

Zygmunt Lech WARSZA

PRZEMYSŁOWY INSTYTUT AUTOMATYKI I POMIARÓW (PIAP)
Al. Jerozolimskie 202, 02-486 Warszawa

Dwuelementowe estymatory wartości mierzand próbek danych pomiarowych o trapezowych rozkładach prawdopodobieństwa – przegląd prac

Doc. dr inż. Zygmunt Lech WARSZA

ukończył Miernictwo Elektryczne w Politechnice Warszawskiej 1959, doktorat 1967, docent od 1970. Pracował w Instytucie Elektrotechniki i Politechnice Warszawskiej, obecnie w PIAP. Zorganizował i prowadził: Wydział Transportu Politechniki Świętokrzyskiej, Ośrodek Aparatury Pomiarowej IMGW, Zakład Automatyzacji i Techniki Pomiarowej Instytutu Chemii Przemysłowej. Był Doradcą Ministra Edukacji Narodowej. Wykładał metrologię i diagnostykę techniczną w Politechnice Radomskiej.

e-mail: zlw@op.pl



Streszczenie

Dla próbek modelowanych symetrycznymi trapezowymi rozkładami prawdopodobieństwa omówiono estymatory dwuelementowe (2C) wartości mierzand jako formę liniową wartości średniej i środka rozpięcia próbek. Wyznaczono metodą Monte Carlo ich współczynniki i odchylenia standardowe (SD) jako funkcje kurtozy E lub stosunku podstaw trapezu β . Wykazano, iż estymator 2C trapezowego rozkładu liniowego Trap w zakresie $0 < \beta < 0,75$ ma mniejsze SD niż środek rozstępu i średnia danych próbek. Określono też przedziały β dla najlepszych estymatorów rozkładu CTrap - trapez krzywoliniowy. Zaproponowano uproszczony estymator 2C o obu współczynnikach 0,5. Poprzez symulację i przykład liczbowy sprawdzono jego skuteczność dla różnych β . Ten nie objęty zaleceniami GUM estymator można zastosować w praktyce by dokładniej wyznaczyć niepewność typu A.

Słowa kluczowe: trapezowe rozkłady gęstości prawdopodobieństwa, PDF, estymatory, środek rozpięcia, ocena niepewności mierzand.

Two-component estimators of the measurand value of trapezoidal probability distributions of the data sample – overview of works

Abstract

Two-component estimators (2C) of the measurand value of data samples modeled by symmetric trapezoidal probability distributions are considered and their accuracy is evaluated. For symmetrical trapezoidal PDF of straight as well curved sides, using the Monte-Carlo simulation method standard deviations (SD) of above estimators are evaluated. Established are broad range $0 < \beta < 0,75$ of upper and bottom bases ratios β of the most accurate 2C estimator as the linear form of mid-range and mean values of the sample for linear trapezoidal PDF Trap(a,b), and shorter for CTrap(a,b,d). The new simplified 2C-estimator of equal coefficients is also proposed and positively tested. Both estimators successfully extend existing estimation of the measurand value and its accuracy by the uncertainty type A recommended in the international Guide GUM [1]. Problems solved are not described before in literature and could be effectively applied in practice of measurements and applied statistics for estimation of more accurate results.

Keywords: trapezoidal probability density functions, PDF, midrange, estimators, evaluation of measurand uncertainty.

1. Wprowadzenie

Do opisu rozrzutu wartości mierzand (wartości mierzonej) obiektów i zjawisk losowych w systemach pomiarowych obok normalnego rozkładu prawdopodobieństwa stosuje się też inne rozkłady nazywane nie-gaussowskimi, np. równomierny oraz różne sploty, w tym rozkład trapezowy. W [7], [10] omówiono otrzymane metodą symulacji Monte Carlo (MC) wyniki badań efektywności wartości średniej \bar{X} , środka rozpięcia $q_{V/2} = 0,5(X_{max} - X_{min})$ i mediany X_{med} jako estymatorów jednoelementowych (1C) mierzand dla próbek danych o rozkładzie

gęstości prawdopodobieństwa (PDF) w postaci symetrycznego trapezu o bokach liniowych, oraz trapezu krzywoliniowego wklęsłego, oznaczonych w Suplemencie 1 [1] odpowiednio symbolami Trap oraz CTrap. Podano odchylenia standardowe (SD) tych estymatorów w funkcji liczby n danych próbki i kurtozy E lub stosunku podstaw trapezu β . Dla trapezów liniowych Trap wartość średnia próbki ma najmniejsze SD tylko w przedziale $0 < \beta < 0,35$, zaś powyżej, tj. dla $0,35 \leq \beta \leq 1$ dominuje środek rozstępu. Dla trapezów CTrap przedział dominacji środka rozstępu jest węższy, tj. $1 > \beta > 0,5$. W przedziale $0,5 > \beta > 0,08$ najmniejsze SD ma wartość średnia i następnie pojawia się wąski przedział o najmniejszym SD dla mediany. Jako kolejne zagadnienie w [7 - 10] analizowano, czy i jaką dalszą poprawę oszacowania dokładności wyniku pomiaru z próbek danych o rozkładach trapezowych uzyska się stosując liniowe estymatory kilkuelementowe. Syntezę wyników tych badań i ich porównanie z estymatorami 1C przedstawia się poniżej.

2. Estymatory dwuelementowe jako funkcje kurtozy E

Zakharov i Stephen [4] badali metodą Monte Carlo dla rozkładów symetrycznych efektywność liniowego estymatora trójelementowego (3C) o postaci

$$\hat{X} = k_1 \bar{X} + k_2 q_{V/2} + k_3 X_{med} \quad (1)$$

gdzie: \bar{X} - wartość średnia, $q_{V/2}$ - środek rozstępu, X_{med} - mediana.

Z ich symulacji wynikało, że dla rozkładu Trap(a,b) o zakresie kurtozy $E \in (-1,15; -0,2)$ wystarczą tylko dwa współczynniki k_1, k_2 , gdyż $k_3=0$ i estymator (1) staje się dwuelementowy. Estymatory takie będą oznaczane dalej symbolem 2C. Przy wartościach k_1, k_2 podanych w [4] estymator ten jest obciążony, gdyż nie spełnia jednego z podstawowych wymagań efektywności, tj. warunku $k_1 + k_2 = 1$ [3]. Wspólnie z M. Galowską sprawdziliśmy i zweryfikowaliśmy te współczynniki metodą MC [7, 10] otrzymując:

$$k_1 = -1,05E + 1,22, \quad k_2 = 1,05E - 0,22 \quad (2)$$

Natomiast dla próbek o rozkładzie CTrap(a, b, d), tj. o PDF w kształcie wklęsłego trapezu krzywoliniowego, z symulacji MC w zakresie kurtozy $E \in (-1,2; 0,2)$ otrzymaliśmy dla nieobciążonego estymatora (1) następujące współczynniki:

$$k_1 = \begin{cases} 0, & \text{if } E \leq -1,15; \\ 1,05 \cdot E + 1,22, & \text{if } -1,15 < E \leq -0,2; \\ 1, & \text{if } E \geq -0,2; \end{cases}$$

$$k_2 = 1 - k_1 = \begin{cases} 1, & \text{if } E \leq -1,15; \\ -1,05 \cdot E - 0,22, & \text{if } -1,15 < E \leq -0,2; \\ 0, & \text{if } E \geq -0,2; \end{cases} \quad (3)$$

$$k_3 = 0.$$

Tę samą wartość E mogą mieć rozkłady o różnym kształcie [3]. Wyznaczanie współczynników k_1, k_2 estymatora (1) przy $k_3=0$, poprzedzić trzeba oszacowaniem kurtozy E rozkładu eksperymentalnego próbek, lub przyjętego dla niej modelu. W [9] metodą MC wykazaliśmy, że obliczenia kurtozy E na podstawie danych próbki są mało dokładne, szczególnie dla małej liczby jej elementów n .

3. Estymatory 2C jako funkcje stosunku podstaw trapezu β

Standardowe odchylenia estymatorów dwuelementowych dla trapezowych rozkładów PDF dogodniej przedstawiać bezpośrednio w funkcji ich parametrów geometrycznych, najlepiej jednolicie, tak jak dla estymatorów jednoelementowych, tj. w funkcji stosunku β lub β_c podstaw trapezu [7, 10]. Zależności współczynników k_1, k_2 od β otrzymuje się po przeliczeniu z kurtozy E według krzywych podanych w [7, 10] na rys. 3.

Zbadano też metodą MC dla całej rodziny PDF symetrycznych trapezów liniowych, jak efektywne są ich nieobciążone estymatory 2C [7]. Estymator taki zapisuje się ogólnie jako

$$\hat{X} = k_1 \bar{X} + (1 - k_1) q_{V/2} \quad (4)$$

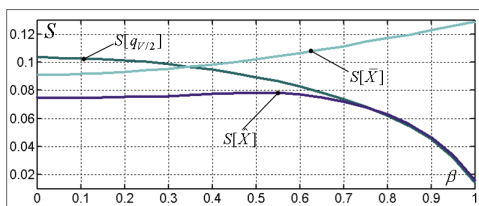
Estymator ten symulowano metodą MC dla różnych kształtów rozkładów trapezowych począwszy od prostokąta, aż do trójkąta i próbek o różnej liczbie obserwacji pomiarowych n . Wyznaczono wartości k_1 dla warunku $\min S[\hat{X}]$ z niepewnością $< 10\%$

$$k_1 = \begin{cases} -0,12\beta + 0,56, & \text{if } 0 < \beta < 0,5 \\ 1 - \beta, & \text{if } 0,5 < \beta < 1 \end{cases} \quad (5)$$

$$k_2 = 1 - k_1 = \begin{cases} 0,12\beta + 0,44, & \text{if } 0 < \beta < 0,5 \\ \beta, & \text{if } 0,5 < \beta < 1 \end{cases}$$

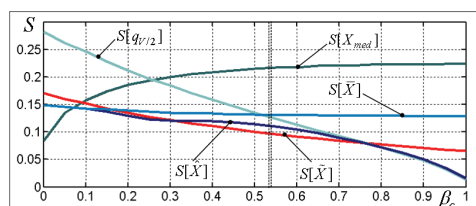
Dla trapezów o różnych stosunkach podstaw β , wartości tych współczynników pozostają stałe dla n już od 10, aż do 10000.

Na rysunku 1 porównano odchylenia standardowe $S[\hat{X}]$ estymatora 2C, średniej $S[\bar{X}]$ i środka rozpięcia $S[q_{V/2}]$ w funkcji stosunku podstaw β trapezu liniowego jako modelu dla PDF próbki. Z porównania wynika, że estymator dwuelementowy \hat{X} jest lepszy od estymatorów jednoelementowych w szerokim przedziale $0 \leq \beta \leq 0,75$.



Rys. 1. Odchylenia standardowe wartości mierzand dla: $S[\hat{X}]$ - estymatora 2C według (2) oraz $S[\bar{X}]$ - średniej i $S[q_{V/2}]$ - środka rozpięcia próbki o rozkładzie Trap(a, b) (PDF trapez liniowy) w funkcji stosunku jego podstaw β . Liczność próbki $n = 400$

Fig. 1. Standard deviations $S[\hat{X}]$ of measurand value 2C from eq. (2), $S[\bar{X}]$ and $S[q_{V/2}]$ of the sample of linear trapeze PDF as function of a ratio β of bases. Number of sample elements $n = 400$



Rys. 2. Odchylenia standardowe estymatorów mierzand w funkcji stosunku podstaw β_c trapezu krzywoliniowego jako PDF próbki

Fig. 2. Standard deviations of different measurand estimators as function of a ratio of bases β_c of curvilinear trapeze as model of the sample PDF

Dla próbki o PDF modelowanym trapezem krzywoliniowym CTrap(a, b, d) otrzymano podobne przebiegi standardowych

odchyleń estymatorów w funkcji jego β_c - rys. 2 [7]. W wąskim zakresie $\beta_c \in [0; 0,8]$ najlepszym estymatorem jest tu mediana, czego też nie zauważano we wcześniejszej literaturze. Estymator dwuelementowy \hat{X} jest lepszy od średniej i od środka rozpięcia $q_{V/2}$ w całym zakresie β_c , gdyż jego odchylenie standardowe $S[\hat{X}]$ jest najmniejsze, szczególnie gdy $\beta_c \rightarrow 1$, tj. dla trapezów bliskich prostokąta.

Badano też nieliniowe estymatory 2C, ale nie otrzymano bardziej interesujących rezultatów niż powyższe.

4. Uproszczony estymator dwuelementowy

Do stosowania w praktyce w [7] zaproponowano uproszczony liniowy estymator 2C o jednakowych współczynnikach $k_1 = k_2 = 0,5$

$$\tilde{X} = 0,5 \bar{X} + 0,5 q_{V/2} \quad (6)$$

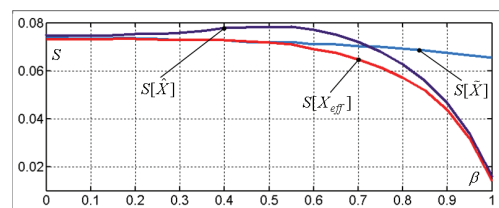
Właściwości tego dwuelementowego estymatora gruntownie przeanalizowano metodą MC. Na rysunku 2 zamieszczono przebieg jego odchylenia standardowego $S[\tilde{X}]$ w funkcji β dla próbki o PDF jako trapezie liniowym. Z porównania rezultatów wynika, że uproszczony estymator 2C według (6) niewiele odbiega od najlepszych k_1, k_2 według (5) w szerokim zakresie stosunku podstaw trapezów $0 < \beta < 0,75$. Jeśli rozkład trapezowy traktować jako spłot dwu rozkładów równomiernych, to stosunek szerokości prostokątów wynosi $2(1+2\beta)$. Zakresowi $1 > \beta > 0,75$ odpowiada stosunek szerokości powyżej 8, czyli dominuje jeden z rozkładów równomiernych i wówczas najlepszym jest środek rozpięcia $q_{V/2}$ - patrz rys. 1 i 2.

Uproszczony estymator 2C według (6) można stosować też dla rozkładu o postaci trapezu krzywoliniowego CTrap(a, b, d). Wynika to z analizy przebiegów na rys. 2.

Estymator (6) nie jest najbardziej efektywny w całym zakresie β . Sprawdzenie kilku przypadków dla $\beta > 0,54$ uzasadnia, że dla rozkładów trapezowych można rekomendować do stosowania różne postacie estymatora X_{eff} w dwu zakresach β , tj.:

$$X_{eff} = \begin{cases} \frac{1}{2} \cdot q_{V/2} + \frac{1}{2} \bar{X}, & \text{if } 0,54 < \beta < 0,8; \\ q_{V/2} & \text{if } \beta > 0,8. \end{cases} \quad (7)$$

Po uwzględnieniu (5) otrzymano zależności od β podane na rys. 3.



Rys. 3. Odchylenia standardowe dwu estymatorów 2C według (5) i (6) oraz estymatora X_{eff} według (7) w funkcji stosunku podstaw β trapezu

Fig. 3. Standard deviations of two 2C estimators of (5) and (6) and estimator X_{eff} of (7) as function of trapeze base ratio β

5. Podstawy teoretyczne oceny niepewności

Odchylenie standardowe $S[\hat{X}]$ dwuelementowego estymatora (4)

$$S(\hat{X}) = \sqrt{k_1^2 S^2[\bar{X}] + (1 - k_1)^2 S^2[q_{V/2}] + 2\rho k_1(1 - k_1) S[\bar{X}] \cdot S[q_{V/2}]} \quad (8)$$

gdzie: $S[\bar{X}] = \frac{S_x}{\sqrt{n}}$; $S^2[q_{V/2}] = \frac{V^2(1 - \beta^2)(4 - \pi)}{8n}$ [13]; $V = X_{max} - X_{min}$

Rekomendacje o wartościach współczynnika korelacji ρ otrzymane w [7, 10] z modelowania MC podano w tabeli 1.

Tab. 1. Zalecane wartości współczynników korelacji
Tab. 1. Recommended values of correlation coefficients

n	[100; 200)	[200; 300)	[300; 500)	$n \rightarrow \infty$
ρ	0,25	0,2	0,15	$\rho \rightarrow 0$

Dla dużych n udział składnika od wpływu korelacji jest nieduży i

$$S(\hat{X}) = \sqrt{k_1^2 S^2[\bar{X}] + (1 - k_1)^2 S^2[q_{V/2}]} \quad (9)$$

Różnice pomiędzy wartościami otrzymanymi analitycznie i z modelowania były mniejsze niż 5%.

Najlepszy estymator powinien mieć minimalną wariancję. Jego współczynnik k_1 otrzymuje się dla $\frac{\partial S^2[X_{eff}]}{\partial k_1} = 0$. Optymalna wartość k_1 wyznaczona analitycznie z (9) dla dużych n wynosi

$$k_1 = \frac{S^2[q_{V/2}]}{S^2[\bar{X}] + S^2[q_{V/2}]} \quad (10)$$

Standardowe odchylenie (odpowiednik niepewności u_A) dla estymatora 2C według (6) o $k_1=k_2=0,5$ oraz estymatora X_{eff} według (7) w zakresie $0,54 < \beta < 0,8$ wyznacza się jako

$$u_A(\tilde{X}) = \frac{1}{2} \sqrt{S^2[\bar{X}] + S^2[q_{V/2}] + 2\rho \cdot S[\bar{X}] \cdot S[q_{V/2}]} = \\ = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{S_X^2}{n} + \frac{V^2(1-\beta^2)(4-\pi)}{8n} + \rho \frac{S_X V}{n} \sqrt{\frac{(1-\beta^2)(4-\pi)}{2}}} \quad (11)$$

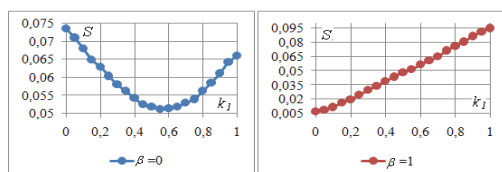
Dla próbek o dużym n składnik zależny od ρ staje się pomijalny i

$$u_A(\tilde{X}) = \frac{1}{2} \sqrt{S^2[\bar{X}] + S^2[q_{V/2}]} \quad (11a)$$

Różnice pomiędzy wartościami otrzymanymi na drodze analitycznej i z modelowania były mniejsze od 5%.

6. Estymator 2C w przypadkach szczególnych

Zależności standardowych odchyżeń S w funkcji k_1 dla granicznych przypadków trapezowego PDF (trójkąt, prostokąt) dla dużych n , tj. przy pomijalnym składniku od korelacji, podaje rys. 4.



Rys. 4. Zależności odchyżeń standardowych od współczynnika k_1 dla granicznych przypadków PDF trapezu liniowego
Fig. 4. Standard deviation on k_1 for both border cases of trapeze PDF

Wynika z nich wniosek intuicyjnie oczywisty, że trójkątny rozkład PDF ma właściwości pomiędzy Normalnym, a równomiernym. Można dla niego stosować jako najlepsze estymatory dwuelementowe 2C, natomiast dla rozkładu Normalnego najlepsza jest wartość średnia. Analitycznie dla dużych n otrzymuje się

Dla rozkładu trójkątnego ($\beta = 0$)

$$S^2[q_{V/2}] = \frac{V^2(4-\pi)}{8n} \quad \text{oraz} \quad k_1 = \frac{3(4-\pi)}{2+3(4-\pi)} \approx 0,56.$$

Wyniki pokrywają się z rezultatami symulacji metodą Monte Carlo.

Dla rozkładu trapezowego o granicznym $\beta = 0,35$ otrzyma się $S[\bar{X}] = S[q_{V/2}]$ i z (10):

$$k_1 = \frac{\sigma_X^2}{n} \bigg/ \frac{2\sigma_X^2}{n} = 0,5, \quad \text{a więc zgodnie z (5).}$$

Dla rozkładu prostokątnego ($\beta = 1$):

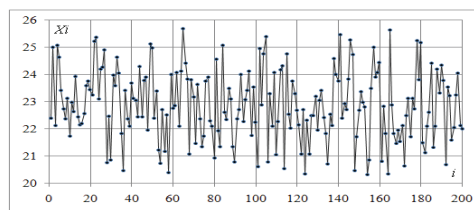
$$k_1 = \frac{\frac{3\sigma_X^2}{2(n+1)(n+2)}}{\frac{\sigma_X^2}{n} + \frac{3\sigma_X^2}{2(n+1)(n+2)}} = \frac{3n}{2n^2 + 9n + 2}$$

Jeżeli $n \rightarrow \infty$, to $k_1 \rightarrow 0$. Dla $n = 30$, $k_1 = 0,04$, zaś dla $n = 10$, $k_1 = 0,1$. Otrzymane wartości są bardzo bliskie $k_1 = 0$ dla $n \rightarrow \infty$.

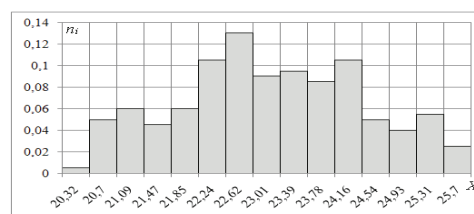
Rozważania zilustrowano przykładem liczbowym symulującym eksperyment pomiarowy [7]. Z populacji generalnej o trapezowym PDF pobrano próbkę o $n=200$ danych o wartościach losowych jak na rys. 5. Liczba n umożliwia stosowanie wzorów z rozdziału 5.

Sprawdzenie funkcji autokorelacji dla kilku sąsiednich obserwacji dało wynik negatywny. Przyjęto więc, że wpływ autokorelacji jest pomijalny. Próbka nie miała też zmieniających się wraz z próbkowaniem błędów systematycznych.

Wyznaczono dla próbki najlepszy estymator wartości mierzonej i jego niepewność standardową typu A oraz rozszerzoną przy pomijalnej niepewności typu B.



Rys. 5. Wartości obserwacji w próbce
Fig. 5. Values of sample observations



Rys. 6. Histogram względnych częstości danych próbki
Fig. 6. Histogram of relative frequencies of the data sample

Dane próbki uszeregowano w histogram o 15 przedziałach – rys. 6. (Przyjęto nieco większą liczbę przedziałów niż 9 według wzoru Sturgesa, ale liczba pomiarów w przedziale jest wystarczająca – średnio około 13,3). W pierwszej kolejności wybiera się najwłaściwszy model PDF dla próbki. Według kryterium χ^2 sprawdzono zgodność histogramu z trzema rozkładami teoretycznymi. Przy poziomie istotności 0,05 wyniki dla rozkładu Normalnego i równomiernego były ujemne [7]. Metodą najmniejszych kwadratów wybrano dla danych trapezowy rozkład PDF o podstawach 1,79 i 5,38. Ich stosunek $\beta=1/3$. Dla takiego trapezu, przy 11 stopniach swobody wynik testu $\chi^2=17,3 < \chi^2_{11,0,05}=19,7$ był pozytywny. Jeszcze korzystniejszy wynik zgodności dał test Kołgomorowa-Smirnowa dla dystrybuanty. Przy negatywnym wyniku trzeba zmniejszyć wymagania, lub uzyskać próbkę o większej liczbie obserwacji n , a przy nieznannej populacji dobierać inny model rozkładu. Przedstawione tu postępowanie dotyczy przypadków, gdy liczba obserwacji $n > 10$ i znany jest, nawet tylko orientacyjnie, stosunek podstaw β .

Dla symulowanego eksperymentalnego rozkładu próbki otrzymano następujące wartości estymatorów:

$$\bar{X} = 22,873, \quad q_{V/2} = 23,010, \quad \tilde{X} = 22,942$$

Odchylenie standardowe próbki: $S_X = 1,309$

Odchylenie standardowe średniej: $S[\bar{X}] = S_X / \sqrt{n} = 0,0926$

Odchylenie standardowe środka rozpięcia próbki:

$$S^2[q_{V/2}] = \frac{V^2(1-\beta^2)(4-\pi)}{8n} = 0,089$$

Odchylenie standardowe estymatora 2-elementowego

$$u_A(\tilde{X}) = \frac{1}{2} \sqrt{S^2[\bar{X}] + S^2[q_{V/2}] + 2 \cdot 0,2 \cdot S[\bar{X}] \cdot S[q_{V/2}]} = 0,0703$$

Niepewność standardowa 2-elementowego estymatora o współczynnikach (5) różni się niewiele od podanej powyżej.

Współczynniki rozszerzenia estymatorów $q_{V/2}$ i \tilde{X} nie są znane, ale ich rozkłady są nieco smuklejsze niż normalny. Dla wszystkich trzech estymatorów przyjęto prawdopodobieństwo $P=0,95$ i jednakowe w przybliżeniu współczynniki rozszerzenia $k_p = k_{0,95} = 1,96$. Rozszerzona niepewność estymatora \tilde{X} wynosi $U_p(\tilde{X}) = k_p \cdot u_A(\tilde{X})$

Wyniki dla trzech estymatorów mezurandu zawiera tabela 2.

Tab. 2. Trzy estymatory wyniku pomiaru wraz z niepewnością rozszerzoną
Tab. 2. Three estimators of measurement result with extended uncertainty

	Wartość wyniku i jego niepewność u_A	Wartość z niepewnością rozszerzoną oraz granice jej przedziału
\bar{X}	$X = 22,87; u_A = 0,09$	$X = (22,87 \pm 0,19), P = 0,95$ $X \in (22,68; 23,06), P = 0,95$
$q_{V/2}$	$X = 23,01; u_A = 0,09$	$X = (23,01 \pm 0,18), P = 0,95$ $X \in (22,83; 23,19), P = 0,95$
\tilde{X}	$X = 22,94; u_A = 0,07$	$X = (22,94 \pm 0,14), P = 0,95$ $X \in (22,87; 23,15), P = 0,95$

Tak jak przewidywano, najdokładniejszy jest ostatni wynik dla uproszczonego estymatora 2C, który ma najmniejsze $u_A = S[\tilde{X}]$.

Można zauważyć, że w przykładzie tym wartości mezurandu otrzymane dla różnych estymatorów różnią się niewiele i każdy mieści się w przedziale rozszerzonej niepewności dwu pozostałych.

7. Podsumowanie i wnioski

- Prawidłowe oszacowanie wyznaczonej statystycznie niepewności dla próbki danych o trapezowym rozkładzie PDF (odpowiednik u_A według Przewodnika GUM) istotnie zależy od wyboru efektywnego, tj. najbardziej dokładnego jej estymatora.
- W prowadzonych przez autora pracach [7-10] wykazano, że wybór najlepszego jednoelementowego estymatora wartości mezurandu dla próbki o rozkładzie PDF modelowanym symetrycznym trapezem zależy od jego kształtu opisanego przez stosunek podstaw β . Jeśli trapez jest bliski prostokąta, tj. w przedziale $1 \geq \beta \geq 0,35$ najlepszym jest środek rozstępu próbki, zaś poniżej $\beta = 0,35$, aż do rozkładu trójkątnego o $\beta = 0$ lepsza jest wartość średnia.
- Jeszcze lepszy dla rozkładów trapezowych jest estymator 2-elementowy 2C jako forma liniowa średniej i środka rozpięcia.
- W szerokim zakresie kształtów trapezu ($0,75 \geq \beta \geq 0$) można stosować uproszczony estymator 2-elementowy według (6) - o jednakowych współczynnikach $k_1 = k_2 = 0,5$. Jest on wystarczająco dokładny w praktyce, a jego odchylenie standardowe mało zależy od liczby pomiarów $n > 10$ i od stosunku podstaw $\beta \leq 0,55$ (rys. 3).

- Estymatory te można stosować też w metodzie *Bootstrap* [11, 12], która nie wymaga, by wyznaczenie wyniku było poprzedzone wyborem modelu rozkładu dla próbki.
- Dla próbki o rozkładzie trapezowym przy liczbie danych $n \geq 10$ można przyjąć, że współczynniki jej estymatorów nie zależą od n . Próbkę o $n < 10$, trzeba modelować indywidualnie.
- Wszystkie wnioski zostały sprawdzone pozytywnie przez symulacje Monte Carlo i na kilku przykładach numerycznych.
- Podane powyżej, inne niż wartość średnia, jedno- i dwuelementowe estymatory optymalne dla rozkładów trapezowych. Nie występują też w zaleceniach przewodnika GUM o wyznaczaniu niepewności pomiarów typu A. Jedynie zalecenia amerykańskiego instytutu metrologicznego NIST dopuszczają inne znane formuły [2]. Wyniki prac przedstawiano częściowo na kilku metrologicznych konferencjach krajowych i międzynarodowych [8, 9, 12].
- Proponowany dla rozkładów trapezowych liniowy estymator 2C według (4) i (5) oraz jego uproszczona wersja (6) o jednakowych współczynnikach 0,5 dla wartości średniej i środka rozpięcia, można stosować nie tylko w praktyce pomiarowej dla coraz częstszych przypadków nie objętych dotąd zaleceniami Przewodnika GUM i jego Suplementami, ale też i w statystyce użytkowej, w której trapezowe modele rozkładów są dość często używane [5] (np. liczba urzędzeń w przedsiębiorstwie, ludzi w miejscowości według wieku itp).

Autor serdecznie dziękuje mgr inż. Marynie Galowskiej, obecnie asystentowi naukowemu w Instytucie Metrologii Techniki Wytwarzania TU w Braunschweig, Niemcy, która w latach 2007 - 2009 jako aspirantka Ukraińskiego Narodowego Uniwersytetu Technicznego z własnego wyboru współpracowała z autorem w powyższych zagadnieniach i przy dużym zaangażowaniu uzyskała wiele wyników tej pracy metodą symulacji Monte Carlo. Dzięki temu udało się sprawdzić szereg intuicyjnych idei autora dotyczących rozkładów trapezowych i znaleźć dla nich nowe estymatory.

8. Literatura

- [1] Evaluation of measurement data - Guide to the expression of uncertainty in measurement. (GUM), BIPM, JCGM 100, Ed. 2008, and Supplement 1: Propagation of distributions using a Monte Carlo method (Ed. 2007).
- [2] Taylor B. N., Kuyatt Ch. E.: Guidelines for Evaluating and Expressing the Uncertainty of NIST Measurement Results. NIST Technical Note 1297, 1994.
- [3] Novickij P.V., Zograf I.A.: Ocenka pogreshnostej rezultatov izmerenii. Energoatomizdat Leningrad, 1985.
- [4] Zakharov I.P., Shtefan N.V.: Algorithms for reliable and effective estimation of type A uncertainty. Measurement Techniques, vol. 48, 5, 2005 p.427-437, www.Springer.com. (transl. from Izmeritel'naja Tekhnika).
- [5] Van Dorp J.R., Kotz S.: Generalized Trapezoidal Distributions. Metrika, Vol. 58, Issue 1, July 2003.
- [6] Kacker R. N., Lawrence J. F.: Trapezoidal and triangular distributions for Type B evaluation of standard uncertainty. Metrologia 44 (2007), pp. 117-127.
- [7] Warsza Z. L., Galovska M.: About the best measurand estimators of trapezoidal probability distributions. Przegląd Elektrotechniczny - Electrical Review 5' 2009, s. 86-91.
- [8] Warsza Z. L., Galovska M.: The best measurand estimators of trapezoidal PDF. Proc. of IMEKO World Congress "Fundamental and Applied Metrology", Sept. 2009, Lisbon Portugal, p.2405-2410.
- [9] Warsza Z. L., Galovska M.V.: Vybór najlutshej ocenki izmierajemoj velichiny na primere trapecievidnykh raspredelenij. Sistemy Obrobtiki Informacii Vip. 4(78), Kharkov, 2009 s. 28-31.
- [10] Warsza Z. L., Galovska M.: Estymatory wartości mezurandu dla trapezowych rozkładów prawdopodobieństwa danych pomiarowych. PAKgoś nr 1 2010, s. 12-17.
- [11] Galovska M., Warsza Z. L.: The ways of effective estimation of measurand. PAKgoś nr 1 2010, p. 18-20.
- [12] Galovska M., Warsza Z. L.: Estymatory wartości mezurandu próbek danych o rozkładach niegaussowskich., Metrologia dziś i jutro. Oficyna Wyd. Pol. Wrocławskiej, Wrocław 2010, s. 59 -72.