

Tadeusz KRUCZEK

INSTYTUT TECHNIKI CIEPLNEJ, POLITECHNIKA ŚLĄSKA,
ul. Konarskiego 22, 44-100 Gliwice

Metoda oceny niepewności współczynników równania empirycznego w oparciu o metodę najmniejszych kwadratów

Dr inż. Tadeusz KRUCZEK

Studia oraz doktorat na Wydziale Mechanicznym Energetycznym Politechniki Śląskiej. Ciągłe, praca w Instytucie Techniki Ciepłej. Działalność naukowa w obszarze doskonalenia gospodarki energetycznej w przemyśle, techniki pomiarów ciepłych i termowizyjnych, diagnostyki ciepłej obiektów. Autor lub współautor ponad 120 publikacji. Staże w kilkunastu zagranicznych ośrodkach naukowych. Członek Komisji Energetyki PAN O/Katowice, kierownik Laboratorium Techniki Ciepłej w Instytucie Techniki Ciepłej.



e-mail: tadeusz.kruczek@polsl.pl

Streszczenie

Praca dotyczy zagadnienia oceny niepewności współczynników nieliniowych równań empirycznych i zawiera propozycję metody oceny wymienionych niepewności. W metodzie tej do wyznaczenia współczynników równania empirycznego wykorzystuje się klasyczną metodę najmniejszych kwadratów natomiast oszacowanie ich niepewności przeprowadza się za pomocą algorytmu do wyznaczania niepewności w pomiarze złożonym wykorzystując niepewności standardowe bezpośredniego pomiaru badanych parametrów. Metoda ta może być stosowana również do równań liniowych, a w skrajnym przypadku może być użyta w sytuacji gdy występują tylko dwa punkty pomiarowe i współczynniki równania są wtedy wyznaczone jednoznacznie. W takim przypadku zastosowanie tej metody sprowadza się do klasycznego obliczenia niepewności w pomiarze złożonym gdzie występują dwie wielkości mierzone pośrednio którymi są współczynniki równania liniowego.

Słowa kluczowe: izolacja cieplna rurociągu, niepewność współczynników równania empirycznego, badania termowizyjne rurociągów napowietrznych.

Method for evaluation of uncertainties of empirical equation coefficients based on the least squares adjustment method

Abstract

The paper deals with evaluation of uncertainties of the coefficients in nonlinear empirical equations. There is proposed a method for evaluation of these uncertainties. In the proposed algorithm for determination of the aforementioned coefficients the classical least squares adjustment method is used, whereas determination of their uncertainties is performed by a standard procedure of combined uncertainty calculation [1]. For this purpose the uncertainties of directly measured parameters are used. The method may be also applied to linear equations, especially in the particular case for only two measurement points. In this case, calculation of the standard uncertainties is brought to classical calculation of the combined standard uncertainties for indirect measurement. In the paper the algorithm of calculation of all coefficients in a polynomial of any degree by means of the least squares adjustment method is presented, Eqs (1÷6). The way of evaluation of the polynomial coefficient uncertainties is shown on an example of the polynomial of 2-nd degree, Eqs (10÷21). The presented method has been applied to determination of a trinomial equation describing the changes of thermal insulation conductivity as a function of its temperature, Fig. 1.

Keywords: thermal insulation of pipeline, uncertainty of coefficients of nonlinear empirical equation, thermovision inspection of overhead pipelines.

1. Oznaczenia i indeksy

- a_k - k -ty współczynnik wielomianu,
- t - temperatura,
- $u(x)$ - niepewność wielkości x ,

- λ - współczynnik przewodności cieplnej, W/(m·K),
- m - liczba współczynników wielomianowych,
- n - liczba punktów pomiarowych.

2. Wstęp

W przypadku pomiarów termowizyjnych w otwartej przestrzeni (budynki, rurociągi i in.) otoczenie badanego obiektu składa się zwykle z dwóch elementów: nieboskłonu i gruntu. Elementy te mają na ogół dość zróżnicowane temperatury. Najczęściej pozorną temperaturą nieboskłonu jest znacznie niższa od temperatury gruntu co powoduje zróżnicowanie w intensywności radiacyjnej wymiany ciepła na obwodzie rurociągu. W pewnych warunkach temperatura górnej części płaszcza rurociągu może nawet obniżyć się do temperatury niższej od temperatury powietrza atmosferycznego. Zjawisko to bardzo utrudnia ilościową interpretację wyników diagnostyki termowizyjnej izolacyjności cieplnej rurociągów. Tematyka artykułu związana jest z badaniami dotyczącymi oceny strat ciepła w oparciu o wyniki diagnostyki termowizyjnej napowietrznych rurociągów energetycznych.

Do opisu przebiegu różnych zjawisk i procesów fizycznych tworzone są modele matematyczne wyrażające poprzez odpowiednie równania zależności pomiędzy parametrami mającymi wpływ na przebieg rozpatrywanego procesu. W przypadku gdy wartość jednego z parametrów występujących w modelu jest wyznaczana w oparciu o wyniki pomiarów bezpośrednich pozostałych parametrów (o znanych niepewnościach), można łatwo obliczyć niepewność wyznaczanego parametru obliczając ją jako niepewność wielkości wyznaczonej w pomiarze złożonym [1, 2]. Rozważania zawarte w niniejszej pracy dotyczą oceny niepewności współczynników równania empirycznego. Równanie takie zastosowano do opisu zmian współczynnika przewodności cieplnej izolacji stosowanej w budowie rurociągów energetycznych. Transport ciepła w porowatej (lub włóknistej) izolacji cieplnej odbywa się trzema drogami: przez przewodzenie w litym materiale izolacyjnym, przez przewodzenie w gazie zawartym w porach materiału izolacyjnego lub w przestrzeniach międzywłóknowych oraz przez promieniowanie pomiędzy cząstkami materiału izolacyjnego [3, 4]. Związek pomiędzy lokalnym strumieniem ciepła przepływającym przez warstwę izolacji i lokalną temperaturą ma charakter nieliniowy głównie z powodu radiacyjnego transportu ciepła w opisie którego temperatura występuje w czwartej potęgce. Z powyższych przyczyn do opisu zmian współczynnika przewodności cieplnej izolacji wskazane jest zastosowanie zależności krzywoliniowej o charakterze potęgowym. Do oceny niepewności współczynników tej zależności zaproponowano metodę wykorzystującą metodę najmniejszych kwadratów i prawo propagacji niepewności w pomiarze złożonym. W dalszym zastosowaniu tego równania, przy szacowaniu niepewności współczynnika przewodności cieplnej, wymienione równanie traktowane jest jako model pomiaru złożonego. W takim przypadku wielkościami obciążonymi niepewnościami będą współczynniki wymienionego równania oraz mierzona temperatura dla której obliczana jest wartość przewodności cieplnej [5].

Zasadniczo proponowana metoda powinna być stosowana do oceny niepewności współczynników w równaniach których postać wynika z praw fizyki i zależności opisujących ściśle współzależności pomiędzy badanymi parametrami.

W rozpatrywanym przypadku znajomość niepewności wyznaczenia współczynnika przewodności cieplnej izolacji była przydatna przy ilościowej ocenie strat ciepła w oparciu o wyniki pomiarów termowizyjnych z eksperymentalnego odcinka napowietrznego rurociągu na stanowisku badawczym.

3. Ogólny opis metody

W dalszych rozważaniach jako równanie modelu matematycznego opisujące przebieg procesu przyjęto wielomian. Początkowe rozważania dotyczą wielomianu dowolnego stopnia, w dalszej części przedstawiono bardziej szczegółowo rozważania dla wielomianu drugiego stopnia. W ogólnym przypadku wielomian dowolnego stopnia można przedstawić w postaci szeregu:

$$\lambda = \sum_{k=1}^m a_k t^{k-1} \quad (1)$$

gdzie λ , t - są odpowiednio zmienną zależną i niezależną natomiast wartość wyrażenia $(m-1)$ jest stopniem wielomianu.

Poszukiwanie nieznanych współczynników wielomianu za pomocą metody najmniejszych kwadratów sprowadza się do spełnienia warunku minimum sumy kwadratów odchylenia punktów pomiarowych od krzywej aproksymacyjnej, co wyraża się zależnością:

$$F(\lambda, t) = \sum_{i=1}^n \left(\lambda_i - \sum_{k=1}^m a_k t_i^{k-1} \right)^2 \rightarrow \min \quad (2)$$

Współczynniki a_k , gdzie $k=1, \dots, m$, wyznacza się z warunków osiągnięcia przez funkcję F ekstremum (minimum wartości), co wymaga spełnienia m warunków o postaci:

$$\frac{\partial F(\lambda, t)}{\partial a_k} = 0 \quad \text{gdzie } k=1, \dots, m \quad (3)$$

Spełnienie warunków (3) wymaga rozwiązania układu m równań, który można następująco zapisać w postaci macierzej [5]:

$$S A = B \quad (4)$$

gdzie: A jest macierzą kolumnową poszukiwanych współczynników wielomianu a_k , $k=1, \dots, m$; B jest macierzą kolumnową wyrazów określonych za pomocą wyrażenia (5) gdzie $k=1, \dots, m$.

Wyraz k -ty macierzy kolumnowej B wyznacza się z przedstawionej poniżej formuły:

$$b_k = \sum_{i=1}^n \lambda_i t_i^{k-1} \quad (5)$$

Natomiast dowolny (k, l) -ty wyraz kwadratowej macierzy S ma postać:

$$s_{k,l} = \sum_{i=1}^n t_i^{k+l-2} \quad (6)$$

4. Rozwinięcie metody dla trójmianu

W przypadku trójmianu, z zależności (5, 6) otrzymuje się następujące postacie macierzy:

$$S = \begin{bmatrix} n & \sum_{i=1}^n t_i & \sum_{i=1}^n t_i^2 \\ \sum_{i=1}^n t_i & \sum_{i=1}^n t_i^2 & \sum_{i=1}^n t_i^3 \\ \sum_{i=1}^n t_i^2 & \sum_{i=1}^n t_i^3 & \sum_{i=1}^n t_i^4 \end{bmatrix} \quad (7)$$

$$A = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} \quad (8)$$

$$B = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^n \lambda_i \\ \sum_{i=1}^n \lambda_i t_i \\ \sum_{i=1}^n \lambda_i t_i^2 \end{bmatrix} \quad (9)$$

Aby wyznaczyć niepewność współczynników a_1 , a_2 , a_3 , współczynniki te potraktowano jako wynik pomiaru złożonego. W ogólnym przypadku rozwiązanie układu równań (4) można przedstawić jako funkcję $2n$ wielkości mierzonych:

$$a_1 = a_1(t_1, t_2, \dots, t_n, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) \quad (10)$$

$$a_2 = a_2(t_1, t_2, \dots, t_n, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) \quad (11)$$

$$a_3 = a_3(t_1, t_2, \dots, t_n, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) \quad (12)$$

Jeżeli każdy z tych współczynników potraktujemy jako wynik pomiaru złożonego, a wynikami pomiarów bezpośrednich są wartości t_i, λ_i , gdzie $i=1 \dots n$, to ich niepewności wynikają z prawa propagacji błędów [1, 2] i można je wyrazić za pomocą zależności:

$$u(a_1) = u_{a_1} = \sqrt{\sum_{i=1}^n \left[\frac{\partial a_1}{\partial t_i} u(t_i) \right]^2 + \sum_{i=1}^n \left[\frac{\partial a_1}{\partial \lambda_i} u(\lambda_i) \right]^2} \quad (13)$$

$$u(a_2) = u_{a_2} = \sqrt{\sum_{i=1}^n \left[\frac{\partial a_2}{\partial t_i} u(t_i) \right]^2 + \sum_{i=1}^n \left[\frac{\partial a_2}{\partial \lambda_i} u(\lambda_i) \right]^2} \quad (14)$$

$$u(a_3) = u_{a_3} = \sqrt{\sum_{i=1}^n \left[\frac{\partial a_3}{\partial t_i} u(t_i) \right]^2 + \sum_{i=1}^n \left[\frac{\partial a_3}{\partial \lambda_i} u(\lambda_i) \right]^2} \quad (15)$$

Ze względu na dość skomplikowaną postać zależności $a_j = a_j(t_1, t_2, \dots, t_n, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$, $j=1,2,3$, wartości pochodnych $\partial a_j / \partial t_i$ oraz $\partial a_j / \partial \lambda_i$ dogodnie jest obliczać numerycznie według formuły różnicowej:

$$\frac{\partial a_j}{\partial t_i} \cong \frac{a_j(t + \Delta t, \lambda) - a_j(t, \lambda)}{\Delta t} \quad (16)$$

gdzie:

$$(t + \Delta t, \lambda) = \{t_1, t_2, \dots, t_i + \Delta t, t_{i+1}, \dots, t_n, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\} \quad (17)$$

$$(t, \lambda) = \{t_1, t_2, \dots, t_i, t_{i+1}, \dots, t_n, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\} \quad (18)$$

natomiast:

$$\frac{\partial a_j}{\partial \lambda_i} \cong \frac{a_j(t, \lambda + \Delta \lambda) - a_j(t, \lambda)}{\Delta \lambda} \quad (19)$$

oraz:

$$(t, \lambda + \Delta \lambda) = \{t_1, t_2, \dots, t_n, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_i + \Delta \lambda, \lambda_{i+1}, \dots, \lambda_n\} \quad (20)$$

$$(t, \lambda) = \{t_1, t_2, \dots, t_n, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_i, \lambda_{i+1}, \dots, \lambda_n\} \quad (21)$$

5. Przykład obliczeniowy

Jako przykład zastosowania przedstawionej metody wybrano opis zależności współczynnika przewodności cieplnej otuliny do

izolacji rurociągów ciepłych. Współczynniki przewodności ciepłej wybranego typu otuliny zaczerpnięto z certyfikatów technicznych dla wymienionego produktu [6, 7]. Wyniki te przedstawiono w tabelicy 1 oraz graficznie na rys. 1.

Tab. 1. Dane pomiarowe dotyczące przewodności ciepłej dla otuliny izolacyjnej [6, 7]

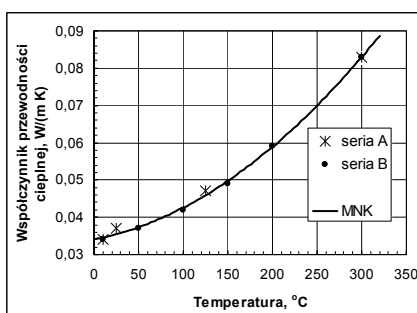
Tab. 1. Measurement data concerning thermal insulation [6, 7]

Seria pomiarowa A, [7]		Seria pomiarowa B, [6]	
Temperatura t , °C	Współczynnik λ , W/(m·K)	Temperatura t , °C	Współczynnik λ , W/(m·K)
10	0,034	10	0,034
25	0,037	50	0,037
125	0,047	100	0,042
300	0,083	150	0,049
		200	0,059
		300	0,083

Na wykresie (rys.1) naniesiono także krzywą aproksymującą zmienność współczynnika przewodności ciepłej w funkcji temperatury wyznaczoną za pomocą metody najmniejszych kwadratów w postaci:

$$\lambda = a_1 + a_2 t + a_3 t^2 \quad (22)$$

Analiza tych danych wskazuje wyraźnie na paraboliczny charakter tej zależności.



Rys. 1. Zależność współczynnika przewodności ciepłej izolacji od temperatury [6, 7]
Fig. 1. Relationship between thermal conductivity coefficient of insulation and temperature [6, 7]

Jako podstawę do wyznaczenia niepewności pomiaru temperatur t_i przyjęto podany w wymienionej literaturze błąd graniczny (maksymalny) pomiaru temperatury $\Delta t = \pm 1,0K$. Dla współczynników przewodności ciepłej λ_i przyjęto błędy graniczne wynikające z dokładności zapisu wyników wynoszące $\Delta \lambda = 0,0005 W/(m \cdot K)$. W obu przypadkach przyjęto równomierny rozkład statystyczny błędów. Jako niepewność pomiaru przyjęto odchylenie standardowe dla wymienionych rozkładów [1, 2, 8]. Dla rozkładu równomiernego odchylenie standardowe, które przyjęto jako niepewność pomiaru temperatury, wynosi:

$$u(t_i) = \frac{\Delta t}{\sqrt{3}} = \frac{1,0}{\sqrt{3}} \cong 0,6K,$$

natomiast niepewność pomiaru współczynnika przewodności ciepłej jest równa:

$$u(\lambda_i) = \frac{\Delta \lambda}{\sqrt{3}} = \frac{0,0005}{\sqrt{3}} \cong 0,0003 W/(m \cdot K)$$

W oparciu o opracowany algorytm przeprowadzono obliczenia numeryczne obliczając wartości współczynników a_j oraz ich niepewności. Wyniki przedstawiono w tabelicy 2. Przy prezentacji wyników obliczeń w tabelicy 2 podano nieco większą liczbę cyfr znaczących niż należałoby podać gdyby te wyniki były końcowym efektem obliczeń.

W celu oszacowania liczby niezbędnych miejsc przy podawaniu wyniku przeprowadzono analizę, którą zaprezentowano na przykładzie współczynnika a_3 . Opracowana zależność obowiązuje w zakresie do 300°C, zatem przy maksymalnej temperaturze przy współczynniku a_3 będzie występować liczba równa $300^2 = 90000 \cong 10^5$. W rezultacie wykonania działania mnożenia, ten człon wniesie do sumy wielomianowej składnik równy 0,0389, czyli tylko jedno miejsce więcej niż w wynikach pomiarów użytych do wyznaczenia tych współczynników [6, 7]. W tej sytuacji zaokrąglenie końcowego wyniku powinno nastąpić dopiero po wykonaniu operacji sumowania poszczególnych składników wielomianu.

Tab. 2. Wartości współczynników a_j oraz ich niepewności

Tab. 2. Calculated values of coefficients a_j and their uncertainties

Współczynnik	Wymiar fizyczny	Wartość współczynnika a	Niepewność rozszerzona $k=2$, $U(a_j)$
a_1	W/(m·K)	0,0340	0,0004
a_2	W/(m·K ²)	0,0000466	0,0000068
a_3	W/(m·K ³)	0,000000389	0,00000022

6. Uwagi końcowe

Przedstawiona metoda oceny niepewności współczynników równania empirycznego opiera się na klasycznej metodzie najmniejszych kwadratów. Można przyjąć, że przedstawiona metoda jest zastosowaniem prawa propagacji błędów w pomiarze złożonym pod warunkiem, że postać przyjętego równania aproksymacyjnego wynika ze ścisłego fizycznego opisu związku rozpatrywanych wielkości. W tych warunkach ewentualny brak dokładnego dopasowania wyników pomiarów do przyjętego równania powinien wynikać tylko z niepewności pomiarowych, a nie z powodu złego doboru postaci równania do opisu badanego procesu.

W artykule wyprowadzono w najogólniejszej formie zależności dla równania empirycznego w postaci wielomianu dowolnego stopnia. Największe potencjalnie szanse na zastosowanie ma jednak wielomian drugiego stopnia. Dlatego na przykładzie wielomianu drugiego stopnia przedstawiono szczegółowy sposób postępowania przy obliczaniu niepewności współczynników równania. Sposób ten może być łatwo przeniesiony na wielomian wyższego rzędu.

W artykule przedstawiono praktyczny przykład zastosowania omawianej metody w przypadku wyrażenia zależności współczynnika przewodności ciepłej od temperatury dla izolacji ciepłej stosowanej w budowie rurociągów energetycznych.

Praca zrealizowana w ramach projektu badawczego NN513 311735 wspieranego finansowo przez MNiSzW ze środków na lata 2008-2011.

7. Literatura

- [1] Wyrażanie niepewności pomiaru, Przewodnik. Główny Urząd Miar, Warszawa, 1999.
- [2] Skubis T.: Podstawy metrologicznej interpretacji wyników pomiarów, Wyd. Politechniki Śląskiej, Gliwice, 2004.
- [3] Górzyński J.: Przemysłowe izolacje cieplne. Wyd. Izomar, 1996, Warszawa.
- [4] Kostowski E.: Przepływ ciepła, Wyd. Pol. Śląskiej, Gliwice, 2006.
- [5] Kruczek T.: Opracowanie budżetu niepewności pomiaru strat ciepła z rurociągu do otoczenia na stanowisku doświadczalnym. Praca Dyplomowa, Studium Podyplomowe -Organizacja i Akredytacja Laboratoriów, Promotor T. Skubis, IMEiA, Pol. Śl., Gliwice, 2010.
- [6] Paroc OY AB, Technical Insulation, Technical Properties, Vantaa, www.paroc.com
- [7] Technical Approval, PAROC Section, No TO-07-1673-06, Moskwa, 2006.
- [8] Skubis T.: Opracowanie wyników pomiarów. Wyd. Politechniki Śląskiej, Gliwice, 2003.