

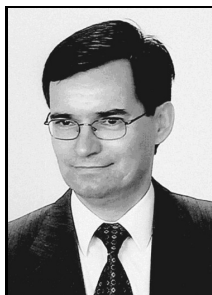
**Paweł FOTOWICZ**

GŁÓWNY URZĄD MIAR  
ul. Elekoralna 2, 00-139 Warszawa

## Wykorzystanie rozkładu płasko-normalnego przy obliczaniu niepewności pomiaru

Dr inż. Paweł FOTOWICZ

Absolwent Politechniki Warszawskiej. Studia ukończył na Wydziale Mechaniki Precyzyjnej w 1981 roku. Do 1999 roku pracował w Instytucie Metrologii i Systemów Pomiarowych PW, specjalizując się w problematyce laserowych technik pomiarowych, będąc autorem sześciu patentów. Od 1999 roku pracuje w Głównym Urzędzie Miar, zajmując się w zagadnieniami teoretycznymi metrologii, związanymi z opracowaniem wyniku pomiaru, terminologią i niepewnością pomiaru. Jest autorem ponad stu publikacji.



e-mail: [uncert@gum.gov.pl](mailto:uncert@gum.gov.pl)

### Streszczenie

Przedstawiono metody obliczania niepewności pomiaru w oparciu o rozkład płasko-normalny. Rozkład ten jest splotem rozkładu prostokątnego z normalnym. Metody opracowano w dwóch postaciach: analitycznej i numerycznej. Można je wykorzystać do obliczania niepewności pomiaru, gdy model pomiaru jest liniowy lub linearyzowany oraz gdy wielkościami wejściowymi można przypisać rozkład Studenta, normalny, prostokątny lub trójkątny. Przedstawiono ocenę dokładności proponowanych metod i zilustrowano je praktycznym przykładem obliczeniowym.

**Słowa kluczowe:** niepewność pomiaru, rozkłady prawdopodobieństwa, metody obliczeniowe.

### Use of the Flatten-Gaussian distribution for calculating the measurement uncertainty

#### Abstract

The paper presents methods using the Flatten-Gaussian distribution for calculating the measurement uncertainty. The Flatten-Gaussian distribution is a convolution of rectangular and normal distributions. The methods were worked out in the analytical and the numerical form. They can be used when the measurand model is a linear or linearized mathematical function, and the model input quantities are characterized by Student's, normal, rectangular, triangular and trapezoidal distributions. The proposed methods enable calculation of the measurement uncertainty with the accuracy close to that of the Monte Carlo method recommended in [2]. The analytical method is based on formula (6) including the quantile of the Flatten-Gaussian distribution, whereas the numerical method is based on sampling from this distribution as a random number generator given by formula (8). This random number generator can be created from two random number generators based on drawing from the rectangular and normal distribution. It immediately provides the set of possible values for the measurand. The methods can be easily implemented in common computational tools, such as a spreadsheet. They do not require the specialized software. The paper presents an example of a practical use of the proposed methods.

**Keywords:** measurement uncertainty, probability distributions, calculation methods.

### 1. Wstęp

We współczesnej metrologii zmienia się podejście dotyczące obliczania niepewności pomiaru. Tradycyjna koncepcja polegająca na zastosowaniu przy jej obliczeniach prawa propagacji niepewności [1] zastępowana jest metodą propagacji rozkładów [2]. W postępowaniu tym miarą niepewności staje się przedział rozszerzenia. Pojęcie przedziału rozszerzenia do krajowej praktyki metrologicznej wprowadza norma [3]. Pojęcie to jest tłumaczeniem terminu międzynarodowego *coverage interval* [4] i wprowadzono je aby odróżnić od znanego w statystyce pojęcia *confidence interval* (przedział ufności). W ten sposób odróżniono podejście "probabilistyczne" od "statystycznego". Czym się one różnią?

Różnica polega na tym, iż w podejściu "statystycznym" parametry zmiennych losowych są również zmiennymi losowymi, a w podejściu "probabilistycznym" te same parametry są liczbami stałymi. Takie podejście również otwiera drogę do zastosowania metod numerycznych opracowania danych pomiarowych, jak chociażby metoda Monte Carlo.

### 2. Przedział rozszerzenia

Przedział rozszerzenia definiowany jest jako najmniejszy przedział pomiędzy dwoma kwantylami rozkładu prawdopodobieństwa dla wielkości mierzonej  $y$ , które wyznaczają określone prawdopodobieństwo, na ogół 95%. W przypadku symetrycznego rozkładu będzie to zawsze tylko jeden przedział, symetryczny wokół wartości oczekiwanej:

$$I(y) = [y_{\text{low}}, y_{\text{high}}], \quad (1)$$

gdzie  $y_{\text{low}} = G^{-1}(\alpha)$  i  $y_{\text{high}} = G^{-1}(\alpha+p)$ .  $G^{-1}(\alpha)$  jest kwantylem rzędu  $\alpha$ , a  $G^{-1}(\alpha+p)$  kwantylem rzędu  $\alpha+p$  rozkładu opisanego dystrybuantą  $G(\eta)$ . Przyjmuje się, że  $\alpha = 2,5\%$ , a  $p = 95\%$ . W odniesieniu do klasycznie zapisywanej niepewności rozszerzonej  $U$  przedział rozszerzenia można zdefiniować jako:

$$I(y) = [y - U, y + U]. \quad (2)$$

Przy czym spełnione jest równanie:

$$\int_{y-U}^{y+U} g(\eta) d\eta = p, \quad (3)$$

gdzie  $g(\eta)$  jest funkcją gęstości prawdopodobieństwa rozkładu związanego z wielkością mierzona,  $y$  jej estymatą, a  $p$  prawdopodobieństwem rozszerzenia.

Przedział rozszerzenia wyznacza się obliczając wartości funkcji  $G^{-1}(\alpha)$  oraz  $G^{-1}(1-\alpha)$ . Przyjęcie  $\alpha = 0,025$  daje przedział określony przez kwantyle: 0,025 i 0,975, który jest probabilistycznie symetryczny. Dla symetrycznej funkcji gęstości  $g(\eta)$  najkrótszym przedziałem  $I(y)$  jest przedział dla którego  $\alpha = (1-p)/2$ .

Rozkład dla wielkości wyjściowej obliczany jest metodą propagacji rozkładów wejściowych na podstawie modelu matematycznego wielkości mierzonej lub równania pomiaru. Powstaje jednak pytanie, czy można byłoby antycypować rozkład wyjściowy na podstawie rozkładów wejściowych, gdy równanie pomiaru jest liniowe. Otóż okazuje się, że istnieje taki rozkład prawdopodobieństwa, który z zadowalającą dokładnością aproksymuje złożenie wielu rozkładów dla wielkości wejściowych, takich jak rozkład normalny czy prostokątny. Rozkładem tym jest rozkład płasko-normalny.

### 3. Rozkład płasko-normalny

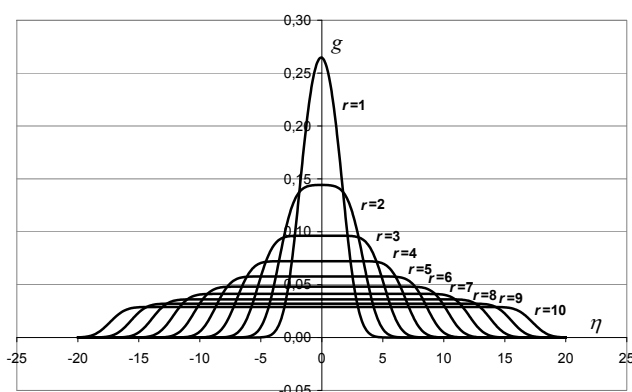
Rozkład płasko-normalny nie ma przyjętej nazwy w literaturze krajowej, choć w publikacjach międzynarodowych można spotkać się z nazwą „Flatten-Gaussian distribution” [5]. Z opisem tego rozkładu możemy się spotkać w książce [6]. Nazwa ta dobrze oddaje charakter funkcji gęstości prawdopodobieństwa tego rozkładu, ponieważ w sąsiedztwie wartości oczekiwanej może cechować się płaskim przebiegiem (rys. 1). Rozkład taki możemy uzyskać splatając rozkład prostokątny z rozkładem normalnym.

Najdogodniej parametryzować go przy użyciu ilorazu odchyłeń standardowych  $\sigma_P$  i  $\sigma_N$  tworzących go rozkładów prostokątnego i normalnego:

$$r = \frac{\sigma_P}{\sigma_N} \quad (4)$$

Wówczas funkcja gęstości prawdopodobieństwa rozkładu opisana jest zależnością:

$$g(\eta) = \frac{1}{2\sqrt{6\pi} \cdot r} \int_{\eta-\sqrt{3} \cdot r}^{\eta+\sqrt{3} \cdot r} \exp\left[-\frac{\xi^2}{2}\right] d\xi = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{F(\eta + \sqrt{3} \cdot r) - F(\eta - \sqrt{3} \cdot r)}{2\sqrt{3} \cdot r} \quad (5)$$



Rys. 1. Funkcje gęstości rozkładu płasko-normalnego dla różnych wartości parametru  $r$

Fig. 1. Probability density functions of the Flatten-Gaussian distribution for different values of parameter  $r$

Przedstawiony rozkład prawdopodobieństwa został wykorzystany przy opracowaniu przybliżonych metod obliczania niepewności pomiaru, definiowanej w oparciu o przedział rozszerzenia. Metody mają zastosowanie, gdy model matematyczny wielkości mierzonej jest liniowy lub linearyzowany. Ze względu na sposób obliczania niepewności pomiaru tymi metodami sklasyfikowano je jako metodę analityczną i metodę numeryczną. Metoda analityczna opiera się na obliczaniach niepewności z wykorzystaniem kwantyla rozkładu płasko-normalnego, a metoda numeryczna opiera się na obliczeniach z udziałem generatora liczb losowych dla tego rozkładu.

#### 4. Przybliżona metoda analityczna

Przybliżona metoda analityczna polega na obliczaniu niepewności rozszerzonej przy użyciu następującego wzoru [7-14]:

$$U = k_{PN} \sqrt{\sum_{i=1}^N \left( \frac{t(v)}{k_N} u_i(y) \right)^2}, \quad (6)$$

gdzie:  $k_{PN}$  to kwantyl rozkładu płasko-normalnego,  $t(v)$  to kwantyl rozkładu  $t$ -Studenta z liczbą stopni swobody  $v$ ,  $k_N$  to kwantyl rozkładu normalnego, a  $u_i(y)$  to udział niepewności wielkości wyjściowej.

Najistotniejsze w metodzie jest wyznaczenie wartości kwantyla  $k_{PN}$ . Jego wartość związana jest z udziałem niepewności wielkości wejściowych. Bierze się pod uwagę największy udział niepewności wielkości o rozkładzie prostokątnym, dla którego oblicza się iloraz niepewności:

$$r_u = \frac{|u_i(y)|}{\sqrt{u_c^2(y) - u_i^2(y)}}, \quad (7)$$

gdzie  $u_c(y)$  to złożona niepewność standardowa. Iloraz niepewności jest najlepszym przybliżeniem parametru  $r$  rozkładu płasko-normalnego ( $r = r_u$ ) i dla niego wyznacza się odpowiednią wartość kwantyla  $k_{PN}$ . Tabela 1 przedstawia wartości kwantyla dla prawdopodobieństwa 95%.

Tab. 1. Wartości kwantyla rozkładu płasko-normalnego dla  $p = 95\%$

Tab. 1. Quantile values of the Flatten-Gaussian distribution for  $p = 95\%$

$r$	$k_{PN}$	$r$	$k_{PN}$	$r$	$k_{PN}$
0	1,9600	3	1,7438	7	1,6634
0,1	1,9600	3,2	1,7347	7,2	1,6620
0,2	1,9598	3,4	1,7266	7,4	1,6608
0,3	1,9593	3,6	1,7193	7,6	1,6596
0,4	1,9580	3,8	1,7128	7,8	1,6585
0,5	1,9553	4	1,7070	8	1,6576
0,6	1,9510	4,2	1,7017	8,2	1,6566
0,7	1,9449	4,4	1,6970	8,4	1,6558
0,8	1,9371	4,6	1,6928	8,6	1,6550
0,9	1,9278	4,8	1,6889	8,8	1,6543
1	1,9174	5	1,6854	9	1,6536
1,2	1,8948	5,2	1,6822	9,2	1,6529
1,4	1,8716	5,4	1,6793	9,4	1,6523
1,6	1,8493	5,6	1,6767	9,6	1,6518
1,8	1,8288	5,8	1,6742	9,8	1,6513
2	1,8102	6	1,6720	10	1,6508
2,2	1,7936	6,2	1,6700	20	1,6443
2,4	1,7788	6,4	1,6681	50	1,6451
2,6	1,7657	6,6	1,6664	100	1,6454
2,8	1,7541	6,8	1,6648	$\infty$	1,6454

#### 5. Przybliżona metoda numeryczna

Przybliżona metoda numeryczna polega na wykorzystaniu do obliczania niepewności rozszerzonej generatora liczb losowych o rozkładzie płasko-normalnym (P\*N). Prostym generatorem standaryzowanego rozkładu P\*N (0, 1) może być równanie:

$$y = \frac{r z_P + z_N}{\sqrt{r^2 + 1}}, \quad (8)$$

gdzie  $z_P$  i  $z_N$  to zmienne losowe o rozkładach standaryzowanych, odpowiednio prostokątnym P (0, 1) i normalnym N (0, 1).

Aby obliczyć przedział rozszerzenia należy wyznaczyć zbiór wartości dla wielkości wyjściowej na podstawie równania:

$$y = u_i(y) z_P + \sqrt{\sum_{j=1, j \neq i}^N \left( \frac{t(v)}{k_N} u_j(y) \right)^2} z_N, \quad (9)$$

gdzie  $u_i(y)$  to największy udział niepewności o rozkładzie prostokątnym, a  $u_j(y)$  to pozostałe udziały niepewności.

Sortując zbiór możliwych wartości dla wielkości wyjściowej  $y$ , od najmniejszej do największej, można wyznaczyć długość przedziału rozszerzenia:

$$I(y) = y_{\text{high}} - y_{\text{low}} \quad (10)$$

Granice przedziału rozszerzenia wyznaczają wartości funkcji:

$$y_{\text{high}} = G^{-1}\left(\frac{1+p}{2}\right), \quad (11)$$

$$y_{\text{low}} = G^{-1}\left(\frac{1-p}{2}\right). \quad (12)$$

Na tej podstawie można wyznaczyć niepewność rozszerzoną dla określonego prawdopodobieństwa rozszerzenia:

$$U = \frac{y_{\text{high}} - y_{\text{low}}}{2}, \quad (13)$$

jako połowę długości przedziału rozszerzenia.

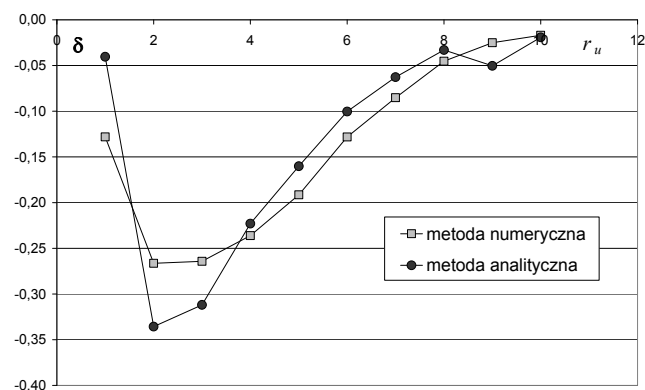
## 6. Ocena dokładności metod

Ocenę dokładności metod przeprowadzono porównując wartości niepewności rozszerzonej otrzymane powyższymi metodami z wartościami uzyskanymi przy zastosowaniu programu obliczeniowego do realizacji wielokrotnego splotu matematycznego metodą szybkiej transformaty Fouriera [15]. Błąd metody zdefiniowano jako:

$$\delta = \frac{U - U_{\text{splot}}}{U_{\text{splot}}}, \quad (14)$$

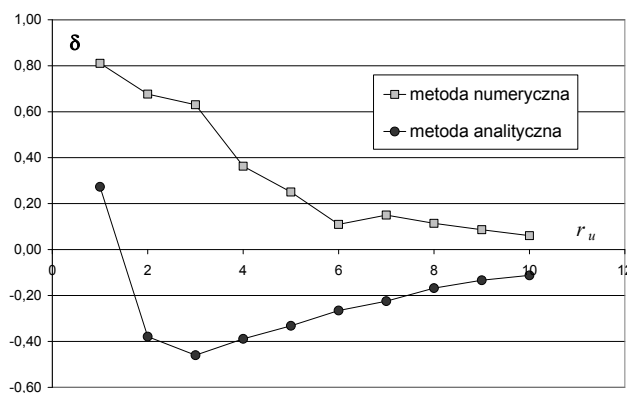
gdzie  $U$  to niepewność rozszerzona obliczona odpowiednio metodą analityczną lub numeryczną, a  $U_{\text{splot}}$  to niepewność rozszerzona obliczona metodą wielokrotnego splotu rozkładów wielkości wejściowych.

Rozważano addytywny model pomiaru z czterema wielkościami wejściowymi. Wyniki obliczeń w funkcji ilorazu udziału (7) przedstawiono na rys. 2 i 3. Rys. 2 pokazuje wykres błęd (14) metody analitycznej i numerycznej w odniesieniu do splotu czterech rozkładów prostokątnych, a rys. 3 w odniesieniu do splotu rozkładu prostokątnego, trójkątnego, normalnego i Studenta z liczbą stopni swobody  $\nu = 5$ . W przypadku metody numerycznej, na podstawie zależności (9), generowano milion wartości dla wielkości wyjściowej. Dla obu metod błąd, dla  $p = 95\%$ , w odniesieniu do splotu samych rozkładów prostokątnych nie przekraczał 0,5%, a w odniesieniu do splotu rozkładów mieszanych nie przekraczał 1%. Można stąd wnosić, że obliczenia niepewności rozszerzonej, wykonywane obiema metodami, powinny zapewnić wiarygodność drugiej cyfry znaczącej przy jej wyrażaniu. Potwierdza to również przykład obliczeniowy, dotyczący opracowania wyniku pomiaru przy wzorcowaniu, przedstawiony poniżej.



Rys. 2. Błąd metod obliczeniowych w odniesieniu do splotu rozkładów prostokątnych

Fig. 2. Method error with reference to convolution of rectangular distributions



Rys. 3. Błąd metod obliczeniowych w odniesieniu do splotu rozkładu prostokątnego, trójkątnego, normalnego i Studenta ( $\nu=5$ )

Fig. 3. Method error with reference to convolution of rectangular, triangular, normal and Student's ( $\nu=5$ ) distributions

## 7. Przykład obliczeniowy

Jako przykład obliczeniowy można przedstawić opracowanie wyniku wzorcowania mikrometru przy użyciu płytki wzorcowej. Równanie pomiaru, w postaci błędu wskazania mikrometru, ma postać:

$$e = l + \delta l - l_w - \delta l_t, \quad (15)$$

gdzie:  $l$  – długość płytki zmierzona mikrometrem,  $\delta l$  – rozdzielczość pomiaru mikrometrem,  $l_w$  – długość płytki wzorcowej,  $\delta l_t$  – poprawka temperaturowa.

W równaniu występują cztery wielkości wejściowe.

1) Długość płytki zmierzona mikrometrem –  $l$ .

Wykonano pięć pomiarów różnicowych długości płytki wzorcowej, za każdym razem zerując wskazanie mikrometru, których wyniki zestawiono w tabeli 2. Estymatą wielkości jest średnia serii  $n = 5$  obserwacji, a miarą niepewności standardowej jest odchylenie standardowe eksperymentalne tej średniej:

$$u(l) = s(\bar{l}) = \frac{s(l)}{\sqrt{5}} = 0,32 \mu\text{m}. \quad (16)$$

Tab. 2. Dane pomiarowe przy wzorcowaniu mikrometru  
Tab. 2. Measurement data for micrometer calibration

obserwacje $l$	20,001 mm 20,002 mm 20,001 mm 20,000 mm 20,001 mm
$\bar{l}$	20,001 mm
$s(l)$	0,71 $\mu\text{m}$

2) Rozdzielczość pomiaru mikrometrem –  $\delta l$ .

Należy uwzględnić jednocześnie rozdzielczość ustawienia zera mikrometru i odczytu na płytce wzorcowej, która wynosi 1  $\mu\text{m}$ . W przypadku pomiaru różnicowego sumaryczna rozdzielczość opisana jest rozkładem trójkątnym powstającym ze złożenia dwóch rozkładów prostokątnych, w punkcie zerowania i na wzorcu. Niepewność standardowa wynosi:

$$u(\delta l) = \frac{1}{\sqrt{6}} \mu\text{m} = 0,41 \mu\text{m}. \quad (17)$$

3) Długość płytki wzorcowej –  $l_w$ .

W świadectwie wzorcowania płytki wzorcowej podano, że długość jej wynosi:  $l_w = 20,0002$  mm, która została wyznaczona z niepewnością rozszerzoną  $U = 0,1$   $\mu\text{m}$  przy współczynniku rozszerzenia  $k = 2$  dla poziomu ufności 95%. Niepewność standardowa wynosi:

$$u(l_w) = \frac{0,1}{2} \mu\text{m} = 0,05 \mu\text{m}. \quad (18)$$

4) Poprawka temperaturowa –  $\delta l_t$ .

W trakcie pomiaru temperatura mogła zmienić się w granicach:  $\pm 1$   $^{\circ}\text{C}$ , a współczynnik rozszerzalności cieplnej materiału płytki wzorcowej wynosi:  $12 \cdot 10^{-6} \text{ }^{\circ}\text{C}^{-1}$ . Niepewność standardowa to:

$$u(\delta l_t) = \frac{1 \text{ }^{\circ}\text{C} \cdot 12 \cdot 10^{-6} \text{ }^{\circ}\text{C}^{-1}}{\sqrt{3}} 20,0002 \text{ mm} = 0,14 \mu\text{m}. \quad (19)$$

Wszystkie wielkości wejściowe zestawiono w tabeli budżetu niepewności (tab. 3).

Tab. 3. Budżet niepewności wzorcowania mikrometru  
Tab. 3. Uncertainty budget of micrometer calibration

Symbol wielkości	Estymata wielkości	Niepewność standardowa	Rozkład prawdopodobieństwa	Współczynnik wrażliwości	Udział niepewności
$l$	20,001 mm	0,32 $\mu\text{m}$	Studenta ( $\nu=4$ )	1	0,32 $\mu\text{m}$
$\delta l$	0 mm	0,41 $\mu\text{m}$	trójkątny	1	0,41 $\mu\text{m}$
$l_w$	20,0002 mm	0,05 $\mu\text{m}$	normalny	-1	-0,05 $\mu\text{m}$
$\delta l_t$	0 mm	0,14 $\mu\text{m}$	prostokątny	-1	-0,14 $\mu\text{m}$
$e$	0,0008 mm				0,54 $\mu\text{m}$

Wykonując obliczenia niepewności rozszerzonej, dla  $p = 95\%$ , metodą analityczną, przy zastosowaniu formuły (6), otrzymujemy rezultat  $U_{AM} = 1,216$   $\mu\text{m}$ . Generując milion razy zbór wartości dla wielkości wyjściowej, przy zastosowaniu równania (9), dla tych samych danych wejściowych metodą numeryczną, otrzymujemy wynik  $U_{NM} = 1,218$   $\mu\text{m}$ . Dla porównania wynik uzyskany metodą szybkiej transformaty Fourierowskiej wynosi  $U_{FFT} = 1,196$   $\mu\text{m}$ , a obliczenia, przy użyciu procedury Monte Carlo zalecanej przez dokument [2], dają rezultat  $U_{MCM} = 1,201$   $\mu\text{m}$ . Dla każdej obliczonej wartości, przy zaokrągleniu niepewności rozszerzonej do dwóch cyfr znaczących, otrzymamy  $U = 1,2$   $\mu\text{m}$ , a wynik wzorcowania można przedstawić w postaci błędu wskazania mikrometru:  $e = (0,8 \pm 1,2)$   $\mu\text{m}$ .

## 8. Podsumowanie

Metody wyznaczania niepewności pomiaru oparte na rozkładzie płasko-normalnym umożliwiają wykonywanie obliczeń zapewniających wiarygodność drugiej cyfry znaczącej przy wyrażaniu niepewności rozszerzonej dla prawdopodobieństwa 95%. Metoda analityczna wymaga znajomości wartości kwantyla rozkładu P\*N. Aby ułatwić jego wyznaczanie opracowano specjalną tabelę ich wartości w funkcji ilorazu udziału [12, 13]. Gdy rozkład ten generowany jest numerycznie, potrzebny jest tylko generator rozkładu równomiernego, dostępny w każdym środowisku programowym. Rozkład normalny standaryzowany też jest generowany na podstawie liczb z rozkładem równomiernym. Metody można łatwo implementować do arkusza kalkulacyjnego, bez konieczności stosowania specjalistycznych środowisk obliczeniowych.

Metody antycypują rozkład dla wielkości wejściowej na podstawie udziałów wielkości wejściowych dla liniowego lub linearyzowanego równania pomiaru, gdy wielkościom tym przypisujemy

podstawowe rozkłady prawdopodobieństwa, jak rozkład Studenta, normalny, prostokątny czy trójkątny. Pod tym względem metody zbliżają się ideowo do klasycznego podejścia w metrologii, w którym to z wynikiem pomiaru związany jest określony rozkład prawdopodobieństwa [1]. Dodatkową cechą metod jest to, iż w przeciwieństwie do zalecanej procedury Monte Carlo [2] nie wymagają zwiększonego czasu obliczeniowego ze względu na rosnącą liczbę wielkości wejściowych. Czas ten jest niezależny od liczby tych wielkości, ponieważ nie ma potrzeby generowania liczb losowych oddzielnie dla każdego rozkładu wielkości wejściowej. W metodzie numerycznej związany jest on tylko z czasem generowania zbioru wartości dla rozkładu P\*N, o określonym parametrze  $r$ . Praktycznie pozwala na natychmiastowe obliczenia niepewności dla dowolnej liczby składowych.

Na ogół większość obliczeń niepewności pomiaru wykonywana jest na podstawie zestawionego budżetu niepewności. Często nie towarzyszy mu jawna postać równania pomiaru. Obliczenia można wykonywać na podstawie wyznaczonych w budżecie udziałów niepewności i złożonej niepewności standardowej. W ten sposób przedstawione metody łączą zaletę łatwości korzystania przy obliczeniach z prawa propagacji niepewności z dokładnością propagacji rozkładów.

## 9. Literatura

- [1] Guide to the Expression of Uncertainty in Measurement. ISO 1995.
- [2] Evaluation of measurement data – Supplement 1 to the “Guide to the expression of uncertainty in measurement” – Propagation of distributions using a Monte Carlo method. JCGM 101:2008.
- [3] Międzynarodowy słownik metrologii. Pojęcia podstawowe i ogólne oraz terminy z nimi związane (VIM). PKN-ISO/IEC Guide 99, 2010.
- [4] International vocabulary of metrology – Basic and general concepts and associated terms (VIM). JCGM 200:2008.
- [5] Blázquez J., Garcia-Berocal A., Montalvo C., Balbás M.: The coverage factor in a Flatten–Gaussian distribution. *Metrologia*, vol. 45 (2008), s. 503-506.
- [6] Dietrich C. F.: Uncertainty, Calibration and Probability. The Statistics of Scientific and Industrial Measurement. Second Edition 1991. The Adam Hilger Series on Measurement Science and Technology, s. 535.
- [7] Fotowicz P.: Zasada przybliżenia rozkładu wyniku pomiaru przy wzorcowaniu. *PAR* nr 9 (2001), s. 8-11.
- [8] Fotowicz P.: Method for calculating the coverage factor in calibration. *OIML Bulletin*, vol. XLIII (2002), s. 5-9.
- [9] Fotowicz P.: Metoda wyznaczania współczynnika rozszerzenia w procedurach szacowania niepewności pomiaru. *PAR* nr 10 (2003), s. 13-16.
- [10] Fotowicz P.: Metody obliczania współczynnika rozszerzenia w oparciu o splot rozkładu prostokątnego z normalnym. *PAK* nr 4 (2004), s. 13-16.
- [11] Fotowicz P.: A method of approximation of the coverage factor in calibration. *Measurement*, vol. 35 (2004), s. 251-256.
- [12] Fotowicz P.: Obliczanie niepewności rozszerzonej metodą analityczną opartą na splocie rozkładów wielkości wejściowych. *PAR* nr 1 (2005), s. 5-9.
- [13] Fotowicz P.: An analytical method for calculating a coverage interval. *Metrologia*, vol. 43 (2006), s. 42-45.
- [14] Fotowicz P.: Practical application of an analytical method for calculating a coverage interval. *Measurement Science and Technology* vol. 21 (2010), 087001 (7s.).
- [15] Korczyński M. J., Hetman A., Fotowicz P.: Fast Fourier Transformation on Approach to Coverage Interval Calculation vs. Approximation Methods. *International Workshop on Advanced Methods for Uncertainty Estimation in Measurement, Niagara Falls and Joint International IMECO TC1+TC7 Sym-posium, AMUEM 2005*.

otrzymano / received: 02.03.2011

przyjęto do druku / accepted: 04.05.2011

artykuł recenzowany