

Adam ŻUCHOWSKI

ZACHODNIOPOMORSKI UNIWERSYTET TECHNOLOGICZNY W SZCZECINIE, KATEDRA STEROWANIA I POMIARÓW
ul. 26 Kwietnia 10, 71-126 Szczecin

Modele dynamiki obiektów wieloinercyjnych o stałych czasowych tworzących postęp geometryczny. Problemy identyfikacji

Prof. dr hab. inż. Adam ŻUCHOWSKI

Profesor zwyczajny zatrudniony w Katedrze Sterowania i Pomiarów w Zachodniopomorskim Uniwersytecie Technologicznym. Ze szkolnictwem wyższym związany zawodowo od 1955 roku (Politechnika Wrocławska, Politechnika Szczecińska). Jest współtwórcą polskiej szkoły miernictwa dynamicznego, posiada w dorobku około 350 publikacji. W kwietniu 2010 roku upłynęło 55 lat jego działalności naukowej.



e-mail: adam.zuchowski@zut.edu.pl

Streszczenie

Model dynamiki obiektu wieloinercyjnego (1) rzędu n zawiera $n+1$ parametrów, w tym n stałych czasowych i współczynnik statycznego wzmocnienia. Eksperymentalne wyznaczenie tych parametrów (identyfikacja) jest trudne, lub nawet niewykonalne, to też operuje się zwykle modelami uproszczonymi o trzech, lub czterech parametrach (model Kūpfmüllera, model Strejca prosty lub z uzupełnieniami). W grupie dokładniejszych modeli czteroparametrowych za najdokładniejszy wolno uznać model, którego stałe czasowe tworzą postęp geometryczny, a jego parametrami są: współczynnik statycznego wzmocnienia, największa stała czasowa, iloraz postępu geometrycznego, oraz rząd dynamiki. Eksperymentalne wyznaczenie tych parametrów stwarza problemy, które zostaną omówione w niniejszej pracy.

Słowa kluczowe: Obiekty wieloinercyjne, uproszczone modele, identyfikacja.

On certain problems associated with identification of multi-inertia plant models defined by time-constants representing terms of geometrical progression

Abstract

The model of a multi-inertia plant (1) of n -order is defined by $(n+1)$ parameters (n time constants and static gain). The experimental identification of those parameters is very difficult or even impossible. That is why simplified models defined by means of three or four parameters (Kupfmüller's model, Strejca's model and its modifications, etc.) are usually used. The class of four-parameter models with time constants being terms of a geometrical progression seems to be most accurate among them. The models are defined by: model order n , static gain, the biggest time constant and a common ratio. During the experimental identification of these parameters quite serious problems can occur. These problems are discussed in the paper.

Keywords: multi-inertia plants, simplified models, identification.

1. Wstęp

Dynamikę obiektu wieloinercyjnego opisuje transmitancja:

$$K(s) = \frac{k}{(1+sT_1) \cdot (1+sT_2) \cdot \dots \cdot (1+sT_n)} \quad (1)$$

o współczynniku statycznego wzmocnienia k i stałych czasowych T_1, T_2, \dots, T_n . Ze względów praktycznych zastępuje się ją często uproszczonym modelem Kūpfmüllera:

$$K_m(s) = \frac{k \cdot \exp(-sT_0)}{1+sT_z} \quad (2)$$

lub modelem Strejca prostym:

$$K_m(s) = \frac{k}{(1+sT)^n} \quad (3)$$

albo uzupełnionym o dodatkowy biegun, miejsce zerowe, lub opóźnienie. Ten – bez wątpliwa dokładniejszy model zawiera cztery parametry. Intuicyjnie wolno uznać, że bardziej zbliżony do (1) i tym samym dokładniejszy jest model o stałych czasowych tworzących postęp geometryczny:

$$K_m(s) = \frac{k}{\prod_{i=0}^{n-1} (1+s \cdot T_m \cdot q^i)} \quad (4)$$

wymagający wyznaczenia czterech parametrów: współczynnika statycznego wzmocnienia k , maksymalnej stałej czasowej T_m , ilorazu postępu q , oraz rzędu dynamiki n . (Wykorzystanie postępu arytmetycznego jest obliczeniowo znacznie trudniejsze).

Wyznaczenie tych parametrów w oparciu o znaną postać modelu (1) jest proste [7, 8] i nie zachodzi potrzeba ponownego omawiania tej metody. Problem pojawia się wtedy, gdy obiekt jest „czarną skrzynką” i wiadomo o nim tylko tyle, że odpowiada mu model (1).

Współczynnik statycznego wzmocnienia można wyznaczyć z przebiegu charakterystyki skokowej, natomiast wyznaczenie pozostałych parametrów wymaga omówienia (problemy identyfikacji zapowiedziane w tytule pracy). Warto zauważyć, że przyjęcie:

$$M(s) = 1 + a_1 \cdot s + a_2 \cdot s^2 + \dots + a_{n-1} \cdot s^{n-1} + a_n \cdot s^n \quad (5)$$

prowadzi do zależności

$$a_1 = T_1 + T_2 + \dots + T_n, \quad a_n = T_1 \cdot T_2 \cdot \dots \cdot T_n \quad (6)$$

Dla dokonania identyfikacji wystarczy więc wyznaczenie współczynników a_1, a_n i rzędu n . Współczynnik a_1 można wyznaczyć albo stosując „metodę lustrzanego odbicia” [5] i odpowiednią metodę pomiarową, albo wykorzystując przybliżony związek [6]:

$$\text{dla } t = 1.11 \cdot a_1 \quad y(t) = 0.68k \quad (7)$$

i charakterystykę skokową – ale z mniejszą dokładnością.

Współczynnik a_n i rząd dynamiki n można wyznaczać stosując „metodę pierwszych próbek” S. Skoczowskiego [2, 3]. Dla niewielkich wartości q stosunek a_{n-1}/a_n przyjmuje duże wartości i wtedy owa metoda obciążona jest dużymi błędami, także z powodu silnego wpływu zakłóceń charakterystyki. Problem identyfikacji modelu (4) pozostaje więc jeszcze otwarty.

2. Propozycja metody wyznaczania parametrów T_m i q

Zaproponujemy przeprowadzenie eksperymentu Zieglera-Nicholsa [4] stosowanego dawniej do strojenia regulatora. Założymy, że stan drgań nietłumionych układu typu: obiekt wieloinercyjny objęty ujemnym sprzężeniem zwrotnym przez wzmacniacz o regulowanym wzmocnieniu A został osiągnięty dla $A = A_0$, a drgania posiadają pulsację ω_0 . Aby tak było należy spełnić warunki:

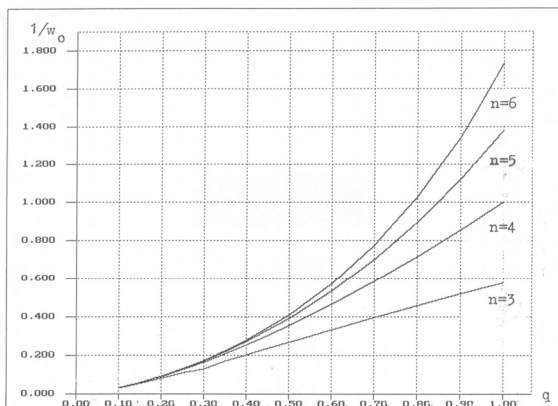
$$\sum_{i=0}^n \arctg(\omega_0 \cdot T_m \cdot q^i) = \pi \tag{8}$$

oraz

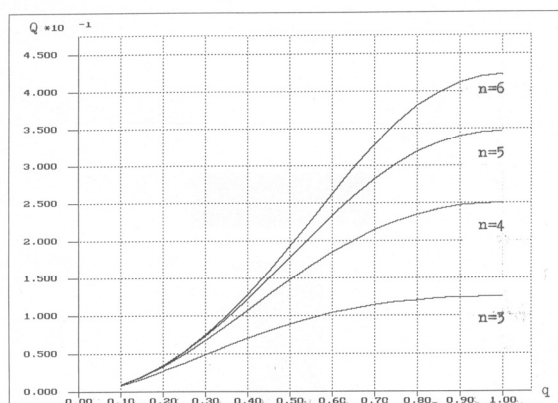
$$A_0^2 \cdot k^2 = \sum_{i=0}^n (1 + \omega_0^2 \cdot T_m^2 \cdot q^{2i}) \tag{9}$$

przy tym wolno uznać, że znane są wartości k, ω_0, A_0 , lub nawet także wartość a_1 .

W pierwszym przypadku przyjmując umownie $T_m = 1$ można obliczyć wartości ω_0 dla różnych wartości q oraz różnych n i zestawić je tabelarycznie, lub w postaci rodziny wykresów – np. $1/\omega = f(q, n)$ jak pokazano na rys. 1, wykorzystując (8). Z kolei dla każdego zespołu wartości ω_0, q i n można obliczyć A_0 wykorzystując (9) i utworzyć zestawienie tabelaryczne albo wykres np. $Q = 1/A_0 = f_1(q, n)$ jak pokazano na rys. 2.



Rys. 1. Rodzina wykresów $1/\omega_0 = f(q, n)$. Oznaczono: ω_0 - pulsacja drgań nie tłumionych, q - iloraz postępu geometrycznego, n - rząd dynamiki modelu
 Fig. 1. The family of curves $1/\omega_0 = f(q, n)$, where ω_0 - resonant angular frequency, n -model order, q - progression common ratio.



Rys. 2. Rodzina wykresów $Q = f_1(q, n)$. Oznaczono: Q odwrotność wielkości wzmacnienia A_0 , pozostałe symbole jak na rys. 1
 Fig. 2. The family of curves $Q = f_1(q, n)$, where Q - the reciprocal of gain A_0 , The other symbols like in Fig.1

W rzeczywistości oczywiście $T_m \neq 1$, ale w warunkach drgań nietłumionych warunek (8) obowiązuje w eksperymencie dla zmierzonego ω_0 takiego, by zachować proporcję $\omega_m \cdot T_m = \omega_0 \cdot 1$ i tym samym:

$$T_m = \omega_0 / \omega_m \tag{10}$$

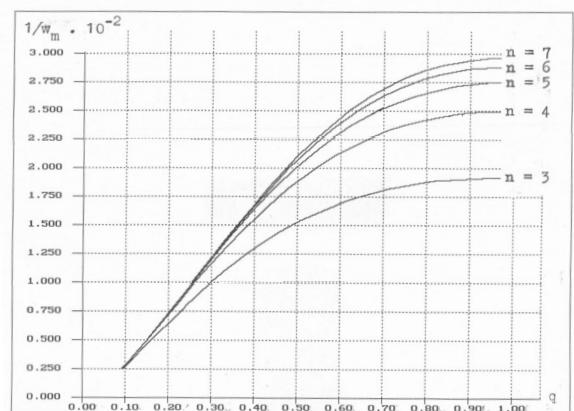
Z pomiaru wartości Q przy przyjętym arbitralnie n można wyznaczyć q (rys. 2) i tym samym dokonać identyfikacji. Arbitralne przyjęcie rzędu n wydaje się dyskusyjne, ale warto zauważyć, że dla małych q modele rzędów wysokich $n > 4$ praktycznie różnią się mało, wystarczy więc poszukiwać modeli niskiego rzędu. Duże wartości q występują tylko dla dużych wartości $1/Q$, skąd wynika następująca reguła :

- dla $A_0 < 8$ zachodzi $n > 3$, dla $A < 4$ zachodzi $n > 4$,
- dla $A_0 < 2.886$ zachodzi $n > 5$, dla $A_0 < 2.37$ zachodzi $n > 6$,
- dla $A_0 < 2.,075$ zachodzi $n > 7$, dla $A_0 < 1.884$ zachodzi $n > 8$.

Znając T_m, q oraz n można wyznaczyć pozostałe stałe czasowe, a także parametr a_1 . Taki sposób postępowania jest zasadny tylko wtedy, gdy struktura modelu (1) odpowiada z dobrym przybliżeniem strukturze modelu (4), a tak być nie musi. Lepiej więc (drugi przypadek) wyznaczyć wartość a_1 jedną z podanych metod, a wtedy:

$$T_m = a_1 \cdot \frac{(1-q)}{(1-q^n)} \tag{11}$$

Po uwzględnieniu (11) w (8) i dla znanej wartości a_1 można wyznaczyć dla przyjętych n i q wartość ω i utworzyć rodzinę wykresów $1/\omega = f_2(q, n)$ jak pokazano na rys. 3. Znając z pomiaru ω_m można przy arbitralnie przyjętym n wyznaczyć q i pozostałe stałe czasowe. Tu założone przybliżenie struktury modelu (1) i modelu (4) nie jest już tak istotne, gdyż model (4) spełnia warunek $a_1 = T_1 + T_2 + \dots T_n$, natomiast przy małych q można się spodziewać dużych błędów modelu (4).

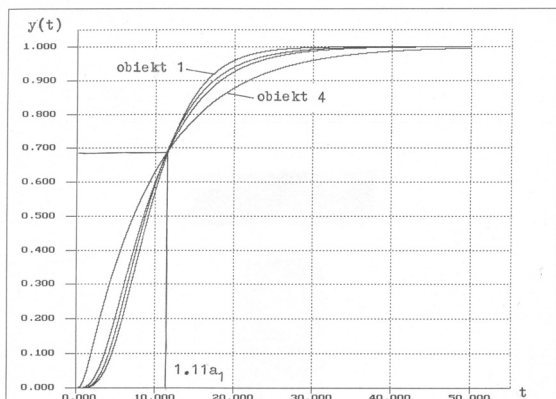


Rys. 3. Rodzina wykresów $1/\omega_m = f_2(q, n)$. Oznaczono: ω_m - wyznaczona eksperymentalnie wielkość pulsacji drgań nie tłumionych, pozostałe symbole jak na rys. 1
 Fig. 3. The family of curves $1/\omega_m = f_2(q, n)$, where ω_m - result of experimental determination of resonant angular frequency. The other symbols like in Fig. 1

3. Eksperymenty

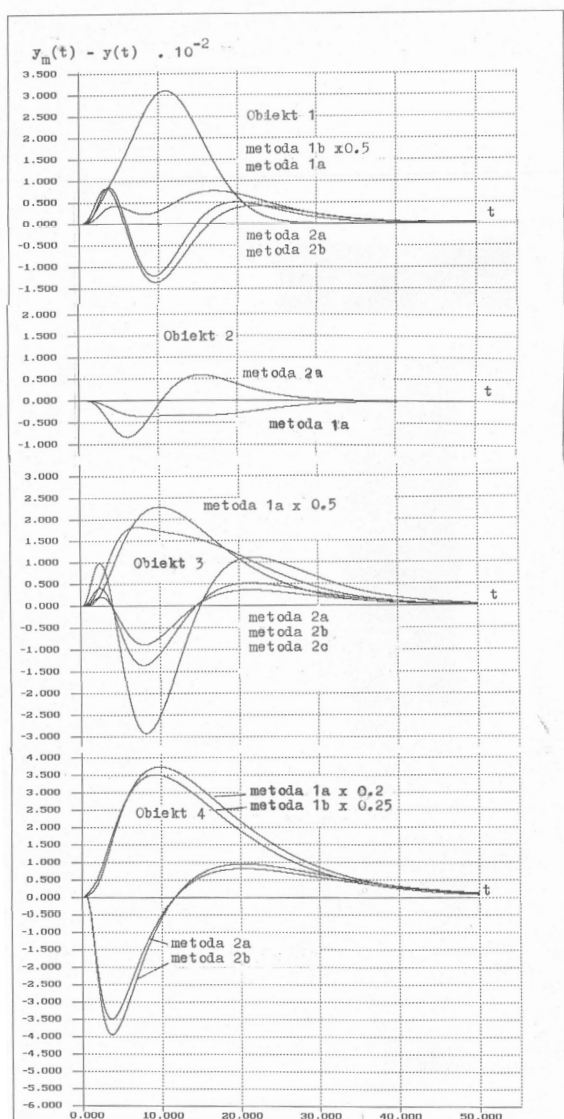
Wykonano symulacje komputerowe czterech obiektów wieloenercyjnych, zachowując w każdym przypadku warunek $k = 1, a_1 = 10$. Wykorzystując obie podane metody wyznaczono modele uproszczone. Wartości parametrów wszystkich modeli zestawiono w tabeli 1, a wykresy charakterystyk skokowych wszystkich symulowanych obiektów pokazano na rys. 4. Warto zauważyć, że posiadają one punkt wspólny, wyznaczający parametr a_1 . Wykresy błędów chwilowych modeli uproszczonych, definiowanych

jako różnice charakterystyk skokowych obiektu $y(t)$ i jego modelu uproszczonego $y_m(t)$ pokazano na rys. 5.



Rys. 4. Wykresy charakterystyk skokowych symulowanych obiektów wieloinercyjnych

Fig. 4. The simulated step responses of multi-inertia plants



Rys. 5. Błędy modeli uproszczonych, wyznaczonych dla symulowanych obiektów

Fig. 5. The errors of simplified models for simulated multi-inertia plants

Pozwalają one wyciągnąć następujące wnioski:

- Lepsza jest metoda druga, przy tym wybór rzędu modelu uproszczonego n – poza przypadkiem dużych wartości parametru q – nie ma dużego znaczenia, najprawdopodobniej w praktyce wystarczy operować modelami czwartego rzędu.
- Metoda pierwsza może być użyta tylko wtedy, gdy struktura obiektu przypomina model (4), ale tego dla „czarnej skrzynki” nie można z góry zakładać.
- Obiekty o stałych czasowych bardzo do siebie zbliżonych, poza nielicznymi wyjątkami (obiekt 4) nadają się raczej do tworzenia modeli uproszczonych typu Strejca z uzupełnieniem.

Tab. 1. Model (1) i parametry modeli uproszczonych
Tab. 1. Model (1) and parameters of simplified models

Nr	Parametr T_i modelu (1)	Modele uproszczone	
		Metoda 2	Metoda 1
1	$5, 2, 1, 1, 1$	$n = 5, q = 0.57$	$q = 0.583, T_m = 4.40, a_1 = 9.84$
		$n = 4, q = 0.65$	$q = 0.787, T_m = 3.26, a_1 = 9.3$
2	$3, 3, 2, 1, 1$	$n = 5, q = 0.77$	$q = 0.718, T_m = 3.50, a_1 = 10.1$
		$n = 4, -$	
3	$6, 2, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}$	$n = 5, q = 0.45$	$q = 0.473, T_m = 4.97, a_1 = 9.21$
		$n = 4, q = 0.49$	$q = 0.537, T_m = 4.68, a_1 = 9.27$
		$n = 3, q = 0.74$	
4	$9, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}$	$n = \frac{5}{4}, q = 0.16$	$q = 0.230, T_m = 5.43, a_1 = 7.03$
		$n = 2, q = 0.18$	$q = 0.250, T_m = 5.02, a_1 = 6.59$

4. Podsumowanie

Eksperymenty zdają się potwierdzać wstępne przewidywania, a maksymalne błędy chwilowe uzyskiwanych modeli uproszczonych są zwykle mniejsze, niż w przypadku modelu Strejca. Wprawdzie metoda Zieglera-Nicholsa jest dość czasochłonna i może narażać na identyfikowany obiekt na przeciążenia, ale można ją zastąpić metodą Åströma [1], która nie ma tych wad. Teza, że modele uproszczone nie muszą być rzędu wyższego niż czwarty i tu znajduje nowe potwierdzenie. W ramach omówienia problemów identyfikacji zaproponowano eksperymenty umożliwiające wyznaczenie parametrów modelu.

5. Literatura

- [1] Åström K. J., Eykhoff P.: Automatic tuning of simple regulators. Proceedings IFAC 9th World Congress. Budapest 1984.
- [2] Skoczowski S.: Uniwersalny model uproszczony procesów aperiodycznych z opóźnieniem. Materiały XIV Sympozjum Modelowania i Symulacja Systemów Pomiarowych, Krynica, 19-23.09.2004. Wyd. Katedry Metrologii AGH Kraków.
- [3] Skoczowski S.: Praktyczne aspekty identyfikacji modeli uproszczonych dla autotuningu regulatorów PID. Sympozjum Naukowe: Perspektywy i prognozy rozwoju badań na styku automatyki i metrologii. 15-17 kwietnia 2006, Szczecin-Niechorze. Wyd. Politechniki Szczecińskiej.
- [4] Ziegler J.G., Nichols N.B.: Optimus settingd for automatic controllers. Trans. ASME 64, 1942.
- [5] Zielonko R.: Ogólne zasady projektowania kształtu sygnałów pomiarowych. Metrologia i Systemy Pomiarowe. Vol. 1, 1988.
- [6] Żuchowski A.: O pewnej metodzie wyznaczania parametrów modelu Strejca. PAK 2/1993.
- [7] Żuchowski A.: Metoda wyznaczania zastępczych parametrów modelu wieloinercyjnego. PAK 10bis/2006.
- [8] Żuchowski A.: Model dynamiki obiektu o stałych czasowych tworzących postęp geometryczny i jego wybrane aplikacje. PAK 4/2010.