

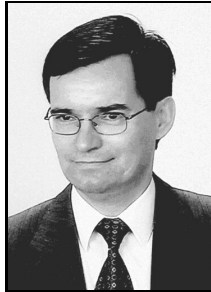
Paweł FOTOWICZ

GŁÓWNY URZĄD MIAR,
ul. Elekoralna 2, 00-139 Warszawa

Metoda randomizacji oddziaływania systematycznego i jej praktyczne zastosowanie

Dr inż. Paweł FOTOWICZ

Absolwent Politechniki Warszawskiej. Studia ukończył na Wydziale Mechaniki Precyzyjnej w 1981 roku. Do 1999 roku pracował w Instytucie Metrologii i Systemów Pomiarowych PW, specjalizując się w problematyce laserowych technik pomiarowych, będąc autorem sześciu patentów. Od 1999 roku pracuje w Głównym Urzędzie Miar, zajmując się w zagadnieniami teoretycznymi metrologii, związanymi z opracowaniem wyniku pomiaru, terminologią i niepewnością pomiaru. Jest autorem ponad stu publikacji.



e-mail: uncert@gum.gov.pl

Streszczenie

Przedstawiono metodę randomizacji oddziaływania systematycznego zawierającego dwie składowe, w postaci odchylenia pomiarowego i niepewności jego wyznaczenia. Oddziaływanie systematyczne tworzy zmienną losową, opisaną centrowanym rozkładem płasko-normalnym. Rozkład ten jest splotem rozkładu prostokątnego z normalnym. Dzięki temu możliwy jest łatwy opis analityczny, jak również numeryczny, przyjętego rozwiązania. Obliczenia niepewności standardowej i współczynnika rozszerzenia tak zdefiniowanej zmiennej losowej nie są skomplikowane i mogą być łatwo implementowane do praktyki metrologicznej.

Słowa kluczowe: niepewność pomiaru, oddziaływanie systematyczne.

Method of randomization of systematic effect and its application

Abstract

The paper concerns a problem of randomization of the systematic effect being a part of the coverage interval associated with the measurement result. This effect is characterized by two components: systematic and random. The systematic component is estimated by the bias and the random component is estimated by the uncertainty associated with the bias. Taking into consideration these two components, there can be created a random variable with zero expectation and the standard deviation calculated by randomizing the systematic effect. The method of randomization of the systematic effect is based on the Flatten-Gaussian distribution. The standard uncertainty, being the basic parameter of the systematic effect, can be calculated with a simple mathematical formula, represented by (9). The numerical formula (11) can be also used for calculation of this standard uncertainty with a random generator represented by (12). The presented evaluation of the uncertainty is more rational than those obtained with use of other methods, represented in literature [11-13]. It is useful for practical metrological application.

Keywords: measurement uncertainty, systematic effect.

1. Wstęp

Rozpoznane podczas pomiaru oddziaływania systematyczne charakteryzują się określonym znakiem i wartością oraz wyznaczane są z określoną niepewnością. W pomiarach bezpośrednich za ogół wynik pomiaru jest korygowany o wartość tych oddziaływań systematycznych, a jedynie włączana jest do niepewności wyniku składowa przypadkowa związana z wyznaczeniem poprawki lub błędu wskazania. Możliwe jest jednak również inne postępowanie, a mianowicie włączenie w całości oddziaływania systematycznego do przedziału rozszerzenia związanego z wynikiem pomiaru i przez to traktowanie go jak składowej niepewności [1].

Oddziaływanie systematyczne zawiera dwie składowe: systematyczną i przypadkową.

Część systematyczna oddziaływania przybliżana jest odchyleniem pomiarowym, a część przypadkowa estymowana jest niepewnością związaną z wyznaczeniem tego odchylenia. Powstająca w ten sposób nowa zmienna losowa charakteryzuje się zerową wartością oczekiwaną i odchyleniem standardowym obliczanym na podstawie informacji o wartości odchylenia pomiarowego i związanej z nim niepewności pomiarowej.

2. Przedział rozszerzenia

Pojęcie przedziału rozszerzenia związane jest z rozkładem prawdopodobieństwa dla wartości wielkości mierzonej. Ogólnie oznacza on przedział, o którym można twierdzić przy danym poziomie ufności, że zawiera co najmniej określoną część populacji [2]. Szczególnie, w metrologii oznacza on przedział zawierający wartość wielkości z określonym prawdopodobieństwem. Istnieją dwie opcje tego przedziału: probabilistycznie symetryczny i najkrótszy [3]. W przypadku symetrycznego rozkładu będzie to zawsze tylko jeden przedział, symetryczny wokół wartości oczekiwanej:

$$I(y) = [y_{\text{low}}, y_{\text{high}}], \quad (1)$$

gdzie $y_{\text{low}} = G^{-1}(\alpha)$ i $y_{\text{high}} = G^{-1}(\alpha+p)$. $G^{-1}(\alpha)$ jest kwantylem rzędu α , a $G^{-1}(\alpha+p)$ kwantylem rzędu $\alpha+p$ rozkładu opisanego dystrybuantą $G(\eta)$. Przyjmuje się, że $\alpha = 2,5\%$, a $p = 1-2\alpha = 95\%$. W odniesieniu do klasycznie zapisywanej niepewności rozszerzonej U_p przedział rozszerzenia można zdefiniować jako:

$$I(y) = [y - U_p, y + U_p]. \quad (2)$$

Granice przedziału rozszerzenia spełniają równanie:

$$\int_{y-U_p}^{y+U_p} g(\eta) d\eta = p, \quad (3)$$

gdzie $g(\eta)$ jest funkcją gęstości prawdopodobieństwa rozkładu związanego z wielkością mierzoną, y jej estymatą, a p prawdopodobieństwem rozszerzenia.

3. Oddziaływanie systematyczne

Oddziaływanie systematyczne można przedstawić w postaci dwóch składowych: estymaty jego wartości (odchylenia pomiarowego) e oraz niepewności standardowej $u(e)$ tego odchylenia. Możemy założyć, że rozkład prawdopodobieństwa związany ze składową przypadkową tego oddziaływania jest opisany rozkładem normalnym i możemy w związku z tym przyjąć, iż współczynnik rozszerzenia wynosi $k = 2$ dla prawdopodobieństwa 95% (rys. 1). Tworząc nową zmienną losową centrowaną wokół umownie przyjętej wartości zerowej wyznaczamy symetryczny przedział rozszerzenia:

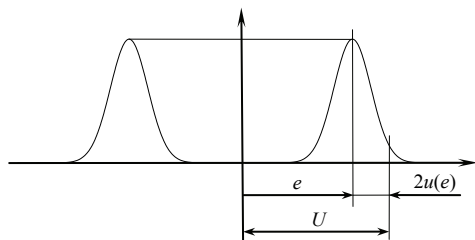
$$U = |e| + 2 \cdot u(e). \quad (4)$$

W ten sposób U_p staje się niepewnością rozszerzoną związaną z oddziaływaniem systematycznym. Rozkładem tej zmiennej losowej będzie rozkład płasko-normalny.

4. Rozkład płasko-normalny

Rozkład płasko-normalny jest spłotem rozkładu prostokątnego z normalnym. Funkcja gęstości tego rozkładu opisana jest zależnością:

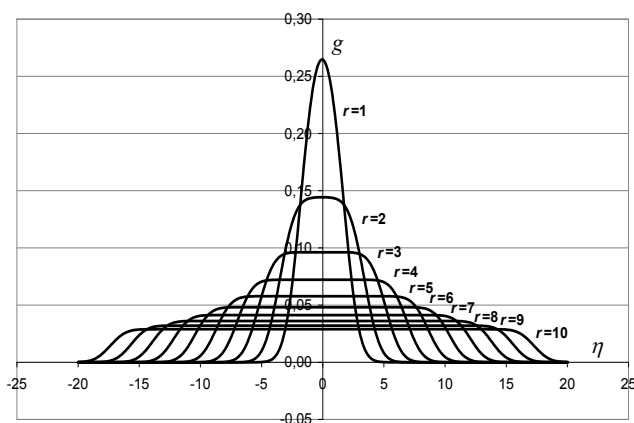
$$g(\eta) = \frac{1}{2\sqrt{6\pi} \cdot r} \int_{\eta-\sqrt{3} \cdot r}^{\eta+\sqrt{3} \cdot r} \exp\left[-\frac{\xi^2}{2}\right] d\xi. \quad (5)$$



Rys. 1. Schemat randomizacji oddziaływania systematycznego
Fig. 1. Randomization of the systematic effect

Funkcje gęstości tego rozkładu charakteryzują się na ogół stałą wartością w okolicach wartości oczekiwanej i zbroczami opisanymi funkcją Gaussa (rys. 2). Zakres stałości funkcji gęstości zależy od parametru r rozkładu, który określa stosunek odchylenia standardowego σ_P jego składowej prostokątnej do odchylenia standardowego σ_N jego składowej normalnej:

$$r = \frac{\sigma_P}{\sigma_N}. \quad (6)$$



Rys. 2. Funkcje gęstości rozkładu płasko-normalnego dla różnych wartości parametru r

Fig. 2. Probability density functions of the Flatten-Gaussian distribution for different values of parameter r

Parametr r rozkładu płasko-normalnego może być estymowany przy użyciu formuły wiążącej odchylenie pomiarowe z jego niepewnością standardową:

$$r_u = \frac{2 \cdot |e|}{3 \cdot u(e)} + 1. \quad (7)$$

Współczynnik rozszerzenia k_{PN} dla rozkładu płasko-normalnego może być obliczony metodami numerycznymi. Wartości tego współczynnika podane są w tabeli 1 [4-7]. Mogą być również

obliczone na podstawie rozkładu trapezowego, z zależności [8-10]:

$$k_T = \sqrt{\frac{3}{r_u^2 + 1}} \left(1 + r_u - 2\sqrt{r_u(1-p)}\right). \quad (8)$$

Różnice pomiędzy wartościami współczynników rozszerzenia obliczanymi z rozkładu płasko-normalnego (k_{PN}) i na podstawie rozkładu trapezowego (k_T) dla prawdopodobieństwa 95 % podano w tabeli 2. Różnice pomiędzy tymi wartościami są minimalne.

Tab. 1. Wartości kwantyla rozkładu płasko-normalnego dla $p = 95\%$
Tab. 1. Quantile values of the Flatten-Gaussian distribution for $p = 95\%$

r	k_{PN}	r	k_{PN}	r	k_{PN}
0	1,9600	3	1,7438	7	1,6634
0,1	1,9600	3,2	1,7347	7,2	1,6620
0,2	1,9598	3,4	1,7266	7,4	1,6608
0,3	1,9593	3,6	1,7193	7,6	1,6596
0,4	1,9580	3,8	1,7128	7,8	1,6585
0,5	1,9553	4	1,7070	8	1,6576
0,6	1,9510	4,2	1,7017	8,2	1,6566
0,7	1,9449	4,4	1,6970	8,4	1,6558
0,8	1,9371	4,6	1,6928	8,6	1,6550
0,9	1,9278	4,8	1,6889	8,8	1,6543
1	1,9174	5	1,6854	9	1,6536
1,2	1,8948	5,2	1,6822	9,2	1,6529
1,4	1,8716	5,4	1,6793	9,4	1,6523
1,6	1,8493	5,6	1,6767	9,6	1,6518
1,8	1,8288	5,8	1,6742	9,8	1,6513
2	1,8102	6	1,6720	10	1,6508
2,2	1,7936	6,2	1,6700	20	1,6443
2,4	1,7788	6,4	1,6681	50	1,6451
2,6	1,7657	6,6	1,6664	100	1,6454
2,8	1,7541	6,8	1,6648	∞	1,6454

Tab. 2. Niepewność standardowa i współczynnik rozszerzenia randomizowanego oddziaływania systematycznego

Tab. 2. Standard uncertainty and coverage factor of randomized systematic effect

$e/u(e)$	r_u	k_{PN}	k_T	U	$u_R = U/k_{PN}$	$u_R = U/k_T$	$u_{R(MCM)}$
0,1	1,0667	1,91	1,90	2,1	1,10	1,10	1,10
0,2	1,1333	1,90	1,90	2,2	1,16	1,16	1,15
0,3	1,2000	1,89	1,90	2,3	1,22	1,21	1,21
0,4	1,2667	1,89	1,89	2,4	1,27	1,27	1,28
0,5	1,3333	1,88	1,89	2,5	1,33	1,32	1,32
0,6	1,4000	1,87	1,88	2,6	1,39	1,38	1,39
0,7	1,4667	1,86	1,88	2,7	1,45	1,44	1,44
0,8	1,5333	1,86	1,87	2,8	1,51	1,49	1,50
0,9	1,6000	1,85	1,87	2,9	1,57	1,55	1,56
1	1,6667	1,84	1,86	3,0	1,63	1,61	1,62
2	2,3333	1,78	1,81	4,0	2,25	2,21	2,23
3	3,0000	1,74	1,77	5,0	2,87	2,83	2,85
4	3,6667	1,72	1,74	6,0	3,49	3,46	3,47
5	4,3333	1,70	1,71	7,0	4,12	4,08	4,10
6	5,0000	1,69	1,70	8,0	4,73	4,71	4,72
7	5,6667	1,68	1,69	9,0	5,36	5,34	5,35
8	6,3333	1,67	1,68	10	5,99	5,96	5,98
9	7,0000	1,66	1,67	11	6,63	6,59	6,61
10	7,6667	1,66	1,66	12	7,23	7,21	7,23

5. Niepewność standardowa randomizowanego oddziaływania systematycznego

Niepewność standardowa randomizowanego oddziaływania systematycznego wynosi:

$$u_R = \frac{U}{k} = \frac{|e| + 2 \cdot u(e)}{k}, \quad (9)$$

przy czym współczynnik rozszerzenia:

$$k = k_{PN} \approx k_T. \quad (10)$$

Różnice w wyznaczonych wartościach niepewności standardowej randomizowanego oddziaływania systematycznego dla współczynników k_{PN} i k_T przedstawia również tabela 2. Są one minimalne i nie mają istotnego wpływu na samą wartość niepewności standardowej, szczególnie gdy wyraża się ją z dwoma cyframi znaczącymi. W tabeli zapisano je, w celu pokazania różnic, z większą liczbą cyfr znaczących. Względne różnice pomiędzy nimi nie przekraczają dwóch procent.

Niepewność standardową randomizowanego oddziaływania systematycznego można również obliczyć przy użyciu metody Monte Carlo, stosując do obliczeń formułę [3]:

$$u_{R(MCM)}^2 = \frac{1}{M-1} \sum_{i=1}^M (y_i - \bar{y})^2. \quad (11)$$

Wartości y_i są losowane z rozkładu płasko-normalnego, opisanego parametrem $r = r_u$, danego równaniem (7). Wyniki obliczeń $u_{R(MCM)}$ przedstawiono również w tabeli 2. Różnice pomiędzy wartościami u_R obliczanymi metodą analityczną i $u_{R(MCM)}$ obliczanymi metodą numeryczną nie przekraczają jednego procenta.

Generator liczb losowych o rozkładzie płasko-normalnym może być zbudowany z dwóch prostych generatorów liczb losowych. Losowanie może odbywać się przy użyciu formuły:

$$y = \frac{r z_P + z_N}{\sqrt{r^2 + 1}}. \quad (12)$$

gdzie z_P i z_N są zmiennymi losowymi mającymi standaryzowane rozkłady prawdopodobieństwa: prostokątny $P(0, 1)$ i normalny $N(0, 1)$.

6. Porównanie z podejściem literaturowym

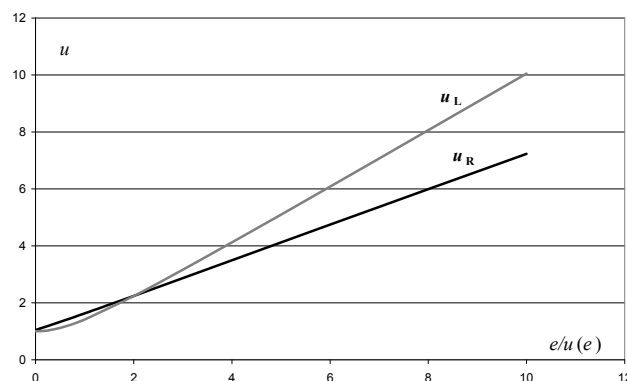
Podejście prezentowane w literaturze [11-13] często sprowadza się do oceny niepewności, związanej z oddziaływaniem systematycznym, na podstawie zależności:

$$u_L = \sqrt{e^2 + u^2(e)} \quad (13)$$

W tym podejściu wartość odchylenia pomiarowego e traktowana jest jak niepewność standardowa. Ponieważ odchylenie pomiarowe zawsze podawane jest z określoną niepewnością, to formuła (13) łączy niepewność standardową $u(e)$ z oszacowaniem e . Ta formuła łączy składową standardową systematyczną z przypadkową oddziaływania systematycznego i wyraża niepewność u_L podobnie jak prawo propagacji niepewności. Zależność ta jest funkcją nieliniową (rys. 3).

Natomiast, w przestawionym powyżej rozdziale, zależność (9) na u_R tworzy praktycznie funkcję liniową. Jednakowym przyrostom wartości składowych oddziaływania systematycznego towarzyszą proporcjonalne przyrosty wartości niepewności standardo-

wej. Dzięki temu zależność pomiędzy składowymi a niepewnością standardową jest liniowa.



Rys. 3. Niepewność standardowa policzona dwoma sposobami
Fig. 3. Standard uncertainty calculated with two approaches

7. Przykład zastosowania

Praktyczne zastosowanie randomizacji może być wykorzystane przy interpretacji informacji zawartej w świadectwie wzorcowania. W świadectwie podana jest wartość odchylenia pomiarowego i niepewność jej wyznaczenia. Niepewność podawana jest jako niepewność rozszerzona będąca iloczynem złożonej niepewności standardowej i współczynnika rozszerzenia $k=2$, związanego z rozkładem normalnym, dla poziomu ufności około 95%.

Możemy posłużyć się przykładem obliczeniowym wyniku pomiaru średnicy wałka przy użyciu wywzorcowanego mikrometru. Świadectwo wzorcowania mikrometru podaje, że odchylenie e w całym zakresie pomiarowym wynosi $3 \mu\text{m}$ z niepewnością $2 \mu\text{m}$. Zakładamy, że odchylenie pomiarowe jest estymatą wartości odchylenia systematycznego wskazań przyrządu pomiarowego i nie przekracza $3 \mu\text{m}$ dla każdej zmierzonej średnicy. W powyższym przypadku $|e| = 0,003 \text{ mm}$ i $u(e) = 0,001 \text{ mm}$, gdyż niepewność rozszerzona $U_{0,95} = 0,002 \text{ mm}$ i $k = 2$. Randomizowane oddziaływanie systematyczne charakteryzuje się rozkładem płasko-normalnym o parametrze $r_u = 3$, danym zależnością (7). Na podstawie tabeli 1 możemy odczytać, że $k_{PN} = 1,74$ lub na podstawie zależności (8) można wyznaczyć, że $k_T = 1,77$. Niepewność standardowa, dana formułą (9), wynosi $u_R = 0,0029 \text{ mm}$. W przypadku przybliżenia rozkładem trapezowym niepewność standardowa wynosi $u_R = 0,0028 \text{ mm}$, ponieważ rozkład trapezowy ma mniejszą niepewność standardową niż rozkład płasko-normalny dla tych samych parametrów randomizacji. Niepewność tą można nazwać niepewnością typu B i zapisać jako $u_B = u_R$.

Średnica wałka $\Phi 20\text{h7}$ (h7 to oznaczenie tolerancji średnicy) była zmierzona ze średnią wartością odczytów $\bar{d} = 19,990 \text{ mm}$, jako estymatą średnicy i odchyleniem standardowym eksperymentalnym średnim $s(\bar{d}) = 0,0017 \text{ mm}$, jako niepewnością standardową. Ta niepewność nazywana jest niepewności typu A, zatem $u_A = s(\bar{d})$. Zgodnie z prawem propagacji niepewności złożona niepewność standardowa dana jest zależnością:

$$u_c(d) = \sqrt{u_A^2 + u_B^2} \quad (14)$$

Złożona niepewność standardowa może być estymatą niepewności standardowej związanej z wynikiem pomiaru średnicy wałka zmierzonego przy użyciu wywzorcowanego mikrometru: $u(d) = u_c(d) = 0,0033 \text{ mm}$. Możemy przyjąć rozkład normalny związany z niepewnością u_A i rozkład płasko-normalny związany z niepewnością u_B . Przedział rozszerzenia może być policzony metodą analityczną, przedstawioną w publikacji [4-6]. Używając tej metody

możemy wyznaczyć: $d_{\text{low}} = 19,9838$ mm i $d_{\text{high}} = 19,9962$ mm. Zgodnie z zaleceniami dokumentu [3] możemy zapisać, że:

$$d = 19,9900 \text{ mm}, u(d) = 0,0033 \text{ mm}$$

$$95 \% \text{ coverage interval} = [19,9838; 19,9962] \text{ mm}$$

lub w tradycyjnej postaci: $d = (19,9900 \pm 0,0062)$ mm. Możemy porównać ten wynik z obliczeniami metodą Monte Carlo [3]:

$$d = 19,9900 \text{ mm}, u(d) = 0,0034 \text{ mm}$$

$$95 \% \text{ coverage interval} = [19,9837; 19,9963] \text{ mm}$$

lub przedstawionych w tradycyjnej postaci: $d = (19,9900 \pm 0,0063)$ mm. Wynik pomiaru jest taki sam, gdy zaokrąglamy niepewność standardową do jednej cyfry znaczącej:

$$d = 19,990 \text{ mm}, u(d) = 0,003 \text{ mm}$$

$$95 \% \text{ coverage interval} = [19,984; 19,996] \text{ mm}$$

lub wyrażając w tradycyjnej postaci: $d = (19,990 \pm 0,006)$ mm. Tolerancja średnicy $\Phi 20h7$ wynosi: $T = 21$ μm , z górną granicą specyfikacji: 0 μm i dolną granicą specyfikacji: -21 μm , które odpowiadają maksymalnej wartości średnicy: $d_{\text{max}} = 20$ mm i minimalnej wartości średnicy: $d_{\text{min}} = 19,979$ mm.

8. Podsumowanie

Oddziaływanie systematyczne pomiaru może być włączone do przedziału rozszerzenia wyniku pomiaru. Traktowane jest wówczas jak składowa niepewności, która jest zmienną losową. Ta zmienna losowa opisana jest rozkładem płasko-normalnym. Rozkład ten obejmuje dwie składowe oddziaływania systematyczne: odchylenie pomiarowe i jego niepewność wyznaczenia. Obliczenia niepewności standardowej i współczynnika rozszerzenia takiej wielkości nie są skomplikowane i mogą być łatwo implementowane do praktyki metrologicznej.

Podejście przedstawiane w literaturze nie zakłada rozkładu dla oddziaływania systematycznego. Przez to niepewność standardowa związana z tym oddziaływaniem może być obliczana tylko na podstawie prawa propagacji niepewności. Natomiast przedstawione tu obliczenia mogą być wykonywane zarówno metodą analityczną jak i numeryczną zgodnie z zasadą propagacji rozkładów prawdopodobieństwa, rekomendowaną w [3]. Każda z tych metod prowadzi praktycznie do tej samej wartości niepewności standardowej i rozszerzonej.

Metodę można wykorzystać przy opracowaniu wyniku pomiaru wykonanego dowolnym przyrządem pomiarowym, jeżeli posia-

damy wiarygodną informację o wartościach jego oddziaływań systematycznych. Źródłem takiej informacji może być świadectwo wzorcowania przyrządu pomiarowego. Wykorzystanie metody możliwe jest też przy ocenie zdolności pomiarowej przyrządów, gdy odchylenie pomiarowe traktowane jest jako jedna z istotnych składowych budżetu niepewności.

9. Literatura

- [1] Fotowicz P.: Systematic effect as a part of the coverage interval. *Metrology and Measurement Systems*, vol. XVII (2010), nr 3, s. 439-446.
- [2] Guide to the Expression of Uncertainty in Measurement. ISO 1995.
- [3] Evaluation of measurement data – Supplement 1 to the Guide – Propagation of distribution using a Monte Carlo method. Dokument JCGM 101:2008.
- [4] Fotowicz P.: Metoda wyznaczania współczynnika rozszerzenia w procedurach szacowania niepewności pomiaru. *PAR* nr 10 (2003), s. 13-16.
- [5] Fotowicz P.: Metody obliczania współczynnika rozszerzenia w oparciu o splot rozkładu prostokątnego z normalnym. *PAK* nr 4 (2004), s. 13-16.
- [6] Fotowicz P.: Obliczanie niepewności rozszerzonej metodą analityczną opartą na splotach rozkładów wielkości wejściowych. *PAR* nr 1 (2005), s. 5-9.
- [7] Fotowicz P.: An analytical method for calculating a coverage interval. *Metrologia* vol. 43 (2006), s. 42-45.
- [8] Fotowicz P.: Ocena dokładności przybliżenia splotu rozkładów prostokątnego i normalnego rozkładem trapezowym. *PAR* nr 5 (2001), s. 9-11.
- [9] Fotowicz P.: Zasada przybliżenia rozkładu wyniku pomiaru przy wzorcowaniu. *PAR* nr 9 (2001), s. 8-11.
- [10] Fotowicz P.: A method of approximation of the coverage factor in calibration. *Measurement*, vol. 35 (2004), s. 251-256.
- [11] Phillips S. D., Eberhardt K. R.: Guidelines for Expressing the Uncertainty of Measurement Results Containing Uncorrected Bias. *Journal of Research of the NIST*, vol. 102 (1997), s. 577-585.
- [12] Lira I. H., Woger W.: The evaluation of the uncertainty in knowing a directly measured quantity. *Measurement Science and Technology*, vol. 9 (1998), s. 1167-1173.
- [13] Karker R., Sommer K-D., Kessel R.: Evaluation of modern approaches to express uncertainty in measurement. *Metrologia*, vol. 44 (2007), s. 513-529.

otrzymano / received: 08.08.2011

przyjęto do druku / accepted: 03.10.2011

artykuł recenzowany

INFORMACJE

Zapraszamy do publikacji artykułów naukowych w czasopiśmie PAK

WYDAWNICTWO PAK

ul. Świętokrzyska 14A, pok. 530, 00-050 Warszawa,
tel./fax: 22 827 25 40

Redakcja czasopisma POMIARY AUTOMATYKA KONTROLA
44-100 Gliwice, ul. Akademicka 10, pok. 30b,
tel./fax: 32 237 19 45, e-mail: wydawnictwo@pak.info.pl