

**Zygmunt Lech WARSZA<sup>1</sup>, Vladimir V. EZHELA<sup>2</sup>**<sup>1</sup> PRZEMYSŁOWY INSTYTUT AUTOMATYKI I POMIARÓW (PIAP), Al. Jerozolimskie 202, 02-486 Warszawa<sup>2</sup> INSTYTUT FIZYKI WIELKICH ENERGII (IHEP), Protvino MR Rosja**Sugestie kilku uściśleń w Przewodniku GUM-2008 i zaokrąglanie wyników pomiarów wieloparametrowych**

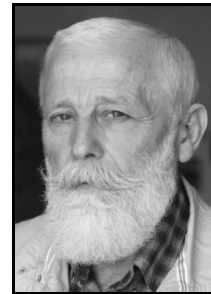
Doc. dr inż. Zygmunt Lech WARSZA



Ukończył Miernictwo Elektryczne w Politechnice Warszawskiej 1959, doktorat 1967, docent od 1970. Pracował w Instytucie Elektrotechniki i Pol. Warszawskiej. Następnie zorganizował i prowadził: Wydział Transportu Pol. Świętokrzyskiej, Ośrodek Aparatury Pomiarowej IMGW, Zakład Automatykacji i Techniki Pomiarowej Instytutu Chemii Przemysłowej. Obecnie pracuje w Przemysłowym Instytucie Automatyki i Pomiarów PIAP. Autor około 130 publikacji, 2 monografii, 11 patentów oraz promotor 2 doktorów.

e-mail: zlw@op.pl

Dr Vladimir V. EZHELA



W 1968 ukończył Moskiewski Instytut Fizyki i Techniki (MPTI) ze specjalnością fizyka jądrowa. Od 1968 pracuje w Instytucie Fizyki Wielkich Energii IHEP. W 1971 odbył aspiranturę w MPTI pod kierunkiem akademika A. A. Logunova, od 1971 w pionie teoretycznym IHEP, 1977 – 2003 starszy pracownik naukowy, kierownik Centrum Danych Fizyki Cząstek (PPDC), 2004 – główny pracownik naukowy w PPDC IHEP. Autor kilkudziesięciu publikacji naukowych, współpracuje z CODATA.

e-mail: Vladimir.Ezhela@ihep.ru

**Streszczenie**

W pracy wykazano, że kilka zaleceń Przewodnika GUM o wyrażaniu wyników pomiaru jest niewłaściwych dla poprawnego przetwarzania danych w pośrednich pomiarach wieloparametrowych, a w przykładzie H.2 nie oszacowano poprawnie korelatora. Podano progi ograniczające minimalne liczby cyfr przy jednolitym zaokrągleniu danych liczbowych multimezurandu z przykładami oraz proponowane zasady dalszego zaokrąglania poniżej tych progów. Zaproponowano kilka zmian w GUM. Z pracy wynika, że pilnie potrzebne są międzynarodowe zalecenia do poprawnego wyznaczania wyników pomiarów wieloparametrowych (Supplement 2 do GUM) oraz normalizacja prezentacji numerycznej ich danych.

**Słowa kluczowe:** pomiary pośrednie wieloparametrowe, niepewność multi-mezurandu, korelacja danych.

**Some upgrading suggestions of the GUM-2008 and rounding rules for multivariate measurement results****Abstract**

In this paper it is shown that recommendations of evaluation estimators of the value, uncertainty and correlation coefficients given by the international metrological Guide GUM-2008 are not useful enough for the proper evaluation of results in multidimensional indirect measurements. Mistakes are shortly discussed. It is found that smallest eigenvalue of correlation matrix obtained after calculations for output multi-measurand in the GUM H.2 example is negative and data is not proper as cannot be presented by 3-order normal distribution. Output data of the H.2 example are evaluated by two cases. First one is reference – when input data are considered as given absolutely accurate and thresholds of safety rounding calculating from them output data are found. In the second case, proper to wide application, method rounding of output is joined with accuracy of uncertainty of input data. Two variants of this method are compared. Few corrections of H.2 example are proposed. Formulas for the proper rounding of the multi-measurand numerical data up to thresholds, and recommendations for rounding below them are given. The minimal data structure for describing the multi-measurand is defined. From this work it results that in multivariable measurements urgently is needed standardization of the method of measurement data evaluation (Supplement 2), and also for their presentation which allows full numerical review of the multidimensional data, their wide dissemination and unlimited in time storage.

**Keywords:** uncertainty, multidimensional indirect measurements, data correlation.

**1. Wprowadzenie**

Jednoczesne pomiary wieloparametrowe, z których pośrednio wyznacza się inne wielkości, występują coraz częściej w podstawowych badaniach naukowych i w wielu innych dziedzinach. Pomimo, że międzynarodowy przewodnik metrologiczny GUM i jego dotychczasowe Suplementy dotyczą tylko pomiarów pojedynczej wielkości, to komentarze w kilku zaleceniach i do podanego

w nim przykładu H.2 o równoczesnych pomiarach parametrów dwójnika już zawierają nieścisłości. Ponadto nawet w publikacjach CODATA (Committee on Data for Science and Technology) i w wielu czołowych czasopismach naukowych spotyka się niepoprawne oceny dokładności i niezetelnie, lub niewłaściwie podane współczynniki korelacji dla danych uzyskanych w wielowymiarowych eksperymentach pomiarowych [8, 9]. Uniemożliwia to numeryczną ich weryfikację.

W poprzedniej publikacji [11] omówiono w skrócie podstawy teoretyczne wyznaczania estymatorów wartości, niepewności typu A i współczynników korelacji dla  $n$  wielkości wyjściowych  $Y_i$ , czyli dla multi-mezurandu o  $n$  składowych otrzymywanych pośrednio z wyników jednoczesnych pomiarów  $m \geq n$  wielkości wejściowych  $X_i$ . Użyto do tego celu algebry wektorów losowych, a rozważania poparto przykładem zaokrąglania mezurandu o  $n=2$  elementach uzyskanego z pomiarów pośrednich o liniowym przetwarzaniu. W prezentacjach wyników liczbowych pomiarów pośrednich wieloparametrowych w literaturze występują różne zniekształcenia, np.:

- (i) podawanie tylko średnich wartości składowych wektora i ich niepewności z pominięciem macierzy korelacji;
- (ii) nadmierne zaokrąglenie niepewności i współczynników korelacji, takie, że macierz kowariancji przestaje być dodatnio określona i w konsekwencji nie otrzymana się elipsoidalnego obszaru opisującego rozrzut obserwacji pomiarowych;
- (iii) nadmierne zaokrąglenie wyjściowego wektora średniego, którego koniec wychodzi na wiele odchyłeń standardowych poza granice przetworzonego obszaru rozrzutu niezaokrąglonych (surowych) wyników obserwacji pomiarowych. Po zaokrągleniu danych elipsoidalnego obszaru wpisana w prostopadłości niepewności powinna obejmować mniejszą dla danych niezaokrąglonych.

Przewodnik GUM-2008 [3] zawiera przykładu H.2 dotyczący pomiarów pośrednich parametrów dwójnika impedancyjnego. Dla danych pomiarowych z tego przykładu V. Ezhela w [10] tymi samymi dwoma metodami wyznaczył wyniki przy bardziej precyzyjnych wielocyfrowych obliczeniach. Zastosował procedurę przeznaczoną do przetwarzania danych odniesienia i i weryfikacji numerycznej wyników wielowymiarowych eksperymentów w fizyce [5-11]. Procedura ta wynika z tzw. „dobrej praktyki”, że poza dbałością o wysoką jakość metrologiczną danych pozyskiwanych bezpośrednio w pomiarach, przy dalszym ich przetwarzaniu i zaokrągleniu nie należy też tracić zdobytej już informacji. Poniżej przedstawi się wyniki tych obliczeń, które stanowią będą odniesienie dla końcowego zaokrąglania danych wyjściowych przykładu H.2. Ponadto podane będą reguły postępowania przy przetwarzaniu danych wejściowych, takie, by zachowywać elipsoidalny kształt rozproszenia danych pomiarowych i położenie końca wektora mezurandu wewnątrz tego obszaru [11]. Wyznaczy się progi (dopuszczalne minimalne liczby znaków dziesiętnych) przy stosowaniu standardowego jednolitego zaokrąglania wartości średnich, niepewności i współczynników korelacji multi-

mezurandu wyjściowego. Podane i porównane zostaną dwa sposoby dalszego zaokrąglania danych poniżej tych progów.

Jako wniosek z analizy przykładu H.2 zaproponuje się usunięcie zauważonych nieściśłości w zaleceniach GUM. Dokona się oceny jak dalece podejście przeznaczone do przetwarzania danych w podstawowych badaniach fizycznych można będzie przystosować dla potrzeb metrologii i użytkowej techniki pomiarowej.

## 2. Ocena zaleceń przewodnika GUM-2008 związanych z pomiarami wieloparametrowymi

Oficjalne dokumenty i przewodniki metrologiczne wraz z Przewodnikiem GUM [2, 3] o wyrażaniu wyników pomiarów mają za cel podwyższenie jakości danych pomiarowych poprzez stworzenie jednolitych i powszechnie akceptowanych standardów. Dotychczas dotyczą one mezurandu tylko jako wielkości pojedynczej. Zapowiadany od lat Suplement 2 GUM [3, 4] dla pomiarów wieloparametrowych jest w końcowym stadium opracowywania. Jednakże dotychczasowe zalecenia punktów 7.2.5, 7.2.6 i przykład H.2 z Aneksu H w GUM są tak sformułowane, że wytwarzają wrażenie, iż uogólnienie na przypadek wielowymiarowy jest bardzo proste. Zostanie to przeanalizowane krytycznie, gdyż obliczenia w GUM nie w pełni są prawidłowe. Porówna się je wynikami bardziej precyzyjnych obliczeń dla surowych danych z przykładu H.2 [6] – [10] i sformułuje propozycję ulepszenia zaleceń GUM związanych z pomiarami wieloparametrowymi.

W przykładzie H.2, przy wyznaczaniu wyników pośrednich pomiarów parametrów dwójnika zakłada się domyślnie, że nieznanne a priori oraz nieusuwalne w danym eksperymencie stałe i regularnie zmienne pozostałości systematycznych błędów instrumentalnych, szacowane niepewnością typu B, są znacznie mniejsze od niepewności typu A opisującej losowe rozrzuty wyników pomiarów wielkości wejściowych  $X_i$ . Abstrahuje się też od uwarunkowań instrumentalnych w realizacji przujętego w tym przykładzie tak precyzyjnego pomiaru fazy.

W Tabeli H.2 GUM podano próbki o pięciu pięciocyfrowych wynikach  $q_i$  jednoczesnych obserwacji pomiarowych sinusoidalnego napięcia  $U$ , prądu  $I$  i przesunięcia fazy  $\varphi$  dla liniowego dwójnika impedancyjnego. Surowe wyniki pomiarów są więc tu mało licznymi próbkami pobranymi z populacji możliwych wartości każdej z mierzonych wielkości wejściowych  $U, I, \varphi$ . Z pomiarów składowych wektora wejściowego  $\mathbf{X}=[U, I, \varphi]^T$  należy wyznaczyć pośrednio składowe wektora wyjściowego  $\mathbf{Y}=[R, X, Z]^T$  dwójnika. Parametry tych wektorów powiązane są następująco:

$$R=(U/I)\cdot\cos\varphi, \quad X=(U/I)\cdot\sin\varphi, \quad Z=U/I \quad (1)$$

Tylko dwa z nich są niezależne, gdyż dwójnik opisuje równanie

$$Z^2 = R^2 + X^2$$

Tabela H.2	Wielkości wejściowe $\mathbf{X}$		
Nr pomiaru	$U$ [V]	$I$ [mA]	$\varphi$ [rad]
1	5,007	19,663	1,0456
2	4,994	19,639	1,0438
3	5,005	19,640	1,0468
4	4,990	19,685	1,0428
5	4,999	19,678	1,0433
Średnie $\bar{\mathbf{Q}}=[\bar{U}, \bar{I}, \bar{\varphi}]$	4,999	19,661	1,0445
Odchylenia standardowe $s[\bar{\mathbf{Q}}]$	0,0072	0,0212	0,0017
Macierz korelacji $\mathbf{Cor}_{H2}=\mathbf{r}[\bar{\mathbf{Q}}]$	1	-0,36	0,86
	-0,36	1	-0,65
	0,86	-0,65	1
Wartości własne $\mathbf{Co}_{H2}$	[2,26846; 0,657234; 0,0743036]		

W tabeli H.2 podano obliczone z 5-ciu obserwacji pomiarowych wartości średnie  $\bar{\mathbf{Q}}=[\bar{U}, \bar{I}, \bar{\varphi}]$  składowych wektora wejściowego  $\mathbf{X}$ , ich eksperymentalne niepewności standardowe i elementy macierzy korelacji  $\mathbf{Cor}_{H2}=\mathbf{r}[\bar{\mathbf{Q}}]$ , zwanej też korelatorem oraz jej wartości własne  $\lambda_i$ . Wartości te są pierwiastkami równania charakterystycznego  $\det(\mathbf{r}[\bar{\mathbf{Q}}]-\lambda\mathbf{I})=0$ . Wyznacznik macierzy i najmniejsza z wartości własnych są dodatnie, czyli elementy macierzy  $\mathbf{r}[\bar{\mathbf{Q}}]$  zaokrąglono poprawnie i macierz jest dodatnio określona, a obszar rozrzutu jej danych będzie można modelować elipsoidą.

Przy próbkach danych o małej liczbie obserwacji pomiarowych, dokładności parametrów statystycznych wyznaczone dla zmierzonych wielkości wejściowych są małe. Względna niepewność eksperymentalnej niepewności standardowej  $s(\bar{q})$  wyznaczonej z próbki o  $N$  pomiarach równa się w przybliżeniu  $\sigma[s(\bar{q})]/s(\bar{q})\approx[2(N-1)]^{-1/2}$ . Z Tabeli E1 w p. E 4.3 GUM wynika, że dla próbki o zaledwie  $N=5$  elementach osiąga ona aż 36%. Liczby znaków dziesiętnych dla wyznaczanych wartości parametrów wielkości wejściowych mierzonych bezpośrednio i wyjściowych - mierzonych pośrednio powinny nawiązywać do tych niedokładności. Jednak dalsze rozważania mają tu służyć do analizy poprawności obliczeń, w tym zaokrąglania przy wyznaczaniu cyfrowych wartości parametrów wektora wyjściowego  $\mathbf{Y}=[R, X, Z]^T$ . Dlatego też parametry obliczone z próbek o tak nielicznych danych wektora  $\mathbf{X}=[U, I, \varphi]^T$  potraktuje się dalej tak, jakby były one dla  $N\rightarrow\infty$ , czyli bliższe parametrów populacji, tj. że,  $\bar{\mathbf{Q}}=\bar{\mathbf{X}}$ ,  $s[\bar{\mathbf{Q}}]=s[\bar{\mathbf{X}}]$  i  $\mathbf{r}[\bar{\mathbf{Q}}]=\mathbf{r}[\bar{\mathbf{X}}]$ .

Dla danych z tabeli H.2 wyznaczono ponownie parametry statystyczne wektora  $[U, I, \varphi]^T$ , ale obliczono je z wyższą precyzją niż w GUM i jednolicie zaokrąglono do 6-ciu cyfr. Otrzymano odchylenia standardowe:

$$\sigma[\mathbf{X}]_{H2} = [0,00717635; 0,0211778; 0,00168167]$$

oraz korelator

	1	-0,355311	0,857624
$\mathbf{Cor}'_{H2}$	-0,355311	1	-0,645111
	0,857624	-0,645111	1

o wartościach własnych 2,268085; 0,662178; 0,0769676. Macierz ta jest dodatnio określona.

Tymi samymi dwiema metodami jak w przykładzie H.2 GUM oszacuje się wektor średni  $\mathbf{Y}=[\bar{R}, \bar{X}, \bar{Z}]^T$ , ale z większą precyzją obliczeń i przy ścisłym stosowaniu zasady omówionej w [11], tj. by przy jednolitym zaokrąglaniu do kolejnego wyższego znaku dziesiętnego kontrolować, czy dla zadanego prawdopodobieństwa obszar rozrzutu przetworzonych surowych danych wejściowych jest elipsoidalny, a koniec wektora  $\mathbf{Y}$  jest w jego wnętrzu.

W metodzie 1 wartości elementów  $\bar{R}, \bar{X}, \bar{Z}$  wektora średniego  $\mathbf{Y}$  uzyskuje się przez wstawienie wartości średnich  $\bar{U}, \bar{I}, \bar{\varphi}$  w podstawowe równania pomiaru (1) łączące oba wektory. Do oceny macierzy kowariancji wektora wyjściowego  $[R, X, Z]^T$  niezbędna jest macierz czułości  $\mathbf{S}_m$ . Wyznacza się ją analitycznie jako:

$$\mathbf{S}_m = \begin{bmatrix} \cos\varphi/I & -U\cos\varphi/I^2 & -U\sin\varphi/I \\ \sin\varphi/I & -U\sin\varphi/I^2 & -U\cos\varphi/I \\ 1/I & -U/I^2 & 0 \end{bmatrix}$$

Macierz ta jest zdegenerowana, gdyż pierwsze dwie kolumny są do siebie proporcjonalne. Jej wyznacznik jest równy zero.

Według równania (4) z [11], przy liniowej propagacji niepewności wektora  $[R, X, Z]^T$ , oblicza się macierz kowariancji

$$\mathbf{Cov}_{H3} = \mathbf{S}_m \cdot \mathbf{Cov}_{H2} \cdot [\mathbf{S}_m]^T$$

gdzie:  $[\mathbf{S}_m]^T$  - macierz  $\mathbf{S}_m$  transponowana.

Podobnie jak  $\mathbf{S}_m$ , również macierz  $\mathbf{Cov}_{H3}$  będzie zdegenerowana. Z najwyższą precyzją użytego komputera wyznaczono wartości jej elementów, i z zależności:  $\mathbf{Cor}'_{H3} = \mathbf{\sigma} \cdot \mathbf{Cov}_{H3} \cdot \mathbf{\sigma}^T$  nowy korelator

$$\mathbf{Cor}'_{H3} = \begin{bmatrix} 1 & -0,588429784423552 & -0,485259224209967 \\ -0,588429784423552 & 1 & 0,992511648949017 \\ -0,485259224209967 & 0,925116489490171 & 1 \end{bmatrix}$$

o wartościach własnych (2,40377; 0,596227;  $9,30849 \times 10^{-17}$ ).

Macierz  $\mathbf{Cor}'_{H3}$  jest dodatnio określona, gdyż jej najmniejsza wartość własna jest nieco większa od 0. Dalsze jednolite zaokrąglanie jej elementów nie jest już możliwe, gdyż otrzymuje się macierz o symetrycznej diagonalnie formie, ale o ujemnych wartościach własnych. Po zaokrągleniu współczynników korelacji do tylko 3 cyfr po przecinku otrzymuje się macierz  $\mathbf{Cor}_{H3} = \mathbf{Cor}_{H4}$  podaną poniżej w Tabeli H.4 z GUM, która ma ujemną najmniejszą wartość własną, więc i  $\mathbf{Cor}_{H3}$  nie jest dodatnio określona.

Tak więc pomimo początkowo dobrze postawionego zagadnienia, uzyskano zagadnienie zdefiniowane źle! Zwyródnienie wynikało ze stosowania uproszczonej propagacji niepewności, tj. zignorowania ograniczenia przy nieliniowej zależności  $Z^2 = R^2 + X^2$ .

Przy liniowej propagacji niepewności od mierzonych wielkości wejściowych  $X_i$  do obserwowanych wielkości wyjściowych  $Y_i$ , powszechnie stosuje się macierz czułości  $\mathbf{S}_m$  o kolumnach, zawierających gradienty wielkości wyjściowych względem wielkości wejściowych. W przypadku ogólnym mogą ukryć się wzajemne zależności pomiędzy wielkościami wyjściowymi  $Y_i$ . Jeśli np. dla składowych wyjściowych  $Y_i$  zachodzi ograniczenie  $F(Y_1, \dots, Y_n) = \text{const}$ , to ich gradienty będą zależne liniowo:

$$\text{grad}(Y_1) \times \partial F / \partial Y_1 + \dots + \text{grad}(Y_n) \times \partial F / \partial Y_n = 0 \quad (2)$$

Występowanie tej zależności zmniejsza stopień macierzy czułości.

Potrzebna jest taka procedura, w której macierze  $\mathbf{Cov}_{H3}$  i  $\mathbf{Cor}_{H3}$  po zaokrągleniu były by dodatnio określone. Do obliczania  $\mathbf{Cov}_{H3}$  w przykładzie H.2 należy stosować aproksymację szeregiem Taylora co najmniej rzędu drugiego, a do oceny korelacji pomiędzy wielkościami wyjściowymi - aż czwartego rzędu. Zagadnienia te będą omówione w oddzielnej publikacji.

Metoda 2 szacowania wartości parametrów wyjściowych (z przykładu H.2 w GUM) polega na bezpośredniej propagacji surowych danych wyjściowych poszczególnych trójek jednoczesnych pomiarów by wytworzyć "pseudo-surowe" dane wyjściowe. Wyniki ostateczne wyznacza się z zależności statystycznych. Wówczas ograniczenia i inne ukryte zależności wielkości wyjściowych zachodzą samoczynnie i nie oddziałują negatywnie.

Podana poniżej tabela H.4 z GUM-2008 podaje obliczone „pseudo-surowe” wartości wyjściowe o liczności  $N=5$ , wektor  $[\bar{Y}]$  ich średnich, oraz wektor  $s[\bar{Y}]_{H4}$  eksperymentalnych odchyłeń standardowych i macierz korelacji – zaokrąglone do trzech miejsc po przecinku.

Tabela H.4	Wielkości wyjściowe Y		
Numer pomiaru	$R=(V/T)\cos\phi$ [Ω]	$X=(V/T)\sin\phi$ [Ω]	$Z=(V/T)$ [Ω]
1	127,67	220,32	254,64
2	128,89	219,79	254,29
3	127,51	220,64	254,84
4	127,71	218,97	253,49
5	127,88	219,51	254,04
Średnie $\bar{Y} = [\bar{R}, \bar{X}, \bar{Z}]$	127,732	219,847	254,260
$s[\bar{Y}]_{H4}$	0,071	0,295	0,236
Macierz korelacji $\mathbf{Cor}_{H4}$	1	-0,588	-0,485
	-0,588	1	0,993
	-0,485	0,993	1

Jej wartości własne to: 2,40374; 0,596713; -0,000453532.

Macierz  $\mathbf{Cor}_{H4}$  nie jest zdefiniowana dodatnio. Dlatego z danych wyjściowych w tabeli H.4 obliczono z dużą precyzją macierz  $\mathbf{Cor}'_{H4}$  i jej elementy zaokrąglono do 9 cyfr po przecinku

$$\mathbf{Cor}'_{H4} = \begin{bmatrix} 1 & -0,588276856 & -0,485064614 \\ -0,588276856 & 1 & 0,992507542 \\ -0,485064614 & 0,992507542 & 1 \end{bmatrix}$$

Jej wartości własne to: [2,40356; 0,596436;  $2,24175 \times 10^{-8}$ ].

#### UWAGA!

Dalsze standardowe jednolite zaokrąglanie w celu skrócenia długości mantys we współczynnikach korelacji spowoduje pojawienie się ujemnych wartości własnych. Trzeba by wówczas stosować niejednolite zaokrąglanie lub tak nieznacznie zmieniać elementy macierzy  $\mathbf{Cor}'_{H4}$ , aby jej najmniejsza wartość własna nadal była dodatnia.

Obliczono też dokładniejsze wartości średnie wielkości wyjściowych oraz odchylenia standardowe ich próbek

$$s[q_Y] = [0,159372; 0,660734; 0,528265].$$

Ocenę skuteczności oszacowania wartości średnich  $\bar{R}, \bar{X}, \bar{Z}$  uzyskuje się przez porównanie wyników otrzymanych w różny sposób. Po zaokrągleniu wartości średnich  $\text{Mean}_{H3}$  i  $\text{Mean}_{H4}$  otrzymanych obiema metodami i podanych w GUM w tabelach H.3 i H.4 uzyskuje się jednakową wartość  $\text{Mean}_{GUM}$ . Zestawiono ją z bardziej precyzyjnymi wartościami obliczonymi powyżej.

	R	X	Z
$\text{Mean}_{GUM} =$	127,732	219,847	254,26
$\text{Mean}_{H3} =$	127,73216993	219,84651191	254,25970195
$\text{Mean}_{H4} =$	127,73163048	219,84689460	254,26004959

Informację o stopniu spełniania zależności fizycznej opisującej dwójnik uzyska się po wstawieniu powyższych wartości do jego równania  $X^2 + Y^2 - Z^2 = 0$ . Otrzymuje się:

$$\text{Test 1 } \text{Mean}_{GUM}: X^2 + Y^2 - Z^2 = 0,019633 \quad \sigma^2 = 71,5 (! ?)$$

$$\text{Test 2 } \text{Mean}_{H3}: X^2 + Y^2 - Z^2 = -0,000002 \quad \sigma = 0,128252$$

$$\text{Test 3 } \text{Mean}_{H4}: X^2 + Y^2 - Z^2 = -0,146327 \quad \sigma = 0,128009$$

**Test 1** nie daje sensownej odpowiedzi, gdyż wartość  $\sigma^2$  uzyskana według zaleceń GUM-2008 jest ujemna.

**Test 2** nie jest prawdziwym testem, gdyż z równania opisującego dwójnik (prawo fizyczne) zawsze wynika 0, a występująca w nim różnica powstała wskutek posłużenia się średnimi wartościami parametrów  $[R, X, Z]$  wyznaczonymi z wyników pomiarów.

**Test 3** daje rozbieżność względem prawa fizycznego większą niż o jedno odchylenie standardowe. Wynika to z zastosowania w obliczeniach wartości statystycznych parametrów.

Tak więc propagacja "surowych" danych, czyli innymi słowy propagacja rozkładu, daje najlepsze oszacowanie macierzy kowariancji i korelacji, ale też największe odchylenie wektora średniego z "obszaru fizycznego". Matematycznie uzasadnia się to tym, że punkt średni (arytmetycznie) dla punktów na zakrzywionej powierzchni (np. nieliniowa zależność dwójnika), ale wyrażonej we współrzędnych euklidesowych, nie leży na tej powierzchni.

Wyznaczanie pośrednie parametrów pojedynczej wielkości z jednoczesnych pomiarów kilku innych stanowi przypadek szczególny pomiarów wieloparametrowych. Jego również może dotyczyć wniosek z testu 3. Rodzi on wątpliwość, czy obliczanie wyników pomiaru poprzez przetwarzanie po kolei danych surowych jest oby zawsze naprawdę najbardziej dokładne [12]. Ponadto należy sprawdzać, czy macierz korelacji wielkości wejściowych jest zdefiniowana dodatnio.

### 3. Reguły zaokrąglania wyrażeń liczbowych w pomiarach wieloparametrowych

Przestrzeganie wymagania, by przy przekształcaniu wieloparametrowych danych pomiarowych zachowywać rozkład rozrzutu jako normalny oraz aby położenie końca wektora średniego było wewnątrz elipsoidalnego obszaru tego rozrzutu o określonym prawdopodobieństwie, prowadzi do minimalnej dopuszczalnej liczby znaków dziesiętnych dla zaokrąglanych wartości liczbowych tych danych. Z twierdzeń Weila, Gerszgorina i Schura w teorii macierzy, przy jednolitym sposobie zaokrąglania liczb, jak dla wielkości skalarnych, otrzymuje się zależności dla tzw. progów zaokrąglania [9]:

dla elementów macierzy korelacji

$$A^C \geq A_{i \neq j}^{Cth} = \text{Upper Integer} \left[ \log_{10} \frac{n-1}{2 \cdot \lambda_{\min}} \right] \quad (3)$$

dla składowych wektora średniego

$$A_i^V \geq A_i^{Vth} = \text{Upper Integer} \left[ \frac{1}{2} \log_{10} \frac{n}{4 \cdot \lambda_{\min} \cdot T_{CL}^2 \cdot \left( \frac{U_i}{\text{unit}_i} \right)^2} \right] \quad (4)$$

dla odchyłeń standardowych składowych wektora średniego

$$A_i^u = A_i^V \quad (5)$$

gdzie:  $n$  – wymiar macierzy korelacji,  $\lambda_{\min}$  – jej minimalna wartość własna korelacji,  $U_i/\text{unit}$  – wartość  $i$  i jednostka mierzona wielkości (np. kg, m, s),  $T_{CL}^2$  – współczynnik danego poziomu ufności CL (np, 68,3%, 95%); Upper Integer – operator matematyczny zaokrąglania liczby do najbliższej wyższej liczby całkowitej (np. [5,11]=6, [5,99]=6);  $A^C$ ,  $A_i^V$ ,  $A_i^u$  – liczby znaków dziesiętnych po przecinku,  $A_{i \neq j}^{Cth}$ ,  $A_i^{Vth}$  – ich progi (wartości graniczne).

### 4. Sprawdzenie poprawności zaokrąglania wyników przy próbkach o dużej liczności

Wymagania dla numerycznego przedstawiania danych multi-mezurandów określa się przez dopuszczalne minimalne liczby cyfr znaczących, czyli progi. Korzystanie z reguł (3) – (5) przy jednolitym zaokrąglaniu zilustruje się sprawdzeniem poprawności wyznaczenia parametrów wektorów podanych w przykładzie H.2 z GUM i uzyskanych przy bardziej precyzyjnych obliczeniach dla tych samych danych wejściowych  $[U, I, \phi]^T$ , potraktowanych jak dla próbek o dużej liczbie elementów  $N$ .

Dla danych wejściowych z tabeli H.2, przy  $T_{CL}=1$ , czyli dla jednego standardowego odchylenia, jako progi zaokrąglania  $A^{th}$  według (4) otrzymano następujące liczby znaków po przecinku:

$$\begin{aligned} \text{UpperInteger}\{A^{th}[U(V)]\} &\geq [0,5 \cdot \log(0,75/0,0769676/0,0071764^2)] = 3 \\ \text{UpperInteger}\{A^{th}[I(\text{mA})]\} &\geq [0,5 \cdot \log(0,75/0,0769676/0,0211778^2)] = 3 \\ \text{UpperInteger}\{A^{th}[\phi(\text{rad})]\} &\geq [0,5 \cdot \log(0,75/0,0769676/0,0016817^2)] = 4 \end{aligned}$$

Według (5) odchylenia standardowe średnich  $\sigma[\mathbf{X}]_{H2}$  też powinno się podawać z taką samą precyzją, tj. zgodnie z progami jak dla wartości średnich. Np. w tabeli H.2 z GUM należałoby podawać [0,007; 0,021; 0,0017] zamiast [0,0072; 0,0212; 0,0017].

Sprawdzono również, czy podane w tabeli H.2 eksperymentalne dwucyfrowe współczynniki korelacji wektora wyjściowego  $[U, I, \phi]^T$  byłyby też poprawnie zaokrąglone dla całej populacji.

Z (3) dla  $n=3$  i przy minimalnej wartości własnej  $\lambda_{\min}=0,0743036$  macierzy  $\mathbf{Cor}_{H2}$  wynika minimalna liczba cyfr

$$A^C(\mathbf{Cor}_{H2}) \geq [\log(1/0,0743036)] = [1,12899] = 2$$

Wynik sprawdzenia jest więc pozytywny. Taką samą wartość progów  $A^{Cth}=2$  uzyskuje się też dla precyzyjniej obliczonego korelatora  $\mathbf{Cor}'_{H2}$ . Ostatecznie parametry statystyczne wektora wyjściowego  $[U, I, \phi]^T$  powinno się przedstawiać następująco:

Wartość średnia	Odchylenie standardowe	Korelator		
		1	-0,36	0,86
4,999	0,007	1	-0,36	0,86
19,661	0,021	-0,36	1	0,65
1,0445	0,0017	0,86	0,65	1

Progi zaokrąglania  $A^{th}$  dla składowych wektora  $[R, X, Z]^T$  z Tabeli H.4 przy  $T_{CL}=1$ , tj. dla jednego odchylenia standardowego:

$$\begin{aligned} \text{UpperInteger}\{A^{th}[R]\} &\geq [0,5 \cdot \log(0,75/2,22711 \cdot 10^{-2}/0,159372^2)] = 5 \\ \text{UpperInteger}\{A^{th}[X]\} &\geq [0,5 \cdot \log(0,75/2,22711 \cdot 10^{-2}/0,660734^2)] = 4 \\ \text{UpperInteger}\{A^{th}[Z]\} &\geq [0,5 \cdot \log(0,75/2,22711 \cdot 10^{-2}/0,528265^2)] = 5 \end{aligned}$$

Korelator  $\mathbf{Cor}'_{H4}$  wektora wyjściowego  $[R, X, Z]^T$  o elementach zaokrąglonych do 9 cyfr ma najmniejszą wartość własną  $\lambda_{\min}=2,22711 \cdot 10^{-8}$  i dla niej minimalna liczba cyfr dla współczynników korelacji wynosi

$$A^C(\mathbf{Cor}_{H3}) \geq [\log(1/2,22711 \cdot 10^{-8})] = [7,65226] = 8$$

Stąd wynika, że jeśli eksperymentalne współczynniki korelacji z tabel H.3 i H.4 GUM o 3 cyfrach dotyczyłyby próbek danych pomiarowych wektora  $\mathbf{X}$  o dużej liczbie  $N$ , to byłyby one zaokrąglone nadmiernie. Ostatecznie więc dane populacji wektora wyjściowego  $\mathbf{Y}$  w tym przypadku powinny być takie:

Średnie	Odchylenia standardowe	Korelator		
		1	-0,58827686	-0,48506461
127,73163	0,15937	1	-0,58827686	-0,48506461
219,84689	0,66073	-0,58827686	1	0,99250754
254,26005	0,52826	-0,48506461	0,99250754	1

Podane w tabeli H.4 w GUM wartości składowych wektora średniego o 5-ciu cyfrach oraz 3-cyfrowe odchylenia standardowe i współczynniki korelacji byłyby nadmiernie zaokrąglone, gdyby dotyczyłyby całej populacji. Nie oznacza to, że dane te mają rzeczywiście za małą liczbę cyfr znaczących, gdyż dotyczą próbek o małej liczności z populacji składowych wektora  $\mathbf{X}$ , których niepewności i współczynniki korelacji mają duże niepewności.

### 5. Zaokrąglanie danych z próbek o małej liczności

Konsekwentne stosowanie podanych powyżej progów dla jednolitego zaokrąglania parametrów multi-mezurandu umożliwi zachowanie dodatkowej określoności macierzy kowariancji i korelacji, a więc hiper-elipsoidalnego obszaru rozrzutu danych o założonym prawdopodobieństwie. Ponadto położenie końca wektora wyjściowego  $[R, X, Z]$  utrzymuje się wewnątrz obszaru rozproszenia otrzymanego po przekształceniach niezaokrąglonych surowych wyników wejściowych obserwacji pomiarowych. Minimalne liczby cyfr dla parametrów wielkości wyjściowych, mogą wypadać większe niż przyjęte w metrologii. Wielocyfrowe estymatory niepewności i współczynników korelacji można by zaakceptować dla estymatorów próbek o licznych elementach, których wartości są bliskie parametrom populacji. Nie ma to sensu dla próbek o małej liczności  $N$ . Ich eksperymentalne parametry statystyczne mają duże niepewności - patrz punkt 2 i do opisu wystarczająco małe liczby cyfr, np. takie, jak w tabeli H.4 z GUM: 2 dla standardowego odchylenia i 3 dla współczynników korelacji. Przy



dalszym jednolitym zaokrągleniu danych korelatora poniżej progu pojawi się ujemna wartość własna. Aby pozostał on dodatnio określony trzeba by w różny sposób nieznacznie modyfikować równocześnie wartości kilku elementów macierzy korelacji lub kowariancji. Dokładność wyników wyjściowych pogorszy się nieznacznie. Duże zmiany współczynników korelacji nie są pożądane, gdy przewiduje się, że skorelowane wielkości wyjściowe będą precyzyjnie przetwarzane dalej. Hiper-eliipsoida odpowiadająca nowym wartościom elementów macierzy kowariancji daje się wpisać w hiper-prostokąt odchyłeń standardowych, zaokrąglonych w górę, np. do dwu znaków.

Nie natrafiono na ogólny algorytm postępowania, który można by stosować dla każdego z przypadków zaokrąglenia do liczby znaków poniżej progu. Dla precyzyjnie przetworzonych danych z przykładu H.2 z GUM wypróbowano dwa sposoby:

- metoda 1 - utrzymanie stałych wartości niediagonalnych elementów macierzy kowariancji jak dla zaokrąglenia progowego, czyli zachowanie stałego dodatniego korelatora z ostatniej tabeli. Odchylenia standardowe zaokrąglano w górę do 3 i 2 cyfr po przecinku i kompensowano to zmniejszeniem współczynników korelacji według zależności

$$k_{RX}^- = \frac{\sigma_R \sigma_X}{\sigma_R^+ \sigma_X^+} k_{RX}, \quad k_{RZ}^- = \frac{\sigma_R \sigma_Z}{\sigma_R^+ \sigma_Z^+} k_{RZ}, \quad k_{XZ}^- = \frac{\sigma_X \sigma_Z}{\sigma_X^+ \sigma_Z^+} k_{XZ}$$

gdzie: znaki w indeksach górnych oznaczają kierunek zmian

- metoda 2 – odrzucenie dalszych liczb po ostatniej zaakceptowanej.

Dla obu metod sprawdzano, czy zaokrąglone wyniki mają dodatni korelator i znaleziono odległość pomiędzy końcami wektora zaokrąglonego i niezaokrąglonego według kryterium Mahalanobisa  $\chi^2$  [11].

W metodzie 1 otrzymano: po zaokrągleniu do 3 cyfr

Wartości średnie	Odchylenie standardowe	Korelator		
127,732	0,160	1	-0,586	-0,483
219,847	0,661	-0,586	1	0,991
254,60	0,529	-0,483	0,991	1
Wartości własne: [2,39983; 0,598631; 0,00154204]				
$\chi^2$				8,39

po zaokrągleniu do 2 cyfr

Wartości średnie	Odchylenie standardowe	Korelator		
127,73	0,16	1	-0,59	-0,48
219,85	0,66	-0,59	1	0,99
254,26	0,53	-0,48	0,99	1
Wartości własne: [2,39972; 0,598797; 0,00148649]				
$\chi^2$				284,0

Współczynniki korelacji są zaokrąglone standardowo. Końce obu zaokrąglonych wektorów są w środku nowych większych prostopadłościów  $\pm\sigma_1$  obejmujących też eliipsoidę danych niezaokrąglonych, a pierwszy z nich wychodzi poza nią niewiele, tj. o  $\chi-1$ .

Dla metody 2 (według V.E.) otrzymano: po zaokrągleniu do 3 cyfr

Wartości średnie	Odchylenie standardowe	Korelator		
127,732	0,160	1	-0,588	-0,485
219,847	0,661	-0,588	1	0,992
254,260	0,529	-0,485	0,992	1
Wartości własne: [2,40297; 0,596499; 0,000533094]				
$\chi^2$				1,108

po zaokrągleniu do 2 cyfr

Wartości średnie	Odchylenie standardowe	Korelator		
127,73	0,16	1	-0,58	-0,48
219,85	0,66	-0,58	1	0,99
254,26	0,53	-0,48	0,99	1
Wartości własne: [2,26846; 0,657234; 0,0743036]				
$\chi^2$				6,445

Metoda 2 polegająca na odrzuceniu dalszych znaków daje mniejsze odległości wektora od środka obszaru przetworzonych niezaokrąglonych danych pierwotnych, ale najmniejsze wartości własne korelatorów są bliższe zera niż w metodzie 1. Nie jest pewne, że dobry wynik otrzyma się zawsze, np. przy odrzuceniu dużych cyfr bliskich 9, gdyż brakuje jeszcze pełnego uzasadnienia teoretycznego tej metody.

Dodatnio określony korelator z przedostatniej tabeli o elementach niediagonalnych (-0,588; -0,485; 0,992) i ujemnie określona macierz  $\text{Cor}_{HH}$  z tabeli H.4 według GUM o elementach (-0,588; -0,485; 0,993) różnią się niewiele - tylko trzecim elementem i to zaledwie o 0,001, tj. o 1 na trzecim miejscu po przecinku.

Zaokrąglenie danych poniżej progów wymaga jeszcze dopracowania teoretycznego i weryfikacji w praktyce.

Przygotowywany obecnie Suplement 2 do GUM powinien zawierać zalecenia dotyczące sprawdzania, czy korelator jest dodatnio określony i zaokrąglenia dla próbek o różnym  $N$ .

## 6. Propozycje poprawek w Przewodniku GUM

Z dotychczasowych rozważań wynika, że niektóre zalecenia i przykład H.2 w GUM -2008 wymagają następujących zmian.

- Do zalecenia 7.2.5 należy włączyć obligatoryjną zasadę by po uzasadnionym metrologicznie zaokrągleniu wartości średnich składowych wektora mierzalnego i ich niepewności sprawdzać czy macierze kowariancji i korelacji są dodatnio określone;
- Należy nieco skorygować fragmenty dotyczące reguł zaokrąglenia wieloparametrowych danych skorelowanych (Zalecenie 7.2.6, Przykład H.2). W skorygowanym zaleceniu 7.2.6 powinno się odpowiednio uwzględnić, że występujące ograniczenia (progi) dla stosowania jednolitego standardowego zaokrąglenia w procesach przetwarzaniu tych danych z minimalizacją strat informacji pomiarowej tworzą szereg wymagań dla formatów, w tym komputerowych, służących do przetwarzania, gromadzenia i przekazywania tych danych.
- Uzyskiwanie i sprawdzanie, czy macierz korelacji dla funkcji wyjściowego wektora losowego o rozmiarze  $n$ , zależnego od  $m$  wejściowych zmiennych jest dodatnio określona i proponowane poszerzenie punktów 7.2.5 i 7.2.7 GUM powinny również być włączone do treści opracowywanego Suplementu 2.

## 7. Podsumowanie i wnioski ogólne

Ta i poprzedzająca ją publikacja [11] miały na celu przybliżyć metody obliczania wyników pomiarów wieloparametrowych, w tym w szczególności procedurę stosowaną przez V. Ezhele w przetwarzaniu danych fizyki eksperymentalnej [6-10]. Omówiono ją na tle zaleceń Przewodnika GUM. Istotą tej procedury są przyjęte wymagania jakościowe dla przedstawiania i zaokrąglenia skojarzonych danych przy ich przetwarzaniu w pomiarach pośrednich wieloparametrowych, tj.:

- zachowywanie wielowymiarowego normalnego rozkładu prawdopodobieństwa (występuje on tylko przy dodatnio określonych macierzach kowariancji i korelacji),

- utrzymywanie przy przekształceniach danych położenia końca wektora średniego multi-mezurandu wewnątrz obszaru rozrzutu o zadanym prawdopodobieństwie, ograniczonego hiper-elipsoidą;
- jednolity, podobny jak dla skalarów, sposób zaokrąglania estymatorów wartości, w tym niepewności tylko w górę.

Z początkowych danych pomiarowych przykładu H.2 w GUM ze znacznie większą precyzją obliczono wartości liczbowe estymatorów dla składowych wektora średniego, ich odchyłeń średnich standardowych i współczynników korelacji wyznaczonego pośrednio mezurandu wyjściowego. Potraktowano więc je jakby to jakby to były dane uzyskane z próbek o bardzo dużej liczbie pomiarów, a więc bliskie parametrów populacji. o pomijalnej niepewności. Zaokrąglono je w sposób jednolity ze spełnieniem ograniczeń wynikających z podanych wymagań.

Podano też ogólne wzory dla progów jednolitego standardowego zaokrąglania wynikające z zachowania powyższych wymagań i przykłady ich stosowania dla parametrów multi-mezurandu.

Rozpatrzono dwie metody dalszego niejednolitego zaokrąglania parametrów mezurandu wyjściowego poniżej tych progów, tj. do 3 i 2 cyfr znaczących, które nawiązują do poziomu niepewności danych eksperymentalnych próbek o nielicznych elementach, np. tak jak w przykładzie H.2 - zaledwie 5. Pierwsza metoda polega na zaokrąglaniu w górę niepewności i w dół współczynników korelacji tak, by zachować stałe wartości niediagonalnych elementów macierzy kowariancji. W drugiej odrzuca się dalsze kolejne cyfry we współczynnikach korelacji. Ich zaokrąglanie jest więc tu niezależne od zaokrąglania odchyłeń standardowych. Dla rozpatrywanych danych z przykładu H.2 założone powyżej wymagania nieco lepiej spełniała metoda druga.

Zaproponowano uściślenia sformułowań w Przewodniku GUM, które należy też uwzględnić w opracowaniu Suplementu 2 o wyrażaniu wyników pomiarów wieloparametrowych.

Z podstaw teoretycznych i przykładów omówionych w [11] i powyżej wynika, że zestaw danych do poprawnego wyrażenia i oszacowania wyniku pomiaru losowej wielkości wektorowej powinien zawierać:

- wektor średni, tj. wartości średnie jego współrzędnych,
- wektor odchyłeń standardowych tych wartości wraz z oszacowaniem ich dokładności,
- dodatkowo określoną macierz korelacji,
- większą od zera minimalną wartość własną macierzy korelacji,
- informację o użytej precyzji przy maszynowym obliczaniu wartości własnych macierzy korelacji.

Przy posługiwaniu się taką strukturą nie wystarczy korzystać z procedur opracowanych i znormalizowanych dla pomiarów pojedynczej wielkości mierzonej. Przy każdym przekształcaniu danych wieloparametrowych należy śledzić zmiany granic obszaru rozrzutu i powiązanie przekształconego wektora średniego z tym obszarem, tj. sprawdzać czy wierzchołek wektora leży wewnątrz zaokrąglonego obszaru rozproszenia danych.

Warto jest podjąć trud, aby zaprezentowany tu, przeznaczony dla wieloparametrowych badań fizycznych, sposób dokładnego przetwarzania danych próbek multi-mezurandów o licznych elementach zaadoptować dla metrologii o najwyższej dokładności i następnie przystosować go też do szerszego stosowania w mniej dokładnych wieloparametrowych pomiarach użytkowych, w tym dla mało licznych próbek. W szczególności dotyczy to przypadków o rozrzutach wyników obserwacji opisywanych niepewnością typu A porównywalną lub większą od niepewności typu B szacującej błędy instrumentalne nieusuwalne przez poprawki. Powinna ostatecznie zastać określona najkorzystniejsza procedura, którą można by w pomiarach pośrednich zalecić do zaokrąglania elementów macierzy kowariancji i korelacji poniżej progów jednolitego zaokrąglania, w tym do dwu lub jednej cyfry znaczącej, rekomendowanych przez GUM w opisach niepewności skalarów.

Zarówno w fizyce, jak i w metrologii, a również we wszystkich pomiarach wieloparametrowych w wielu innych dziedzinach, powinno się też wdrażać stosowanie metod statystyki najbardziej właściwej dla danego przypadku, w tym i gdy zajdzie taka potrzeba, najnowszej, np. na powierzchniach krzywo liniowych [5].

Przewiduje się konieczność istotnych zmian w sposobie prezentacji i posługiwania się danymi pomiarowymi. Do rozwiązania jest jeszcze szereg problemów nie tylko podanych w tej pracy, ale i wiele innych, które w przyszłości mogą uczynić bardziej komfortową i użyteczną pracę z danymi pomiarowymi w nauce, metrologii i technice pomiarowej oraz innych dziedzinach.

Warto jest podjąć prace komplementarne z od dawna oczekiwany Suplementem 2 do GUM o wyrażaniu wyników pomiarów wieloparametrowych, które objęłyby też międzynarodową standaryzacją dualny sposób publikowania, rozpowszechniania i gromadzenia danych. Publikacji na papierze obligatoryjnie towarzyszyłby plik z oryginalnymi danymi numerycznymi [7-10]. Można by wówczas w pełni wykorzystywać praktycznie nieograniczone możliwości elektronicznych środków multimedialnych (e-publishing).

## 8. Literatura

- [1] Gavrin, D., Golashvili et al [CODATA Task Group on Publication of Data in the Primary Literature]: Guide for the Presentation in the Primary Literature of Numerical Data Derived from Experiments, CODATA Bull. 9 1973.
- [2] Lide David R.: Data quality - more important than ever in the Internet age. CODATA DSJ (Data Science Journal) 6, (2007), 154-155.
- [3] Guide to the expression of uncertainty in measurement. ISO/IEC Guide 98:1995, 2nd ed. (Wyrażanie Niepewności Pomiaru Przewodnik. GUM, Wyd. Alfavero Warszawa 2002.
- [4] ISO/IEC Guide 98-3:2008. Uncertainty of measurement – Part 3: Guide to the expression of uncertainty in measurement (GUM 1995), revised 2008 JCGM-100-2008.
- [5] Penness X.: Intrinsic Statistics on Riemannian Manifolds: Basic Tools for Geometric Measurements. J. of Math. Imaging and Vision 25 2006, 127.
- [6] Ezhela V.: A multi-measurand ISO GUM supplement is urgent. CODATA DSJ, 6, S676-S789 [Errata: DSJ, 7, 2007, E2-E21.
- [7] Ezhela V.: Comments on some clauses of GUM which provoking the incorrect presentation of measured data in scientific literature. Materiały Kongresu Metrologii KM 2010 (CD i abstrakt polski, wersję polską może udostępnić Z.L. Warsza), Pol. Łódzka.
- [8] Ezhela V.: Physics and metrology. Mat. Kongresu Metrologii KM 2010 (CD i rozszerzony abstrakt polski, wersję polską może udostępnić Z.L. Warsza), Pol. Łódzka.
- [9] Ezhela V. V.: O korektnom chislovom predstavlenii rezultatov sovmestnykh izmerenii. Preprint 2006-28, Instytut Fizyki Wysokich Energii (IHEP), Protvino, Rosja (po rosyjsku).
- [10] Ezhela V., Warsza Z.: O konieczności standaryzacji metod opisu i publikowania rezultatów pomiarów wieloparametrowych. PAKgoś nr 4/2010, s. 8 – 14.
- [11] Warsza Z., Ezhela V.: Zarys podstaw teoretycznych wyznaczania i numerycznej prezentacji wyników pomiarów pośrednich wieloparametrowych. PAK nr 3/2011.
- [12] Kubisa S.: Porządek procedur w pomiarze laboratoryjnym. Metoda Monte Carlo. Metrologia dziś i jutro. Oficyna Wyd. Pol. Wr. Wrocław 2010, s.23-38.

otrzymano / received: 26.10.2010

przyjęto do druku / accepted: 02.02.2011

artykuł recenzowany