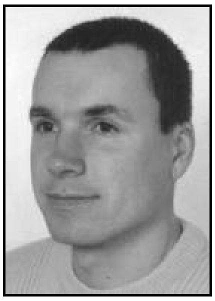
Robert DYLEWSKI
UNIWERSYTET ZIELONOGÓRSKI,
ul. Licealna 9, 65-417 Zielona Góra

Uogólnienie metody rzutowania naprzemiennego

Dr Robert DYLEWSKI

W latach 1995 – 2003 asystent na Wydziale Matematyki, Informatyki i Ekonometrii Uniwersytetu Zielonogórskiego. Doktorat z zakresu metod numerycznych i optymalizacji. Od roku 2003 adiunkt na WMIE UZ. Prowadzone zajęcia: programowanie matematyczne, badania operacyjne, podstawy optymalizacji. Tematyka badań naukowych: optymalizacja wypukła nieróżniczkowalna, metody rzutowe i zastosowania.



e-mail: r.dylewski@wmie.uz.zgora.pl

Streszczenie

W artykule przedstawiono różne modyfikacje metody rzutowania naprzemiennego (alternating projection method), wprowadzonej przez von Neumanna. Metody te służą do wyznaczania punktu x^* ze zbioru A i punktu y^* ze zbioru B takich, że $\|x^*-y^*\|$ jest odległością między zbiorami A i B. Wprowadzono uogólnienie prezentowanych metod projekcyjnych, które gwarantuje zbieżność także w przypadku, gdy przekrój zbiorów A i B jest pusty i odległość między zbiorami jest nieznana. W wielu praktycznych problemach mamy taką sytuację, np. w zagadnieniu tomografii komputerowej i zagadnieniu planowania radioterapii.

Słowa kluczowe: metoda rzutowania naprzemiennego, sterowanie poziomem.

Generalized relaxed alternating projection method

Abstract

In the paper there is presented modification of the von Neumann method of alternating projection (AP-method) $x_{k+1}=P_AP_Bx_k$ where A and B are closed and convex subsets of R^n. The problem of finding $x^*\in A$ and $y^*\in B$ with $\|x^*-y^*\|=\inf_{x\in A,y\in B}\|x-y\|$ if this infimum is attained is dealt with. It is known that in case of $\mathrm{Fix}T\neq\varnothing$ the sequence (x_k) generated by the AP-method converges weakly to a fixed point of the operator of alternating projection $T=P_AP_B$ [1]. If the distance $\delta=\inf_{x\in A,y\in B}\|x-y\|$ is known, one can efficiency apply a modification of the von Neumann method, which has the form $x_{k+1}=P_A(x_k+\lambda_k\sigma_k(Tx_k-x_k))$ for $\lambda_k\in[0,2]$ (relaxation parameter) and $\sigma_k>0$ (step size) depending on x_k (RAP-method – relaxed alternating projection method) [3]. In this paper the authors propose a generalization of the RAP-method (GRAP-method – generalized relaxed alternating projection method), where it is not supposed that the value δ (Section 2) is known. Instead of δ, there is applied its approximation $\widetilde{\delta}_k=\alpha_k\underline{\delta}_k+(1-\alpha_k)\overline{\delta}_k$ for $\alpha_k\in[\underline{\alpha},\overline{\alpha}],0<\underline{\alpha}\le\overline{\alpha}<1$ (with changeable level parameter α_k) which is updated in each iteration (Section 3). The GRAP-method is also a generalization of the modified relaxed alternating projection method (MRAP-method) [6]. In Section 4 there are presented the results of numerical tests for two problems: (P1), where A, B are closed and convex subsets (Table 1) and (P2), where A is a closed and affine subspace, B is a closed and convex subset (Table 2). The preliminary numerical experiments confirm practical applicability of the GRAP-method even in case when the distance δ is unknown. These experiments show the superiority of the GRAP-method with respect to the RAP-method, if δ is unknown.

Keywords: alternating projection method, level control.

1. Wprowadzenie

Niech A i B będą niepustymi, domkniętymi i wypukłymi podzbiorami przestrzeni R^n. W artykule rozważamy problem postaci:

$$\text{znaleźć } x^*\in A \text{ i } y^*\in B \text{ takie, że}$$
$$\|x^*-y^*\|=\inf_{x\in A,y\in B}\|x-y\|. \tag{1}$$

Jeżeli $A\cap B\neq\varnothing$, to problem (1) redukuje się do znalezienia elementu z przekroju $A\cap B$. Para punktów (x^*,y^*) jest rozwiązaniem problem (1) wtedy i tylko wtedy, gdy $x^*=P_Ay^*$ i $y^*=P_Bx^*$ ($P_Bx=\arg\min_{y\in B}\|y-x\|$ oznacza rzut metryczny punktu x na zbiór B, $\|x\|$ oznacza normę wektora x), tzn. x^* jest elementem zbioru punktów stałych operatora P_AP_B i y^* jest elementem zbioru punktów stałych operatora P_BP_A (patrz [1]).

Wiele praktycznych problemów ma postać (1) albo sprowadza się do postaci (1), np. problem dopuszczalności wypukłej, zagadnienie tomografii komputerowej (wyznaczanie przekroju pewnego obiektu), zagadnienie planowania radioterapii z użyciem wiązek o modulowanej intensywności. W pracy [2] zawarto szeroki opis problemów postaci (1) i zastosowań metody AP. Często w praktycznych problemach przekrój zbiorów A i B jest pusty i odległość między zbiorami jest nieznana.

W artykule zajmujemy się modyfikacjami metody rzutowania naprzemiennego (AP-method - alternating projection method) służącymi do wyznaczania rozwiązania problemu (1). Metoda AP jest postaci:

$$\begin{aligned} &x_1\in A-\text{dowolny}\\ &x_{k+1}=P_AP_Bx_k. \end{aligned} \tag{2}$$

Operator $T=P_AP_B$ nazywany jest operatorem rzutowania naprzemiennego (operator of alternating projection). Jeżeli zbiór punktów stałych operatora T jest niepusty $\mathrm{Fix}T\neq\varnothing$ ($\mathrm{Fix}T=\{x:Tx=x\}$), to ciąg (x_k) generowany przez metodę AP zbiega słabo do punktu stałego operatora T (patrz [1]).

W [3] wprowadzono metodę zrelaksowanego rzutowania naprzemiennego (RAP-method - relaxed alternating projection method) postaci:

$$\begin{aligned} &x_1\in A-\text{dowolny}\\ &x_{k+1}=P_A(x_k+\lambda_k\sigma_ks_k), \end{aligned} \tag{3}$$

gdzie: $s_k=P_AP_Bx_k-x_k$, $\lambda_k\in[0,2]$ jest parametrem relaksacyjnym i $\sigma_k>0$ jest długością kroku zależną od x_k. Metoda AP jest szczególnym przypadkiem metody RAP dla $\lambda_k=1$ i $\sigma_k=1$. Inne szczególne przypadki metody RAP były też studiowane wcześniej, np. metoda wprowadzona przez Gurina, Polyaka i Raika [4], w której $\lambda_k=1$, $\sigma_k=\|P_Bx_k-x_k\|^2/\langle P_Bx_k-x_k,s_k\rangle$, przy założeniu, że $A\cap B\neq\varnothing$ ($\langle x,y\rangle$ oznacza iloczyn skalarny wektorów x i y), czy metoda Bauschke i Borweina [5], w której $\lambda_k\in[\varepsilon,2-\varepsilon]$, $\varepsilon>0$, $\sigma_k=1$, też przy założeniu, że $A\cap B\neq\varnothing$.

W pracy [3] rozważa się dwa warianty metody RAP:

(a) RAP1, gdzie zbiory A i B są domknięte i wypukłe, a długość kroku jest postaci:

$$\sigma_k = \frac{\|Tx_k - P_B x_k\|^2 - \widetilde{\delta}_k \|P_B x_k - x_k\| + \langle P_B x_k - x_k, s_k \rangle}{\|s_k\|^2}. \quad (4)$$

(b) RAP2, gdzie zbiór A jest domkniętą podprzestrzenią afiniczną, zbiór B jest domknięty i wypukły, a długość kroku jest postaci:

$$\sigma_k = 1 + \frac{(\|Tx_k - P_B x_k\| - \widetilde{\delta}_k)^2}{\|s_k\|^2}. \quad (5)$$

Dodatkowo, w obydwu wariantach $\lambda_k \in [\varepsilon, 2-\varepsilon]$, $\varepsilon > 0$, parametr $\widetilde{\delta}_k \in [\delta, \overline{\delta}_k]$, gdzie

$$\delta = \inf_{x\in A, y\in B} \|x - y\| \quad (6)$$

jest odległością między zbiorami A i B, a $\overline{\delta}_k = \|Tx_k - P_B x_k\|$.

Ciągi (x_k) generowane przez obydwie metody RAP1 i RAP2 są słabo zbieżne do punktu stałego operatora T, jeśli $\mathrm{Fix}T \neq \varnothing$ (patrz [3, Theorem 15]). Wyniki testów zaprezentowanych w pracy [3] wskazują na dobre zachowanie się metod RAP1 i RAP2 w przypadku, gdy δ jest znane (wtedy można przyjąć $\widetilde{\delta}_k = \delta$). Otrzymano szybszą zbieżność niż dla metody AP. Jednak w przypadku, gdy δ jest nieznane, można tylko przyjąć $\widetilde{\delta}_k = \overline{\delta}_k$. Ponadto, nie ma odpowiedniego kryterium zatrzymania.

2. Uogólnienie metody rzutowania naprzemiennego

W pracy [6] wprowadzono modyfikacje metod RAP1 i RAP2, w których parametr $\widetilde{\delta}_k$ przybliżający nieznaną wartość δ nie musi spełniać warunku $\widetilde{\delta}_k \geq \delta$. W metodach RAP1 i RAP2 dla zagwarantowania zbieżności musiał być spełniony warunek $\widetilde{\delta}_k \in [\delta, \overline{\delta}_k]$.

Rozpatrzmy teraz metody MRAP1 (3, 4) i MRAP2 (3, 5) wprowadzone w [6], w których $\widetilde{\delta}_k$ spełnia warunek:

$$\widetilde{\delta}_k \in [\underline{\delta}_k, \overline{\delta}_k], \quad (7)$$

gdzie $\underline{\delta}_k \in [0, \delta]$ (dolne ograniczenie δ) i $\overline{\delta}_k \in [\delta, \|Tx_k - P_B x_k\|]$ (górne ograniczenie δ). Zakładamy dodatkowo, że $\underline{\delta}_1 \geq 0$ jest znane. Zawsze można przyjąć $\underline{\delta}_1 = 0$ jeśli nie jest znane lepsze dolne ograniczenie wartości δ i $\overline{\delta}_k = \|Tx_k - P_B x_k\|$ jeśli nie jest znane lepsze górne ograniczenie δ.

W metodach MRAP1 i MRAP2 (MRAP-method – modified relaxed alternating projection method) parametr $\widetilde{\delta}_k$ jest wyznaczany w następujący sposób [6]:

$$\widetilde{\delta}_k = \alpha \underline{\delta}_k + (1-\alpha)\overline{\delta}_k, \quad (8)$$

Gdzie $\alpha \in [0,1]$. W równaniu (8) można przyjąć $\overline{\delta}_k = \min\{\|Tx_i - P_B x_i\| : 1 \leq i \leq k\}$. Jeżeli δ jest znane, można przyjąć $\underline{\delta}_k = \delta$ i $\alpha = 1$, w konsekwencji $\widetilde{\delta}_k = \delta$. Jeśli natomiast δ nie jest znane, to trzeba przyjąć $\underline{\delta}_1 = 0$ i $\alpha \in (0,1)$. W obydwu przypadkach otrzymamy $\widetilde{\delta}_k \geq \underline{\delta}_k$. Niestety nie wiadomo, czy $\widetilde{\delta}_k \geq \delta$. W [6, Theorem 6] podano jak wykryć, że $\widetilde{\delta}_k < \delta$ korzystając z górnego ograniczenia R odległości punktu startowego x_1 od zbioru punktów stałych operatora T ($\mathrm{R} \geq \|x_1 - z\|$ dla $z \in \mathrm{Fix}T$). Jeśli wykryje się, że $\widetilde{\delta}_k < \delta$, to przyjmuje się w kolejnej iteracji $\underline{\delta}_{k+1} = \widetilde{\delta}_k$.

Dla $\alpha \in (0,1)$ otrzymujemy zbieżność $\underline{\delta}_k$, $\widetilde{\delta}_k$ i $\overline{\delta}_k$ do δ [6, Theorem 11]. Jeżeli $\alpha = 0$, to $\widetilde{\delta}_k = \overline{\delta}_k$. Jeżeli $\underline{\delta}_1 = \delta$ i $\alpha \in [0,1]$, to $\widetilde{\delta}_k \in [\delta, \|Tx_k - P_B x_k\|]$. W obu przypadkach metody MRAP są równoważne metodom RAP.

Dodatkową korzyścią z wprowadzenia $\underline{\delta}_k$ i $\overline{\delta}_k$ jest dogodne kryterium zatrzymania:

$$\text{jeżeli } \overline{\delta}_k - \underline{\delta}_k \leq \varepsilon, \text{ to } \|T\bar{x}_k - P_B \bar{x}_k\| \leq \delta + \varepsilon, \quad (9)$$

gdzie $\bar{x}_k = \arg\min\{\|Tx_i - P_B x_i\| : 1 \leq i \leq k\}$.

Idea wyznaczania parametru $\widetilde{\delta}_k$ w (8) jest podobna do zaproponowanej w pracy [7] do modyfikacji subgradientowej metody projekcyjnej Polyaka [8] dla problemu minimalizacji wypukłej nieróżniczkowalnej.

W artykule proponujemy uogólnienie metod rzutowania naprzemiennego MRAP1 i MRAP2. Metody te będziemy oznaczać GRAP1 i GRAP2 (GRAP-method – generalized relaxed alternating projection method) odpowiednio dla σ_k określonego wzorem (4) i (5).

Parametr $\widetilde{\delta}_k$ przybliżający δ ma teraz postać:

$$\widetilde{\delta}_k = \alpha_k \underline{\delta}_k + (1-\alpha_k)\overline{\delta}_k, \quad (10)$$

gdzie

$$\alpha_k \in [\underline{\alpha}, \overline{\alpha}], 0 < \underline{\alpha} \leq \overline{\alpha} < 1, \quad (11)$$

Zamiast stałego parametru poziomu α w (8) mamy teraz zmienny parametr poziomu α_k w (10), który może być inny w każdej iteracji. Pomysł wprowadzenia zmiennego parametru poziomu jest podobny do modyfikacji wprowadzonej w pracy [9] w metodach projekcyjnych dla problemów minimalizacji wypukłej nieróżniczkowalnej.

Oczywiście, jeśli w (10) przyjmiemy parametr $\alpha_k = \alpha = const$, to metody GRAP będą równoważne metodom MRAP.

3. Sterowanie poziomem w metodzie GRAP

Przedstawiamy teraz propozycję wyboru parametru α_k spełniającego warunek (11) wykorzystywanego w (10) do wyznaczenia poziomu $\widetilde{\delta}_k$ przybliżającego nieznaną odległość δ między zbiorami A i B w metodzie GRAP. Podobny pomysł był wprowadzony w pracy [10] do przybliżania nieznanej wartości minimalnej funkcji celu w problemach minimalizacji wypukłej nieróżniczkowalnej.

Pomysł polega na tym, aby poziom $\widetilde{\delta}_k$ nie poprawiać po każdym zmniejszeniu $\overline{\delta}_k$, a dopiero po uzyskaniu odpowiedniego spadku.

Wprowadzamy dodatkowy parametr l_k do sprawdzania wystarczającego spadku:

$$l_k = (1-\mu)\,\bar{l}_k + \mu\widetilde{\delta}_k, \quad (12)$$

gdzie $\mu \in [0,1)$, natomiast $\bar{l}_k$ i $\widetilde{\delta}_k$ są aktualizowane w następujący sposób:

a) $\bar{l}_1 = \overline{\delta}_1$,

b) jeżeli $\|Tx_k - P_B x_k\| \leq l_k$, to przyjąć

$$\bar{l}_k = \|Tx_k - P_B x_k\| = \bar{\delta}_k, \tag{13}$$

w przeciwnym przypadku przyjąć $\bar{l}_k = \bar{l}_{k-1}$,

c) przyjąć poziom

$$\tilde{\delta}_k = \alpha \underline{\delta}_k + (1-\alpha)\bar{l}_k, \tag{14}$$

gdzie $\alpha \in (0,1)$.

Pokażemy teraz, że proponowane sterowanie poziomem opisane przez (a, b, c) spełnia warunki (10, 11).

Uwagi:

1) Jeżeli $\mu = 0$, to dla każdego $k \ge 1$ zachodzi $l_k = \bar{l}_k = \bar{\delta}_k$ (z (12) i (13)) i w (14) otrzymujemy $\tilde{\delta}_k = \alpha_k \underline{\delta}_k + (1-\alpha_k)\bar{\delta}_k$, z parametrem $\alpha_k = \alpha = const$ (czyli $\alpha_k \in [\underline{\alpha}, \bar{\alpha}]$ dla $\underline{\alpha} = \bar{\alpha} = \alpha$). Spełnione są więc warunki (10, 11). Zatem dla $\mu = 0$ metoda GRAP1 jest równoważna metodzie MRAP1 i metoda GRAP2 jest równoważna RAP2.

2) Jeżeli $\mu \in (0,1)$ i w k-tej iteracji $\|Tx_k - P_B x_k\| \le l_k$ w (b), to $\bar{l}_k = \|Tx_k - P_B x_k\| = \bar{\delta}_k$ i w (14) mamy $\tilde{\delta}_k = \alpha_k \underline{\delta}_k + (1-\alpha_k)\bar{\delta}_k$. Podobnie jak w uwadze 1) spełnione są warunki (10, 11) z $\alpha_k = \alpha$ ($\alpha_k \in [\underline{\alpha}, \bar{\alpha}]$ dla $\underline{\alpha} = \bar{\alpha} = \alpha$).

3) Jeżeli $\mu \in (0,1)$ i w k-tej iteracji $\|Tx_k - P_B x_k\| > l_k$ w (b), to $\bar{l}_k = \bar{l}_{k-1} \ge \bar{\delta}_k$ i w konsekwencji w (14) mamy $\tilde{\delta}_k = \tilde{\delta}_{k-1}$. Niech α_k będzie teraz określone w następujący sposób:

$$\alpha_k = (\bar{\delta}_k - \tilde{\delta}_{k-1})/(\bar{\delta}_k - \underline{\delta}_k). \tag{15}$$

Przyjmując w (10) parametr α_k określony przez (15) otrzymujemy także $\tilde{\delta}_k = \tilde{\delta}_{k-1}$. Zatem poziom zdefiniowany w (14), gdzie $\alpha = (\bar{l}_k - \tilde{\delta}_{k-1})/(\bar{l}_k - \underline{\delta}_k)$ jest równy poziomowi zdefiniowanemu w (10) z α_k określonym przez (15). Trzeba jeszcze pokazać, że α_k określone przez (15) spełnia warunek (11). Ponieważ $\bar{l}_k \ge \bar{\delta}_k$, więc $\alpha_k \le \alpha$. Ponadto, ponieważ $\bar{\delta}_k > l_k$, $\bar{l}_k - \underline{\delta}_k = (\bar{l}_k - \tilde{\delta}_k)/\alpha$ i $l_k - \tilde{\delta}_k = (1-\mu)(\bar{l}_k - \tilde{\delta}_k)$, więc $\alpha_k > (l_k - \tilde{\delta}_k)/(\bar{l}_k - \underline{\delta}_k) = (1-\mu)\alpha$. Zatem $\alpha_k \in [\underline{\alpha}, \bar{\alpha}]$, dla $\underline{\alpha} = (1-\mu)\alpha$, $\bar{\alpha} = \alpha$.

4. Testy numeryczne

W punkcie tym przedstawiamy wyniki testów numerycznych dla problemu (1). Rozważamy następujące problemy testowe:

(P1) $n = 2$, $A = B(z_1, 1)$, $B = B(z_2, 1)$, gdzie $B(z, r)$ oznacza kulę o środku z i promieniu r. Dla $d = \|z_1 - z_2\|$ mamy $\delta = \max\{0, d-2\}$. Przekrój $A \cap B \ne \varnothing$ wtedy i tylko wtedy, gdy $d \le 2$. Dla uproszczenia przyjmujemy $z_1 = (0, d)$ i $z_2 = (0, 0)$. Dodatkowo przyjmujemy $x_1 = (1, d) \in A$. W konsekwencji odległość $d(x_1, \mathrm{Fix}\, T) \le \sqrt{2}$.

(P2) $n = 2$, A jest hiperpłaszczyzną i $B = B(z, 1)$ jest kulą. Dla $d = \inf\{\|z - p\| : p \in A\}$ mamy $\delta = \max\{0, d-1\}$. Przekrój $A \cap B \ne \varnothing$ wtedy i tylko wtedy, gdy $d \le 1$. Dla uproszczenia przyjmujemy $A = \{(\xi_1, \xi_2) \in R^2 : \xi_2 = d\}$ i $z = (0, 0)$. Dodatkowo przyjmujemy $x_1 = (3, d) \in A$. W konsekwencji odległość $d(x_1, \mathrm{Fix}\, T) \le 3$.

Prezentujemy wyniki testów numerycznych dla następujących metod:

- GRAP1 – uogólniona metoda rzutowania naprzemiennego, z długością kroku (4);
- GRAP2 – uogólniona metoda rzutowania naprzemiennego, z długością kroku (5).

Metody zostały zaprogramowane w Matlabie 6.1. W prezentowanych testach przyjęto parametr relaksacyjny $\lambda_k = 1$. W obydwu tabelach k oznacza liczbę iteracji, po której program zatrzymuje się, przy zastosowaniu kryterium zatrzymania postaci $\bar{\delta}_k - \underline{\delta}_k \le \varepsilon$, dla bezwzględnej tolerancji optymalności ε. Po spełnieniu takiego kryterium zatrzymania, dla punktu $\bar{x}_k = \arg\min\{\|Tx_i - P_B x_i\| : 1 \le i \le k\}$ mamy $\|T\bar{x}_k - P_B \bar{x}_k\| \le \delta + \varepsilon$ zatem $\bar{x}_k$ jest rozwiązaniem ε-optymalnym dla problemu (1). W prezentowanych wynikach przez R oznaczamy przyjęte górne ograniczenie odległości punktu startowego od zbioru rozwiązań ($R \ge \|x_1 - z\|$ dla $z \in \mathrm{Fix}T$).

W tabeli 1 przedstawiamy wyniki testów numerycznych dla problemu testowego P1 przy różnych wartości d i metody GRAP1 z parametrem $\mu = 0$ i $\mu = 0.3$, natomiast w tabeli 2 dla problemu testowego P2 i metody GRAP2.

Tab. 1. Wyniki testów dla problemu P1
Tab. 1. Results of tests for problem P1

D	$\alpha \to$	1.0	0.9	0.5	0.0
	$\mu \to$	0	0 0.3	0 0.3	0
	ε	k	k	k	k
3.0	10^{-1}	-	23 21	5 4	-
	10^{-2}	-	45 42	8 7	-
	10^{-3}	-	67 64	11 10	-
	10^{-4}	-	89 86	15 14	-
2.01	10^{-1}	-	2 2	3 3	-
	10^{-2}	-	67 46	87 37	-
	10^{-3}	-	148 64	100 45	-
	10^{-4}	-	363 106	141 70	-
2.0	10^{-1}	2	2	2	4
	10^{-2}	4	4	6	49
	10^{-3}	5	6	10	499
	10^{-4}	7	8	14	4999
1.99	10^{-1}	2	2	2	3
	10^{-2}	4	4	6	33
	10^{-3}	5	5	9	118
	10^{-4}	5	6	12	228
1.9	10^{-1}	2	2	2	2
	10^{-2}	3	3	4	9
	10^{-3}	3	4	7	20
	10^{-4}	4	5	9	30

Przypomnijmy, że dla $\mu = 0$ otrzymujemy poziom $\tilde{\delta}_k = \alpha_k \underline{\delta}_k + (1-\alpha_k)\bar{\delta}_k$ gdzie $\alpha_k = \alpha = const$ dla każdego $k \ge 1$, a poprawa $\bar{l}_k$ jest wykonywana od razu ($\bar{l}_k = \bar{\delta}_k$), gdy $\|Tx_k - P_B x_k\| \le \bar{\delta}_k$ (patrz uwaga 1)) i metoda GRAP1 jest równoważna metodzie MRAP1 (a metoda GRAP2 jest równoważna metodzie MRAP2). Natomiast dla $\mu = 0.3$, jeżeli w k-tej iteracji $\|Tx_k - P_B x_k\| > l_k$, to $\alpha_k \le \alpha$, $\tilde{\delta}_k = \tilde{\delta}_{k-1}$, a $\bar{l}_k = \bar{l}_{k-1} \ge \bar{\delta}_k$ (patrz uwaga 3)). Zakładamy, że δ jest nieznane, czyli przyjmujemy $\underline{\delta}_1 = 0$ i $\alpha \in (0,1)$. Przypomnijmy, że jeśli $d > 2$ w problemie P1 (albo $d > 1$ w problemie P2), to $A \cap B = \varnothing$ i $\delta > 0$. Natomiast, jeśli $d \le 2$ w P1 (albo $d \le 1$ w P2), to $A \cap B \ne \varnothing$ i $\delta = 0$. W tym przypadku możemy dodatkowo sprawdzić zachowanie metody dla $\alpha = 0$ (przy $\mu = 0$ mamy $\tilde{\delta}_k = \bar{\delta}_k$ i metoda GRAP1 jest równoważna metodzie RAP1, a GRAP2 – RAP2) i $\alpha = 1$ (przy $\mu = 0$ mamy $\tilde{\delta}_k = \delta = 0$).

Tab. 2. Wyniki testów dla problemu P2
Tab. 2. Results of tests for problem P2

d	$\alpha \rightarrow$ / $\mu \rightarrow$ / ε	1.0	0.9	0.5	0.0
	$\mu \rightarrow$	0	0 0.3	0 0.3	0
	ε	k	k	k	k
2.0	10^{-1}	-	23 23	22 24	-
	10^{-2}	-	45 45	40 33	-
	10^{-3}	-	67 64	183 54	-
	10^{-4}	-	105 100	505 128	-
1.01	10^{-1}	-	3 3	4 4	-
	10^{-2}	-	14 56	168 170	-
	10^{-3}	-	288 256	302 209	-
	10^{-4}	-	2193 1595	690 620	-
1.0	10^{-1}	3	3	4	6
	10^{-2}	5	5	11	51
	10^{-3}	6	8	20	501
	10^{-4}	8	10	28	5001
0.99	10^{-1}	3	3	4	5
	10^{-2}	4	5	11	35
	10^{-3}	6	7	18	120
	10^{-4}	6	8	26	230
0.9	10^{-1}	3	3	3	4
	10^{-2}	4	4	8	12
	10^{-3}	4	6	12	23
	10^{-4}	5	7	17	33

Możemy zaobserwować, dla problemów testowych P1 i P2, poprawę wyników dla $\mu = 0.3 > 0$ w porównaniu z $\mu = 0$. W większości przypadków uzyskujemy mniejszą liczbę iteracji k potrzebną do spełnienia kryterium zatrzymania.

Dla metody AP nie możemy zastosować kryterium zatrzymania (9), możemy jedynie sprawdzić jak zachowuje się odległość $d(x_k, \operatorname{Fix} T)$ w zależności od k. Dla problemu P1 z $d = 2$ otrzymujemy, po $k = 45$ iteracjach, metodą MRAP1 odległość $d(x_k, \operatorname{Fix} T) \leq 10^{-6}$, natomiast metodą AP odległość $d(x_k, \operatorname{Fix} T) \approx 10^{-1}$ [6, Fig. 1(a)]. Podobne wyniki otrzymujemy dla problemu P2 z $d = 1$.

5. Podsumowania

W artykule wprowadzono pewne uogólnienie metod rzutowania naprzemiennego, metodę GRAP, w której wykorzystuje się parametr $\tilde{\delta}_k$ (ze zmiennym parametrem poziomu) przybliżający najczęściej nieznaną odległość $\delta = \inf_{x \in A, y \in B} \|x - y\|$ między zbiorami A i B. Metody MRAP i RAP są szczególnymi przypadkami metody GRAP. Wprowadzona metoda pozwala na poprawę szybkości zbieżności w stosunku do wcześniejszych metod. Metody GRAP i MRAP mogą być łatwo zaimplementowane i praktycznie zastosowane też w przypadku, gdy δ nie jest znane. Mogą być więc stosowane do rozwiązywania problemów, np. w zagadnieniu tomografii komputerowej i zagadnieniu planowania radioterapii.

6. Literatura

[1] Bauschke H.H., Borwein J.: Dykstra's alternating projection algorithm for two sets, J. Approx. Theory, 79, ss. 418-443, 1994.

[2] Deutsch F.: The method of alternating orthogonal projections, Approximation Theory, Spline Functions and Applications, Kluwer Academic Publ., The Netherlands, 105-121, 1992.

[3] Cegielski A., Suchocka A.: Relaxed alternating projection methods, SIAM J. Optimization., 19, ss. 1093-1106, 2008.

[4] Gurin L.G., Polyak B.T., Raik E.V.: The method of projection for finding the common point in convex sets, USSR Comput. Math. Phys., 7, ss. 1-24, 1967.

[5] Bauschke H.H., Borwein J.: On projection algorithms for solving convex feasibility problems, SIAM Rev., 38, ss. 367-426, 1996.

[6] Cegielski A., Dylewski R.: Variable target value relaxed alternating projection method, Comput. Optim. Appl., 47, ss. 455-476, 2010.

[7] Kim S., Ahn H., Cho S.C.: Variable target value subgradient method, Mathematical Programming, 49, ss. 359-369, 1991.

[8] Polyak B.T.: Minimization of unsmooth functionals, Zh. Vychisl. Mat. Mat. Fiz., 9, ss. 509-521, 1969.

[9] Dylewski R.: Projection method with level control in convex minimization, Discussiones Mathematicae. Differential Inclusions, Control and Optimization, 30, ss. 101-120, 2010.

[10] Dylewski R.: Sterowanie poziomem w metodach projekcyjnych dla problemów minimalizacji wypuklej nieróżniczkowalnej, Przegląd Elektrotechniczny, 86 (9), ss. 141-144, 2010.

otrzymano / received: 13.03.2011
przyjęto do druku / accepted: 04.05.2011 *artykuł recenzowany*