

Marian ADAMSKI, Monika WIŚNIEWSKA

UNIWERSYTET ZIELONOGÓRSKI,
ul. Licealna 9, 65-417 Zielona Góra

Zastosowanie teorii hipergrafów w procesie analizy systemów dyskretnych opisanych sieciami Petriego

Prof. dr hab. inż. Marian ADAMSKI

Profesor zwyczajny, dyrektor Instytutu Informatyki i Elektroniki Uniwersytetu Zielonogórskiego. Zainteresowania badawcze obejmują projektowanie systemów cyfrowych realizowanych w postaci mikrosystemów cyfrowych oraz formalnych metod programowania sterowników logicznych. Członek IEEE, IEE, ACM, PTI oraz PTETiS.



e-mail: M.Adamski@iie.uz.zgora.pl

Mgr inż. Monika WIŚNIEWSKA

Ukończyła studia na Wydziale Elektrycznym Uniwersytetu Zielonogórskiego, o specjalności Inżynieria Komputerowa. Obroniła pracę magisterską w 2003 r. W roku 2001 odbyła przemysłową praktykę studencką w firmie Aldec Inc. w Stanach Zjednoczonych. Od 2004 r. jest słuchaczem studiów doktoranckich, specjalność informatyka. Jej zainteresowania naukowe to dekompozycja systemów dyskretnych z wykorzystaniem hipergrafów.



e-mail: M.Wisniewska@weit.uz.zgora.pl

Streszczenie

W artykule zaprezentowane zostały nowe metody wspomagające proces analizy systemów dyskretnych opisanych sieciami Petriego. Relacje w prototypowanym systemie dyskretnym są odwzorowane hipergrafem. Dzięki temu projektowany, wbudowany, rekonfigurowany sterownik logiczny może zostać poddany efektywniejszemu procesowi analizy z wykorzystaniem nowych algorytmów, związanych z traktowanymi łącznie teoriami hipergrafów i sieci Petriego. Wykorzystano między innymi takie procedury jak dopełnienie, dualizm, transwersale, transwersale dokładne oraz kolorowanie hipergrafu. W artykule w sposób nieformalny wykorzystano autorskie twierdzenia, wspomagające cały proces projektowania sterowników. Szczególną uwagę zwrócono na nowe sposoby analizy systemów dyskretnych, opisanych sieciami Petriego, takie jak częściowa weryfikacja poprawności specyfikacji sterownika na podstawie struktury hipergrafu współbieżności oraz zastosowanie transwersal dokładnych w procesie wyodrębniania powiązanych ze sobą procesów sekwencyjnych.

Słowa kluczowe: hipergraf, transwersala dokładna, sieć Petriego, system dyskretny.

Application of hypergraphs to analysis of discrete-systems described with Petri Nets

Abstract

In the paper application of the hypergraph theory to analysis of discrete-systems described by means of Petri Nets is proposed. The relations between local states are represented by hypergraph vertices whose edges correspond to the global states. Therefore, the analysis of a prototype system can be performed by more effective operations supported by the hypergraph theory as well as the Petri net theory (such as dualism, hypergraph complement, transversals, exact transversals, hypergraph colouring). In the paper the authors propose application of the concurrency hypergraph to the analysis of a discrete-system. Such a structure refers to the traditional concurrency graph, however it keeps information about global states of the analysed system. Moreover, the concurrency hypergraph has some unique properties, which can lead to reduction in the computational complexity of some algorithms of the analysis. All minimal transversals in the concurrency hypergraph are also exact transversals. Therefore, such a hypergraph can be applied also to the decomposition process of a discrete-system, which is described by a Petri Net. After the analysis, a controller described by a Petri Net can be decomposed into concurrent sub-nets (concurrent automata). Each exact transversal of the concurrency hypergraph refers to the concurrent automata. The proposed solution allows significantly reducing the computational complexity to a polynomial. The traditional methods, based on the coloring of a concurrency graph are exponential time algorithms, thus they are defined to be NP-complete.

Keywords: hypergraph, exact transversal, Petri Net, discrete system.

1. Wprowadzenie

Metody analizy systemów dyskretnych, stosowane przez producentów wiodących firm informatycznych, które opracowują

narzędzia do syntezy układów cyfrowych, często bazują na wykorzystaniu klasycznych grafów niekierowanych [1]. Poziom skomplikowania konfigurowalnych układów cyfrowych wymusza stosowanie coraz bardziej wyrafinowanych metod ich analizy i syntezy oraz pociąga za sobą modyfikację już istniejących algorytmów. Wzrost rozmiarów profesjonalnych mikrosystemów cyfrowych wiąże się z koniecznością znacznego usprawniania sposobów ich implementacji, zwłaszcza w strukturach rekonfigurowanych, takich jak FPGA [2].

Wykorzystanie hipergrafów w procesie analizy i syntezy sterowników logicznych, realizowanych w postaci mikroelektronicznych systemów wbudowanych sprawia, że projektowanie staje się bardziej przejrzyste i efektywniejsze, niż w przypadku stosowania tylko klasycznych grafów nieskierowanych. Hipergrafy pozwalają na intuicyjne uchwycenie w formie jednorodnej, konstruktywnej i zrozumiałej specyfikacji, zarówno stanów globalnych modelowanego systemu, jak i relacji współbieżności między jego stanami lokalnymi. Utrwalenie maksymalnych zbiorów wierzchołków zgodnych (klik) w grafowej strukturze danych pozwala na usprawnienie wielu algorytmów kombinacyjnych, wykorzystywanych w analizie i syntezie współbieżnych układów cyfrowych.

2. Analiza przestrzeni stanów sieci Petriego

Relacje pomiędzy poszczególnymi stanami lokalnymi systemu dyskretnego mogą być opisane krawędziami grafu współbieżności lub dualnego względem niego grafu niewspółbieżności (sekwencyjności) [3, 4, 5, 6, 7]. Tego rodzaju sposób reprezentacji relacji zgodności i niezgodności powoduje jednak utratę informacji, uzyskanej na etapie specyfikacji systemu dyskretnego o jego częściowych lub maksymalnych stanach globalnych.

Metody analizy systemów dyskretnych opisanych sieciami Petriego nadal wykorzystują bogatą teorię grafów nieskierowanych [3, 5, 8]. Badanie podstawowych relacji, między miejscami sieci najczęściej jest wykonywane na podstawie jej grafu znakowań, za pośrednictwem sporządzonych na jego podstawie grafów współbieżności i sekwencyjności. Struktury grafowe są podstawą w klasycznym procesie dekompozycji sieci Petriego na podsieci typu automatowego. Stanowią one również ważny element wspomagający kodowanie stanów lokalnych w procesie syntezy logicznej współbieżnych maszyn stanów[5].

Podążając za rozwojem inżynierii programowania oraz uwzględniając wysokie wymagania jakościowe dotyczące wbudowanych, rekonfigurowanych sterowników logicznych, zdecydowano się na wykorzystanie własnych, nienadmiarowych, spójnych ze sobą, efektywnych procedur grafowych. Wiele metod i algorytmów kombinatorycznych, przeznaczonych do analizy i syntezy współbieżnych maszyn stanów, opisywanych sieciami Petriego, może być usprawnionych poprzez wprowadzenie do nich hipergrafów, w miejsce typowych struktur danych, przedstawianych dotąd grafami nieskierowanymi.

Naturalne własności hipergrafów niosą za sobą zarówno informację dotyczącą rozmiarów i struktury stanów globalnych, jak i o relacji zgodności między parami stanów lokalnych sieci Petriego. Z tego względu niezamierzone usterki strukturalne prototypowanego systemu dyskretnego mogą zostać bardzo szybko wykryte oraz usunięte. Ponadto, zastosowanie hipergrafu w procesie dekompozycji sieci Petriego na automaty współbieżne umożliwia wprowadzenie zupełnie nowych metod i algorytmów, które nie są dostępne w przypadku rozwiązań tradycyjnych, bazujących wyłącznie na klasycznych grafach nieskierowanych.

3. Hipergrafy przestrzeni stanów dyskretnych

Siec Petriego jest dwudzielnym grafem skierowanym o dwóch rodzajach wierzchołków: miejscach i tranzycjach połączonych skierowanymi łukami, co w wygodny sposób pozwala opisywać zjawiska zachodzące współbieżnie. Miejsca przedstawiane są jako okręgi, tranzycje jako pogrubiony odcinek lub prostokąt, natomiast łuki jako krawędzie zakończone strzałkami [9].

Teoria sieci Petriego jest szczególnie przydatna podczas projektowania zaawansowanych konfigurowalnych systemów cyfrowych. Innym obszarem jej praktycznego wykorzystywania są nowe metody wspierające proces programowania nowoczesnych sterowników logicznych PLC.

Przykładowa sieć Petriego, w której pominięto jej interpretację jako sieci sterującej, poprzez usunięcie symboli sygnałów wejściowych i wyjściowych sterownika, została pokazano na rys. 1.

Graf osiągalności (graf znakowań sieci Petriego) obrazuje podstawowe relacje, jakie zachodzą w sieci Petriego. Proces tworzenia grafu znakowań sprowadza się do uchwycenia wszystkich zmian oznakowania sieci (jej stanów globalnych) w momencie odpalania (realizacji) wzbudzonych tranzycji. Wierzchołek grafu znakowań przypisany jest zbiorowi miejsc równocześnie oznakowanych w danym stanie globalnym. Krawędzie skierowane (łuki) odzwierciedlają odpalane tranzycje, przenoszące system dyskretny do następującego po nim, sąsiedniego stanu globalnego. Z tego względu pojedyncze wierzchołki hipergrafu stanów globalnych odpowiadają poszczególnym miejscom sieci Petriego, natomiast każda jego hiperkrawędź zawiera zbiór miejsc oznakowanych w przypisanym jej stanie globalnym. Rysunek 1 przedstawia funkcjonowanie sterownika w formie szkieletowej, nieinterpretowanej sieci sterującej, rozpatrywanej w kategoriach autonomicznego podsystemu dyskretnego, wraz z skojarzonym z nią nieinterpretowanym grafem znakowań. Sterownik może znajdować się w stanach lokalnych $\{P_1, P_2, \dots, P_{10}\}$. Stany globalne sterownika uformowane są ze wzajemnie współbieżnych miejsc: $M_1 = \{P_1\}$, $M_2 = \{P_2, P_3\}$, ..., $M_5 = \{P_4, P_5, P_6, P_7\}$, ..., $M_{10} = \{P_9, P_{10}\}$.

Hipergraf. Pojęcie hipergrafu pojawiło się drugiej w połowie ubiegłego stulecia. W 1973 roku francuski matematyk Claude Berge opublikował monografię p.t. „Grafy i Hipergrafy”, w której sformalizował i ujednolicił podstawowe definicje dotyczące teorii hipergrafów [11]. Formalnie **hipergraf** jest rozszerzeniem pojęcia grafu. Jego krawędzie, zwane hiperkrawędziami [11], mogą być incydentne do dowolnej liczby wierzchołków. Formalnie, hipergraf H definiuje dwójka:

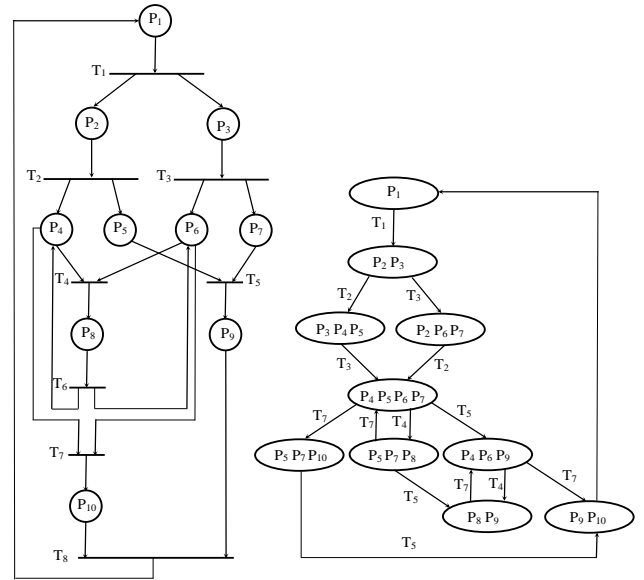
$$H = (V, E) \tag{1}$$

gdzie: $V = \{v_1, \dots, v_n\}$, jest dowolnym, niepustym zbiorem wierzchołków; $E = \{E_1, \dots, E_m\}$, jest zbiorem krawędzi hipergrafu, czyli podzbiorem zbioru $P(V)$ wszystkich możliwych niepustych zbiorów, których elementy należą do V .

Przykładowy hipergraf skojarzony z siecią i grafem znakowań z rys. 1 zamieszczono na rys. 2. Oprócz poglądowej reprezentacji graficznej podano standardową macierz incydencji hipergrafu. Poszczególne krawędzie hipergrafu $E_1 - E_{10}$ odwzorowują stany globalne. Łatwo zauważyć, że hipergraf nie jest spójny i składa się z dwóch części: $\{P_1\}$ oraz $\{P_2 - P_{10}\}$.

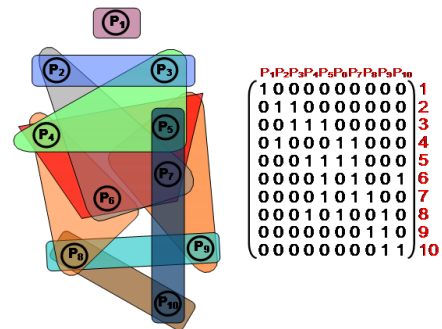
Hipergraf współbieżności jest to hipergraf, otrzymywany bezpośrednio na podstawie grafu znakowań. Wierzchołki w hipergrafie

współbieżności są połączone hiperkrawędzią tylko wtedy, gdy są one oznakowane w tym samym stanie grafu znakowań.



Rys. 1. Przykładowa sieć Petriego PN_1 oraz odpowiadający jej graf znakowań [10]
Fig. 1. Exemplary Petri Net PN_1 and its reachability graph [10]

Hipergraf współbieżności reprezentuje rzeczywistą współbieżność pomiędzy miejscami sieci Petriego. Wierzchołki hipergrafu współbieżności odpowiadają miejscom sieci Petriego (stany lokalne), natomiast krawędzie określają relacje pomiędzy tymi miejscami (stany globalne). Rozpatrywany rysunek 2 przedstawia postać graficzną hipergrafu współbieżności sieci Petriego z rys. 1 oraz powiązaną z nim macierz incydencji.



Rys. 2. Hipergraf współbieżności H_{PN1} dla sieci Petriego PN_1
Fig. 2. Hypergraph H_{PN1} for PetriNet PN_1

Stopień krawędzi E_i hipergrafu określa liczbę wierzchołków należących do krawędzi E_i .

Hiperkrawędzią o największym stopniu, równym 4 jest hiperkrawędź E_5 . Parametr ten wiąże się z pojęciem stopnia współbieżności (równoległości) sieci Petriego. Stopień współbieżności definiuje minimalną liczbę krawędzi hipergrafu niewspółbieżności, pokrywających wszystkie jego wierzchołki.

Transwersalą (pokryciem wierzchołkowym) hipergrafu H jest zbiór $T \subset V$ zawierający wierzchołki incydentne do każdej krawędzi hipergrafu. Minimalna transwersala to taka transwersala, która we właściwy sposób nie zawiera żadnej innej transwersali hipergrafu H [11]:

$$T \cap e_i \neq \emptyset \quad (i = 1, \dots, m) \tag{2}$$

Najmniejszą transwersalą hipergrafu H jest transwersala zawierająca najmniejszą liczbę elementów spośród wszystkich transwersali hipergrafu H .

Transwersalą dokładną hipergrafu H jest zbiór $D \subset V$ wierzchołków hipergrafu, przy czym każda krawędź hipergrafu musi być incydentna z dokładnie jednym wierzchołkiem, wchodzącym w skład transwersali dokładnej.

Hipergraf dokładny to hipergraf, w którym wszystkie minimalne transwersale są jednocześnie transwersalami dokładnymi.

Istnieje wiele metod wyznaczania transwersali hipergrafu. Rozwiązanie można uzyskać poprzez redukcję macierzy incydencji, metodami dokładnymi, heurystycznymi, stochastycznymi, czy też symbolicznymi (np. wnioskowanie naturalne z wykorzystaniem rachunku Gentzena) [1, 11, 12, 13, 14, 15].

Dla rozpatrywanego hipergrafu autorską metodą algebraiczną wyznaczono transwersale dokładne: $D_1 = \{P_1, P_2, P_4, P_8, P_{10}\}$, $D_2 = \{P_1, P_2, P_5, P_9\}$, $D_3 = \{P_1, P_3, P_6, P_8, P_{10}\}$, $D_4 = \{P_1, P_3, P_7, P_9\}$.

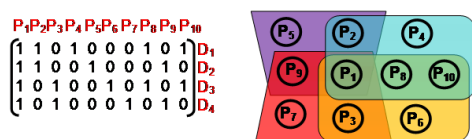
Największymi wyznaczonymi transwersalami dokładnymi są transwersale D_1, D_3 . Najmniejszymi transwersalami są transwersale D_2, D_4 . W rozpatrywanym przykładzie liczba wszystkich wyznaczonych transwersal dokładnych jest równa stopniowi współbieżności rozpatrywanej sieci Petriego. Łatwo stwierdzić, że wyznaczona rodzina transwersal dokładnych pokrywa wszystkie miejsca zadanej sieci.

Znalezienie wszystkich transwersal w dowolnym hipergrafie jest problemem NP-trudnym [11, 12, 13, 16]. **Z kolei określenie wszystkich transwersal dokładnych w hipergrafie dokładnym wiąże się ze złożonością co najwyżej wielomianową**, co udowodniono w [12].

4. Analiza systemów opisanych sieciami Petriego z wykorzystaniem hipergrafów

Klasykne metody analizy oraz dekompozycji systemów dyskretnych bazują na wykorzystaniu tradycyjnych grafów nieskierowanych. Każda krawędź grafu współbieżności określa relacje pomiędzy co najwyżej dwoma miejscami sieci Petriego. Dlatego też po raz pierwszy w literaturze przedmiotu, zaproponowano wprowadzenie pojęcia **hipergrafu współbieżności**, w którym pojedyncze, proste relacje między parami miejsc zgodnych zastąpiono złożoną relacją występującą między wszystkimi miejscami równocześnie zgodnymi. W rozważaniach przyjęto, że sieć jest poprawnie skonstruowana, gdy spełnia postulat Petriego-Holta, stąd musi być pokryta poprawnie oznakowanymi podsieciami automatowymi typu SM (State Machine). Jeżeli każda sieć ma w odpowiedni sposób przypisany kolor, cechujący jej żetony (markery), miejsca oraz tranzycje, to sieć nazywana jest kolorowaną automatowo siecią Petriego [10]. Konsekwencją narzuconych wymagań strukturalnych jest fakt, że musi być ona wówczas pokryta transwersalami dokładnymi. Z jednej strony w każdym stanie globalnym, a więc i w każdej hiperkrawędzi musi występować pewien stan lokalny należący do rozpatrywanej, wyróżnionej odpowiednim kolorem podsieci. Z drugiej strony nie mogą w tej samej pokolorowanej sieci występować miejsca, które są względem siebie współbieżne. Aby wszystkie miejsca w sieci były pokryte, minimalna liczba podsieci nie może być mniejsza niż jej stopień współbieżności. Oszczędna implementacja sieci narzuca, aby w przypadku nadmiaru transwersali dokładnych pokrywających sieć, dokonać ich selekcji. Kolorowanie sieci Petriego wiąże się bezpośrednio z **kolorowaniem hipergrafu współbieżności**.

Pokrycie sieci Petriego podsieciami typu SM przedstawiono w postaci hipergrafu sekwencyjności H_{SPNI} zamieszczonego na rys. 3. Wierzchołki hipergrafu odpowiadają miejscom sieci Petriego, krawędzie zaś ilustrują poszczególne transwersale dokładne.



Rys. 3. Hipergraf sekwencyjności H_{SPNI}
Fig. 3. Sequential hypergraph H_{SPNI}

5. Podsumowanie

W artykule przedstawiono metody analizy systemów dyskretnych opisanych sieciami Petriego. Omówione i uzasadnione zostały zasady, wspomagające proces projektowania, badania poprawności strukturalnej oraz dekompozycji systemu dyskretnego z wykorzystaniem hipergrafów.

Warto zwrócić uwagę na fakt, że procedura sprawdzenia, czy sieć jest poprawnie skonstruowana pod względem strukturalnym nie wymaga wtórnego wyznaczenia wszystkich klik w tradycyjnym grafie współbieżności lub sekwencyjności jej miejsc.



Współautorka – Monika Wiśniewska - jest stypendystką w ramach Poddziałania 8.2.2 "Regionalne Strategie Innowacji", Działania 8.2 "Transfer wiedzy", Priorytetu VIII "Regionalne Kadry Gospodarki" Programu Operacyjnego Kapitał Ludzki współfinansowanego ze środków Europejskiego Funduszu Społecznego Unii Europejskiej i z budżetu państwa.

6. Literatura

- [1] De Micheli G.: Synthesis and Optimization of Digital Circuits. McGrawHill, 1994.
- [2] Łuba T.: Synteza układów cyfrowych. Praca zbiorowa pod redakcją prof. Tadeusza Łuby, WKŁ, Warszawa, 2003.
- [3] Adamski M., Węgrzyn M.: Petri nets mapping into reconfigurable logic controllers. Electronics and Telecommunications Quarterly, 2009, Vol. 55, no 2, s. 157-182.
- [4] Adamski M.: Projektowanie układów cyfrowych systematyczną metodą strukturalną. Wydawnictwo Wyższej Szkoły Inżynierskiej w Zielonej Górze, Zielona Góra, 1990, Monografie 49, ISSN 02397390.
- [5] Adamski M., Karatkevich A., Węgrzyn M. (Red): Design of embedded control systems. New York: Springer, 2005, 267 s.
- [6] Zakrevskij A. D.: Paralel algorithms for logic control. In Russian. Bielorrussian Academy of Science Publisher. Minsk, 1999, ISBN 985-6453-26-7.
- [7] Bilinski K., Adamski M., Saul J. M., Dagless E. L.: Petri Net based algorithms for parallel controller synthesis. IEEE Proceedings, Computers and Digital Techniques. No. 141, 1994, pp. 405-412.
- [8] Karatkevich A.: Dynamic Analysis of Petri Net Based Discrete Systems. LNCIS, vol.356, Springer-Verlag, Berlin 2007.
- [9] David R., Alla H. D. R.: Petri Nets and Grafcet. Tools for modeling discrete event system. London: Prentice Hall, 1992.
- [10] Wiśniewska M.: Zastosowanie dualizmu hipergrafów w dekompozycji równoległej automatów współbieżnych. Przegląd Telekomunikacyjny i Wiadomości Telekomunikacyjne, 2008, nr 6, s. 731—733.
- [11] Berge C.: Graphs and Hypergraph. North-Hols.r Mathematical Library, Amsterdam 1976.
- [12] Eiter T., Gottlob G.: Hypergraph transversal computation and related problems in logic and AI. LNCS, pp. 549—564, Springer, 2002.
- [13] Sapiecha P.: Algorytmy syntezy funkcji i relacji boolowskich w aspekcie metod reprezentacji i kompresji danych. PW, Wydział Elektroniki i Technik Informacyjnych, Warszawa, 1998.
- [14] Tkacz J., Adamski M.: Projektowanie sekwencyjnych układów cyfrowych z wykorzystaniem logiki sekwentów Gentzena, Przegląd Elektrotechniczny, R. 85, nr 7, pp. 196—199, 2009.
- [15] Wiśniewska M.: Redukcja rozmiaru mikroinstrukcji w projektowaniu sterowników mikroprogramowanych, PAK, Nr 8, s. 575-577, 2009.
- [16] Eiter T., Gottlob G., Makino K.: New results on monotone dualization and generating hypergraph transversals. Proc. of the 32th ACM Symp. STOC '02, 14-22, 2002.

otrzymano / received: 13.05.2011

przyjęto do druku / accepted: 04.07.2011

artykuł recenzowany