawiane im przez konstruktora, własności.

Aby ciągły układ liniowy o przedziałami stałych współczynnikach był regularny konieczne jest spełnienie aby macierze układu komutowały ze sobą i istniała granica średniego czasu przebywania układu w stanie i. Wiemy już kiedy układ, gdzie macierze komutują ze sobą będzie regularny. Pojawia się kolejne pytanie: czy komutowanie macierzy jest warunkiem koniecznym? Czy liniowy układ ciągły o przedziałami stałych współczynnikach, gdzie macierze nie komutują ze sobą jest układem regularnym? (Dla jakich warunków tak jest?). Zagadnienia te są kierunkiem dalszych badań.

Projekt został sfinansowany ze środków Narodowego Centrum Nauki.

6. Literatura

[1] Adrianova L.: Introduction to linear systems of differential equations, In Translations of mathematical monographs, volume 146. American Mathematical Society, Providence, Rhode Island, 1995.

[2] Barreira L., Valls C.: Stability of nonautonomous differential equations in Hilbert spaces, Journal of Differential Equations, vol. 217, issue 1, pages: 204–248, 2005.

[3] Demidowicz B.: Matematyczna teoria stabilności. Warszawa: Wydawnictwa Naukowo Techniczne, 1972.

[4] Lapunov A. M.: General problem of the stability of motion, (in Russian). Univ. Kharkov: Doctoral dissertation, 1892; (english translations: Stability of Motion. New-York & London: Academic Press, 1966).

[5] Vinograd R. E.: A new proof of the Perron theorem and some properties of regular systems, Uspekhi Matematicheskikh Nauk, vol. 9, issue 2 (60), pages: 129–136, 1954.

otrzymano / received: 18.10.2011
przyjęto do druku / accepted: 01.12.2011 *artykuł recenzowany / revised paper*