

**Waldemar MORZUCH**

WYDZIAŁOWY ZAKŁAD WYTRZYMAŁOŚCI MATERIAŁÓW PRZY WYDZIALE MECHANICZNYM POLITECHNIKI WROCŁAWSKIEJ  
ul. Smoluchowskiego 25, 50-372 Wrocław

## Pomiar przemieszczeń i sił wewnętrznych w płytach kołowych przy zastosowaniu interferometrii holograficznej

Dr inż. Waldemar MORZUCH



Ukończył studia na Wydziale Mechanicznym Politechniki Wrocławskiej w 1976r. W roku 1980 uzyskał stopień doktora nauk technicznych na tym samym Wydziale. Obecnie jest adiunktem w Wydziałowym Zakładzie Wytrzymałości Materiałów przy Wydziale Mechanicznym Politechniki Wrocławskiej. Zainteresowania naukowe autora dotyczą zagadnień związanych z interferometrią holograficzną oraz zagadnień związanych ze statecznością dynamiczną układów mechanicznych.

e-mail: waldemar.morzuch@pwr.wroc.pl

### Streszczenie

Przedstawiono pomiar przemieszczeń i sił wewnętrznych w płytach kołowych metodą interferometrii holograficznej. Przedmiotem badań była płyta kołowa utwierdzona na obwodzie. W pomiarach zastosowano jedną z metod holografii optycznej zwaną metodą podwójnej ekspozycji. W wyniku interferencji fali przedmiotowej i fali odniesienia na materiale światłoczułym otrzymano obraz prążków interferencyjnych, na podstawie których wyznaczono przemieszczenia płyty oraz siły wewnętrzne. Oceny jakości utwierdzenia płyty dokonano na podstawie kąta ugięcia w miejscu mocowania oraz bezwymiarowego współczynnika wprowadzonego przez autora.

**Słowa kluczowe:** interferometria, holografia.

### Measurement of displacements and internal forces in circular plates using holographic interferometry

#### Abstract

The estimation of displacements and internal forces in circular plates with use of holographic interferometry is presented. An object of investigations was a circular plate restrained in the circuit. The double exposure method of optic holography was used for measurements. As a result of interference of the reference and main wave on light sensitive material, an image of interferential striae is obtained, on the basis of which displacements and internal forces of the studied object can be determined. The estimation of the plate restraint quality was performed basing on a deflection angle at the restraint point and the dimensionless coefficient introduced by the author. The bending moments are defined on the basis of the known displacements by means of differentiation. The scheme of the test stand is shown in Fig.1. The investigated object is presented in Fig.2. The diagrams of plate deflection, plate deflection angle and radial moment as a function of the radius are shown in Figs.3, 4 and 5.

**Keywords:** interferometry, holography.

### 1. Wstęp

Płyty kołowe są elementem wielu konstrukcji mechanicznych. Prawidłowe zaprojektowanie takiej płyty sprowadza się najczęściej do wyznaczenia pola jej przemieszczeń przy zadanym obciążeniu. Może się również zdarzyć sytuacja odwrotna polegająca na wyznaczeniu obciążenia przy znanym polu przemieszczeń.

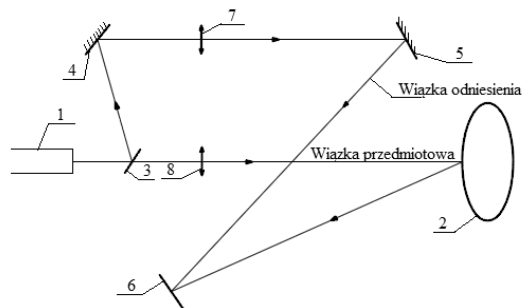
Podstawą do rozwiązania tych problemów jest równanie różniczkowe wiążące ugięcie płyty z obciążeniem [2]. Rozwiązanie takiego równania zakłada znajomość warunków brzegowych związanych najczęściej z charakterem zamocowania płyty na brzegu (brzeg utwierdzony lub swobodnie podparty).

W rzeczywistych konstrukcjach mechanicznych trudno byłoby znaleźć płyty o brzegu idealnie utwierdzonym. Ze względu na istniejącą zawsze podatność utwierdzenia, kąt ugięcia płyty na brzegu będzie różny od zera.

W skrajnej sytuacji zamocowanie płyty może być na tyle słabe, że teoretyczne rozwiązanie będzie się zbliżało do rozwiązania obowiązującego dla płyty o brzegu swobodnie podpartym. Z tego wynika, że istnieje konieczność przeprowadzenia oceny jakości zamocowania płyty przyjętego jako utwierdzone. Taka ocena jest przedmiotem rozważań przedstawionych w tej pracy. Dokonano jej na podstawie holograficznego pomiaru przemieszczeń rzeczywistych płyt kołowych obciążonych równomiernie na powierzchni. Zaproponowano wprowadzenie pewnego bezwymiarowego współczynnika, który umożliwiłby określenie jakości zamocowania płyty. Na podstawie wyznaczonego pola przemieszczeń drogą różniczkowania określono siły wewnętrzne (momenty gnące).

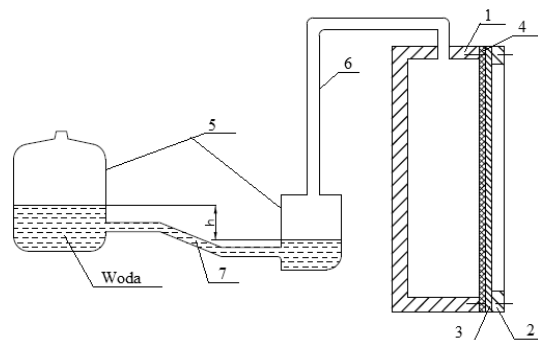
### 2. Opis stanowiska badawczego

Schemat stanowiska badawczego przedstawiono na rys. 1. Zastosowany w badaniach laser ILA 120 firmy CARL – ZEISS – JENA jest laserem jonowym, argonowym, emitującym światło zielone o długości fali  $\lambda = 514,5$  nm. Układ optyczny składa się ze zwierciadeł 3, 4, 5, soczewek 7 i 8 oraz płyty holograficznej 6. Zadaniem tego układu jest wytworzenie wiązki światła laserowego i ich rejestracja. Obiektem badań jest płyta kołowa o średnicy 200 mm i grubości 3,2 mm, wykonana z cynku. Wszystkie elementy umieszczono na odpowiednio ciężkiej i sztywnej płycie żeliwnej.



Rys. 1. Schemat stanowiska badawczego: 1 – laser, 2 – badany obiekt (płyta), 3 – płytka dzieląca światło, 4, 5 – zwierciadła, 6 – płyta holograficzna, 7, 8 – soczewki

Fig. 1. Test stand: 1 – laser, 2 – investigated object (plate), 3 – plate of light division, 4, 5 – mirrors, 6 – holographic plate, 7, 8 – lens



Rys. 2. Schemat urządzenia do obciążenia płyt: 1 – korpus, 2 – pierścień dociskający, 3 – badana płyta, 4 – gumowa przepona, 5 – słoje z wodą, 6 – przewód, 7 – wąż gumowy

Fig. 2. Scheme of the plate loading device: 1 – frame, 2 – pressing ring, 3 – plate tested, 4 – rubber membrane, 5 – jars with water, 6 – pipe, 7 – rubber hose

Badaną płytę zamocowano i obciążono w specjalnie skonstruowanym urządzeniu przedstawionym na rys. 2. Płyta dociskana była do korpusu za pomocą ośmiu śrub. Obciążenie płyty realizowano za pomocą dwóch słoi z wodą. Różnica poziomów wody w obu słojach powodowała powstanie ciśnienia obciążającego badaną płytę, a więc czynnikiem bezpośrednio obciążającym płytę było powietrze. W związku z tym powstała konieczność zapewnienia odpowiedniej szczelności układu, którą uzyskano smarując klejem dociskane części.

### 3. Pomiar przemieszczeń płyty i wyznaczenie sił wewnętrznych

Przemieszczenia poprzeczne płyty (ugięcia) mierzono za pomocą holograficznej metody dwukrotnej ekspozycji [1, 3, 4]. Polega ona na wykonaniu dwóch naświetleń tej samej płyty holograficznej w dwóch różnych stanach badanego obiektu. Na hologramie są wtedy zarejestrowane dwie fale przedmiotowe, które rozchodziły się od powierzchni obiektu podczas trwania kolejnych naświetleń. Oświetlenie, tak wykonanego hologramu, wiązką odniesienia powoduje rozchodzenie się za hologramem dwóch zarejestrowanych fal. Fale te interferując za sobą wytwarzają układ prążków zawierający informację o wzajemnej różnicy między zarejestrowanymi stanami. W wypadku, który zostanie rozważony, pierwsze naświetlenie wystąpiło przy braku obciążenia, natomiast drugie nastąpiło po obciążeniu płyty zadaniem ciśnieniem.

Przemieszczenia poszczególnych punktów płyty wyznaczono z następującego wzoru [3, 5, 6].

$$w = \frac{\lambda}{2} n \quad (1)$$

gdzie:  $n$  – numer kolejnego prążka, przy czym prążkowi przypisuje się numer o wartości równej zeru, gdy występuje na tle punktów, o których wiadomo, że nie uległy przemieszczeniu,  $\lambda$  – długość fali światła spójnego, emitowanego przez laser, wynosząca 514,5 nm.

Pomiary ugięć płyty przeprowadzono przy jej obciążeniu ciśnieniem odpowiadającym wysokości  $h = 65$  mm słupa wody. Prążki interferencyjne miały kształt koncentrycznych okręgów przy czym przyjęto, że prążek zerowy leży przy pierścieniu dociskającym 2. Na podstawie przebiegu prążków interferencyjnych wyznaczono ugięcie  $w$  płyty w funkcji promienia  $r$ .

W dalszej części pracy, na podstawie zależności (1) wyznaczono ugięcia płyty w funkcji promienia  $r$ . Znajomość funkcji ugięcia umożliwiła wyznaczenie momentu gnącego, promieniowego, który wyraża się zależnością (2)

$$m_r = -D \left( \frac{d^2 w}{dr^2} + \frac{v}{r} \frac{dw}{dr} \right) \quad (2)$$

gdzie:

$$D = Et^3 / 12(1 - \nu^2) \quad (3)$$

$E$  – moduł Younga materiału płyty,  $\nu$  – współczynnik Poissona materiału płyty,  $t$  – grubość płyty.

W celu wyznaczenia momentu gnącego jest konieczna znajomość analitycznej postaci funkcji ugięcia  $w(r)$ .

Funkcję otrzymaną z pomiarów można aproksymować wielomianem trzeciego stopnia

$$w(r) = a_3 r^3 + a_2 r^2 + a_1 r + a_0 \quad (4)$$

Aproksymację przeprowadzono numerycznie wykorzystując odpowiedni program do mikrokomputera. Po wprowadzeniu wyników pomiarów otrzymano następujące wartości współczynników wielomianu (4):

$$a_0 = 383,7829 \cdot 10^{-6} \text{ cm},$$

$$a_1 = 4,494563 \cdot 10^{-6} \text{ cm},$$

$$a_2 = -10,410009 \cdot 10^{-6} \text{ cm}^{-1} \text{ oraz } a_3 = 6,101291 \cdot 10^{-7} \text{ cm}^{-2}.$$

Znajomość funkcji  $w(r)$  pozwoliła wyznaczyć kąt ugięcia określony zależnością:

$$\varphi = -\frac{dw}{dr} \quad (5)$$

oraz moment gnący, promieniowy, określony wzorem (2).

Wykresy  $w$ ,  $\varphi$ ,  $m_r$  w funkcji promienia  $r$  przedstawiono na rys. 3, 4, 5 (krzywa 1). W obliczeniach przyjęto następujące dane:

$$E = 9,22 \cdot 10^4 \text{ MPa}, t = 0,32 \text{ cm}, \nu = 0,34$$

Wartości otrzymane doświadczalnie porównano z wartościami teoretycznymi dla płyty obciążonej równomiernie, utwierdzonej na obwodzie. Wartości teoretyczne obliczono z następujących wzorów (2):

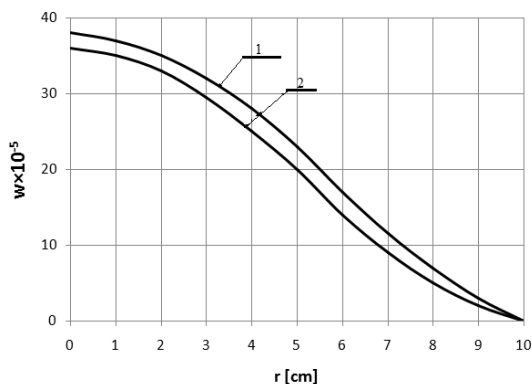
$$w(r) = \frac{q}{64D} (a^2 - r^2)^2$$

$$\varphi = \frac{qr}{16D} (a^2 - r^2) \quad (6)$$

$$m_r = \frac{q}{16} [(1 + \nu)a^2 - (3 + \nu)r^2]$$

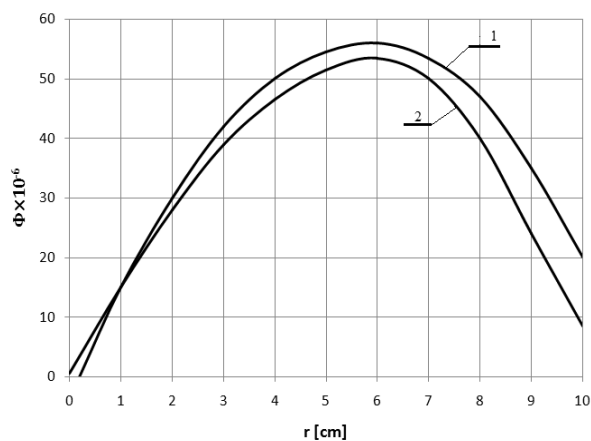
gdzie:  $q$  – natężenie obciążenia ciągłego płyty (odpowiednik ciśnienia),  $a$  – promień płyty (zewnętrzny).

Wykresy wielkości określonych wzorami (6) przedstawiono na rys. 3, 4, 5 (krzywa 2). Wynika z nich, że ugięcia płyty otrzymane doświadczalnie są większe od ugięć opisanych zależnościami teoretycznymi. Jest to spowodowane tym, że w rzeczywistości są porównywane dwie płyty o różnych warunkach brzegowych. Przypomnijmy, że układem odniesienia jest tutaj płyta kołowa utwierdzonej na obwodzie. Z tego wynika, że kąt ugięcia w miejscu utwierdzenia i w środku płyty powinien być równy zeru. Z wykresu przedstawionego na rysunku 5 wynika, że wymienione kąty nieco odbiegają od wartości teoretycznych, co jest związane z podatnością pierścienia dociskającego i śrub. W wyniku tego wartości ugięć rzeczywistych są większe od teoretycznych. Z podobnych powodów wykresy momentów gnących promieniowych nieco odbiegają od wykresów otrzymanych dla rozwiązania teoretycznego (rys. 5). Różnice między wartościami doświadczalnymi, a teoretycznymi występują w szczególności w środku płyty i na jej obwodzie. W celu wyjaśnienia tych różnic porównano odpowiednie rozwiązania dla płyty utwierdzonej i swobodnie podpartej. Z wytrzymałości materiałów wiadomo, że momenty promieniowe w środku płyty są dodatnie i większe dla płyty swobodnie podpartej (ze względu na większe ugięcia [2]). Jeśli zaś chodzi o momenty promieniowe na obwodzie, to są one równe zeru dla płyty swobodnie podpartej i różne od zera, ale ujemne dla płyty utwierdzonej. A więc zmiana zamocowania z utwierdzonego na swobodnie powoduje wzrost wartości momentów promieniowych w środku i zmniejszenie ich wartości bezwzględnej na obwodzie płyty. W rozważanym wypadku podatność pierścienia i śrub dociskających sprawia, że zamocowanie płyty jest pośrednie między utwierdzonym a swobodnie podpartym, co wyjaśnia charakter zmienności momentów promieniowych. W środku płyty są one większe, natomiast na obwodzie są do wartości bezwzględnej mniejsze od analogicznych wartości dla płyty utwierdzonej.



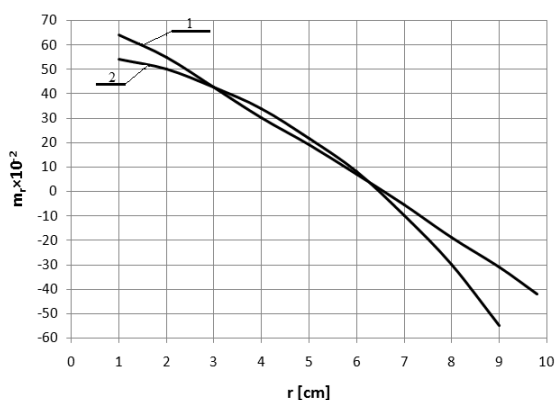
Rys. 3. Wykres ugięcia płyty w funkcji promienia  $r$ : 1- krzywa doświadczalna, 2 - krzywa teoretyczna

Fig. 3. Plate deflection vs.  $r$  radius: 1 – experimental curve, 2 – theoretical curve



Rys. 4. Wykres kąta ugięcia płyty w funkcji promienia  $r$ : 1- krzywa doświadczalna, 2 - krzywa teoretyczna

Fig. 4. Plate deflection angle vs.  $r$  radius: 1 – experimental curve, 2 – theoretical curve



Rys. 5. Wykres momentu promieniowego w funkcji promienia  $r$ : 1 - krzywa doświadczalna, 2 - krzywa teoretyczna

Fig. 5. Radial moment vs.  $r$  radius: 1 – experimental curve, 2 – theoretical curve

#### 4. Ocena jakości utwierdzenia płyty

Autor proponuje wprowadzenie bezwymiarowego współczynnika zdefiniowanego jako iloraz:

$$\alpha_x = \frac{S_x}{S_1} \quad (7)$$

gdzie:  $S_1$  – pole pod wykresem ugięcia dla płyty swobodnie podpartej (dla promienia  $0 < r < a$ ),  $S_x$  – pole pod wykresem ugięcia dla rozpatrywanej płyty dla promienia  $0 < r < a$ . Indeks  $x$  przyjmuje wartość 1 dla płyty o brzegu swobodnie podpartym i wartość równą 2 dla płyty o brzegu utwierdzonym, a więc

$$\alpha_1 = 1, \alpha_2 < 1 \quad (8)$$

Przyjmijmy, że ugięcie płyty o brzegu swobodnie podpartym wyraża się zależnością [2]:

$$w_1 = \frac{q}{64D} \left( \frac{5+\nu}{1+\nu} a^4 - 2 \frac{3+\nu}{1+\nu} a^2 r^2 + r^4 \right) \quad (9)$$

Biorąc pod uwagę zależności od (6) do (9) otrzymuje się wzory na pola  $S_1$  i  $S_2$

$$S_1 = \int_0^a w_1 dr, S_2 = \int_0^a w_2 dr \quad (10)$$

które po wykonaniu całkowania można przedstawić w postaci

$$S_1 = \frac{q}{64D} k_1, S_2 = \frac{q}{64D} k_2 \quad (11)$$

gdzie:

$$k_1 = \frac{8}{15} a^5 \frac{6+\nu}{1+\nu}, k_2 = \frac{8}{15} a^5 \quad (12)$$

Po podstawieniu (12) i (11) do (7) otrzymuje się

$$\alpha_2 = \frac{1+\nu}{6+\nu} \quad (13)$$

Tak więc:

$$\alpha_2 \ll \alpha_x < 1 \quad (14)$$

W rozważanym wypadku dla  $\nu = 0,34$  otrzymuje się  $\alpha_2 = 0,21$ . Jakość utwierdzenia płyty można ocenić na podstawie bezwymiarowego współczynnika  $\alpha_x$ . Jeżeli wartość tego współczynnika dla rzeczywistej płyty będzie zbliżona do  $\alpha_1$ , to będzie to przykład płyty idealnie utwierdzonej, natomiast gdy wartość tego współczynnika będzie zbliżona do  $\alpha_1 = 1$ , będzie to przykład płyty o brzegu swobodnie podpartym. (brak momentów gnących, promieniowych na obwodzie).

Dla rzeczywistej płyty, której wyniki badań eksperymentalnych przedstawiono we wcześniejszej części pracy, można wyznaczyć współczynnik  $\alpha_x$ .

Na podstawie zależności (4) wyznacza się pole  $S_x$ :

$$S_x = \int_0^a (a_3 r^3 + a_2 r^2 + a_1 r + a_0) dr \quad (15)$$

Po wykonaniu całkowania otrzymuje się

$$S_x = \frac{1}{4} a_3 a^4 + \frac{1}{3} a_2 a^3 + \frac{1}{2} a_1 a^2 + a_0 a \quad (16)$$

Na podstawie zależności (7) otrzymuje się  $\alpha_x = 0,24$ .

Widać więc, że wartość tego współczynnika jest nieco większa od  $\alpha_2$ . Zatem nie jest to płyta z utwierdzeniem idealnym. Jednocześnie wartość ta jest daleka od  $\alpha_1 = 1$ . Powodem jest z pewnością ograniczona podatność śrub dociskających i pierścienia dociskanego. Jest to widoczne również w przebiegu funkcji przedstawiającej momenty gnące i kąt ugięcia.

Na zakończenie należy podkreślić, że wyznaczony współczynnik  $\alpha_x$  dotyczy najczęściej spotykanego przypadku równomiernego obciążenia płyty na powierzchni. Przy innych obciążeniach (np. momentami lub siłami skupionymi) współczynnik  $\alpha_x$  będzie miał inną postać, do której można dojść na drodze analogicznych rozważań.

## 5. Podsumowanie

W pracy tej przedstawiono ocenę jakości utwierdzenia płyty kołowej obciążonej równomiernie na powierzchni. Oceny takiej dokonano na podstawie holograficznego pomiaru ugięć płyty. Na podstawie znajomości ugięć, w wyniku różniczkowania wyznaczono siły wewnętrzne (momenty gnące). Ocena jakości utwierdzenia płyty została przeprowadzona na podstawie wartości momentów gnących i kątów ugięcia na brzegu płyty, a także przy wykorzystaniu bezwymiarowego współczynnika wprowadzonego i zdefiniowanego przez autora. Postępując w podobny sposób można ocenić sztywność takich elementów maszynowych jak: kadłuby, korpusy, wsporniki itp.

## 6. Literatura

- [1] Jagoszewski E.: Wstęp do holografii. Wydawnictwo Politechniki Wrocławskiej, Wrocław 1978.
- [2] Jakubowicz A., Orłoś Z.: Wytrzymałość materiałów. WNT, Warszawa 1966.
- [3] Pluta M.: Holografia optyczna. PWN, Warszawa 1980.
- [4] Viénot J.-C., Smigielski P., Royer H.: Holografia optyczna. WNT, Warszawa 1975.
- [5] Morzuch W.: Pomiar sztywności utwierdzenia belki przy zastosowaniu interferometrii holograficznej. *Pomiary Automatyka Kontrola*. 5(2009).
- [6] Morzuch W.: Pomiar sztywności skrętnej elementów maszyn przy zastosowaniu interferometrii holograficznej. *Pomiary Automatyka Kontrola*. 8(2010).

*otrzymano / received: 23.02.2011*

*przyjęto do druku / accepted: 03.10.2011*

*artykuł recenzowany*

## INFORMACJE



**WOJSKOWA AKADEMIA TECHNICZNA**  
im. Jarosława Dąbrowskiego  
Wydział Elektroniki



**NIESTACJONARNE STUDIA PODYPLOMOWE**

## TECHNICZNA OCHRONA OSÓB I MIENIA

**Organizator:** Wojskowa Akademia Techniczna, Wydział Elektroniki, Instytut Systemów Elektronicznych,  
ul. gen. Sylwestra Kaliskiego 2, 00-908 Warszawa 49;  
tel. 22 683-91-35; fax: 22 683-91-25, e-mail: kkwiatos@wat.edu.pl

**Cel:** Celem studiów podyplomowych jest uaktualnienie i pogłębienie wiedzy w zakresie prawnych zasad oraz współczesnych metod i systemów stosowanych w technicznej ochronie osób, mienia i informacji.

**Adresaci:** Studia podyplomowe przeznaczone są dla pracowników zatrudnionych przy projektowaniu, produkcji i eksploatacji zabezpieczeń technicznych stosowanych w ochronie osób i mienia oraz zajmujących się organizowaniem i kierowaniem zespołami pracowników zabezpieczenia technicznego, a w szczególności dla pracowników zatrudnionych w bankach, firmach ubezpieczeniowych, firmach produkujących i/lub instalujących urządzenia i systemy alarmowe.

**Wykładowcy:** Zajęcia prowadzą naukowcy i eksperci krajowi z zakresu zabezpieczeń technicznych i fizycznych. Między innymi z Wojskowej Akademii Technicznej, Szkoły Głównej Służby Pożarniczej, Komendy Głównej Policji.

**Uczestnicy po zakończeniu studiów otrzymują świadectwo ukończenia studiów podyplomowych wraz z oceną wystawione przez Wojskową Akademię Techniczną.**

### Informujemy, że:

Dotychczas odbyło się już 14 edycji tych studiów. Komenda Główna Policji, Biuro Koordynacji Służby Prewencyjnej, (pismo E-IV/I-538/329/526/99/00 z dnia 27.03.2000 r.) uznała, że osoby, które ukończyły studia podyplomowe i otrzymały świadectwo ukończenia studiów spełniają wymogi określone w art. 29 ust. 3, pkt. 2 ustawy o ochronie osób i mienia, w przypadku ubiegania się o licencję pracownika zabezpieczenia technicznego II stopnia.

**Czas trwania:** 15 edycja będzie trwała dwa semestry akademickie (14 zjazdów 2-dniowych plus 1 zjazd zaliczeniowy). Zjazdy odbywać się będą w soboty i niedziele. Rozpoczęcie w lutym 2012 r. a zakończenie w styczniu 2013r.