

Zygmunt Lech WARSZAPRZEMYSŁOWY INSTYTUT AUTOMATYKI I POMIARÓW (PIAP)
Al. Jerozolimskie 202, 02-486 Warszawa**Jednoelementowe estymatory wartości mierzand próbek o kilku niegaussowskich rozkładach prawdopodobieństwa - przegląd**

Doc. dr inż. Zygmunt Lech WARSZA

Ukończył Miernictwo Elektryczne w Politechnice Warszawskiej 1959, doktorat 1967, docent od 1970. Pracował w Instytucie Elektrotechniki i Politechnice Warszawskiej, obecnie w PIAP. Zorganizował i prowadził: Wydział Transportu Politechniki Świętokrzyskiej, Ośrodek Aparatury Pomiarowej IMGW, Zakład Automatykacji i Techniki Pomiarowej Instytutu Chemii Przemysłowej. Był Doradcą Ministra Edukacji Narodowej. Wykładał metrologię i diagnostykę techniczną w Politechnice Radomskiej.



e-mail: zlw@op.pl

Streszczenie

Przedstawiono wyniki badań efektywności różnych jednoelementowych estymatorów wartości mierzand (wielkości mierzonej) dla próbek danych pomiarowych o kilku niegaussowskich rozkładach prawdopodobieństwa wykonane metodą symulacji Monte Carlo. Dla rozkładów trapezowych o bokach liniowych oraz krzywoliniowych wyznaczono standardowe odchylenia (SD) wartości średniej, środka rozpięcia i mediany w funkcji liczby n danych i kurtozy rozkładu próbki lub stosunku podstaw β trapezu. Dla trapezu liniowego o β od 1 do 0,35 środek rozpięcia próbki ma mniejszą SD niż jej wartość średnia. Podano też wyniki symulacji stosunków standardowych odchylen średniej i środka rozpięcia rodzin próbek danych modelowanych splotami rozkładów arc sin, normalnego i równomiernego.

Słowa kluczowe: trapezowe rozkłady prawdopodobieństwa, estymatory, środek rozpięcia, ocena niepewności mierzand.

One Component Estimators of Measurand Value of Data Samples of Some Non-Gaussian PDF-s - overview**Abstract**

The single- component estimators (1C) of the measurand value of data samples modelled by the few non-Gaussian probability distributions (PDF) are considered and their accuracy are evaluated. For symmetrical trapezoidal PDF of straight as well curved sides, using the Monte-Carlo method of simulation standard deviation (SD) of mean value, mid-range and median estimators are evaluated. It is established that in the ratio of upper and bottom bases of trapeze in the range from 1 to 0,35 the most accurate is the mid-range. Below this range smaller is standard deviation (SD) of the mean value. Investigated are also ratios of mean and midrange SD of arcsin convolutions with normal or uniform PDF models for simulated data samples.

Keywords: trapezoidal probability density functions, PDF, midrange, estimators, measurand uncertainty evaluation.

1. Wstęp

Międzynarodowy Przewodnik GUM [1] zaleca, aby po usunięciu znanych błędów systematycznych, wyznaczać metodą statystyczną typu A niepewność standardową próbki danych pomiarowych jako standardowe odchylenie (w skrócie SD) jej wartości średniej, czyli tak jak dla rozkładu Normalnego przy nieskorelowanych (statystycznie niezależnych) danych eksperymentalnych. Tymczasem rozkład ten jest tylko modelem teoretycznym o funkcji Gaussa przebiegającej w zakresie $\pm\infty$. Nie występuje on w rzeczywistości, gdyż wymagało by to nieskończonej liczby oddziaływań losowych. Zwykle liczba ta jest skończona i może dominować kilka z nich, a rozrzuty wartości danych eksperymentalnych występują w ograniczonym przedziale. Próbkę rzeczywistą lepiej modelują niegaussowskie rozkłady prawdopodobieństwa, w tym z estymatorami środka grupowania o mniejszym SD

niż dla wartości średniej. Poprawny wybór najefektywniejszego estymatora próbki i prawidłowe oszacowanie jego SD rzutuje na dokładność oceny wyniku pomiarów. Amerykański Instytut NIST dopuszcza wyznaczanie niepewności typu A również według innych niż GUM zależności statystycznych [3], a Przewodnik NASA [4] omawia inne rozkłady.

W kilku krajach i w skali międzynarodowej prowadzi się badania nad udoskonaleniem zaleceń przewodnika GUM i rozszerzeniem ich na pomiary dynamiczne oraz pomiary procesów. Tematyką tą zajmował się też autor [5a-c, 6a-c, 10a-d]. W pracach [6a-c], dla pomiarów o równomiernym próbkowaniu opisano sposób czyszczenia surowych danych pomiarowych z nieznanymi a priori regularnymi zakłóceniami oraz możliwość automatyzacji szacowania niepewności procesów na bieżąco. W [5a-c] omówiono metodę wyznaczania standardowego odchylenia estymatorów dla próbki o skorelowanych danych i wprowadzono zastępczą liczbę pomiarów $n_{eff} < n$, którą można wykorzystywać w procedurach według GUM. Ponadto wykazano, że najlepszym jednoelementowym estymatorem mierzand próbki o rozkładzie równomiernym jest środek rozpięcia, a dla dwu-wykładniczego – mediana. Badano też efektywność estymatorów kilku rozkładów jako najprostszyc splotów, w tym rozkładów trapezowych [10a-d]. Poniżej podaje się przegląd uzyskanych wyników dla ich estymatorów jednoelementowych (1C).

2. Najlepsze estymatory jednoelementowe próbek danych o rozkładach trapezowych**Rozkład o postaci trapezu liniowego Trap**

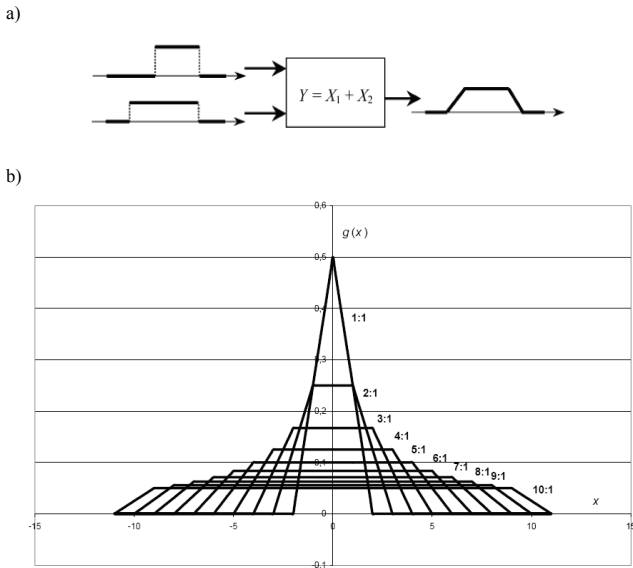
Rozkład gęstości prawdopodobieństwa (PDF) w postaci symetrycznego trapezu o prostoliniowych bokach i polu równym 1 w Suplemencie 1 do GUM [2] (tabela 1) oznaczony jest symbolem Trap (a, b). Można nim opisywać zarówno rozkłady populacji parametrów badanego obiektu [4, 10], jak i niepewności wyznaczone oboma metodami: typu B [8] i typu A. Sygnały losowe o takich rozkładach pojawiają się w systemach pomiarowych jako wynik splotu składowych o rozkładach równomiernych występujących przy kwantowaniu sygnałów analogowych i zliczaniu impulsów. Na przykład wynikiem sumowania dwu różnych rozkładów równomiernych jest rozkład o PDF w postaci symetrycznego liniowego trapezu – rys. 1a. Rodzinę trapezów dla różnych stosunków szerokości spleatanych rozkładów równomiernych przedstawia rys. 1b [9]. Mają one górną $2a$ i dłuższą dolną podstawę $2b$, a ich stosunek $\beta=a/b$ dla $b \geq a$ zmienia się w zakresie $\beta \in (0;1)$. Według [1] p. 4.3.9, środek $x_i=0,5(b_+-b_-)$ populacji o rozkładzie Trap ma wariancję

$$u^2(x_i) = b^2(1 + \beta)/6$$

Przypadkami granicznymi rodziny rozkładów Trap są:

- trójkąt ($\beta=0$) - dla jednakowych obu spleatanych rozkładów
- prostokąt ($\beta=1$) - gdy drugi ze spleatanych rozkładów równomiernych jest o pomijalnej szerokości.

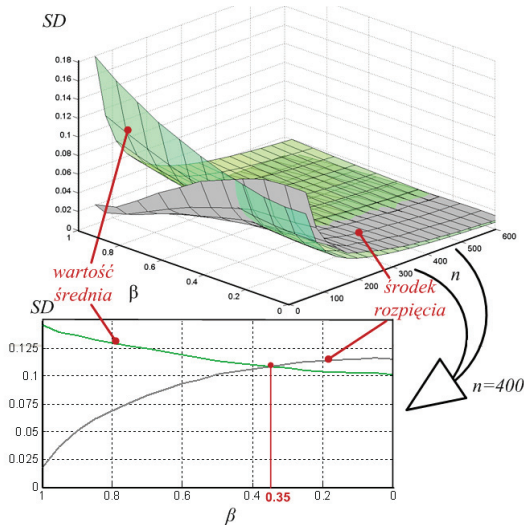
Miara efektywności estymatorów są ich odchylenia standardowe SD. Najbardziej efektywnym jednoelementowym estymatorem wartości mierzand dla próbek o rozkładzie trójkątnym jest wartość średnia, zaś dla próbek o rozkładzie prostokątnym - środek rozpięcia [5]. Aby wybrać właściwy estymator próbki modelowanej dowolnym z rodziny trapezów liniowych, trzeba podzielić je na dwa zbiory, w których dominuje jeden z tych estymatorów. Granicę podziału $\beta \equiv \alpha$ określono przez symulację metodą Monte Carlo.



Rys. 1. Rozkład o postaci symetrycznego trapezu liniowego: a) wynik sumowania dwu rozkładów równomiernych; b) rodzina splotów dwu rozkładów równomiernych o różnych stosunkach szerokości [9]
 Fig. 1. Linear symmetrical trapeze distribution: a) result of sum of two uniform distributions; b) set of convolutions of two uniform distributions of different width ratios

Model rozkładu trapezowego w metodzie MC uzyskiwano jedną z dwu technik [2], [8], [10a-d]:

- przez generację dwu rozkładów równomiernych i ich splot,
 - metodą funkcji odwrotnej (wyznaczonej dla trapezu w [8]).
- Przy symulacji, kolejne próbki o liczbie elementów n pobierano wielokrotnie z populacji losowych o rozkładzie Trap tworzonych dla różnych stosunków $\beta = a/b$ w zakresie $\beta \in (0;1)$. Dla liczebności 20 ... 10 000 obu próbek otrzymano stabilne wartości ich parametrów.



Rys. 2. Standardowe odchylenia SD wartości średniej i środka rozpięcia próbek o rozkładzie PDF w postaci trapezu liniowego Trap (a, b) [2]: u góry - w funkcji stosunku podstaw trapezu β i liczebności próbki n ; u dołu - dla $n=400$ w funkcji β [9d]
 Fig. 2. Dependences of sample mean and midrange standard deviations SD on size n and on ratio β of linear trapeze bases as PDF Trap (a, b) [2] -up; for $n=400$ -down [9d]

SD wartości średniej i środka rozpięcia próbek otrzymane z modelowania MC pokazano u góry rysunku 2. Są to powierzchnie trójwymiarowe w funkcji n i β . Poniżej podano ich przekrój dla $n=400$. Odchyłeń standardowych mediany SD o znacznie większych wartościach nie zamieszczono na rysunku 2. Z badań tych wynika ważny dla praktyki metrologicznej i statystyki stosowanej wniosek, nie podawany we wcześniejszej niż [10a-d] litera-

turze, że wybór najdokładniejszego estymatora 1C dla trapezowego rozkładu PDF zależy od jego kształtu. Dla trapezu liniowego jest to:

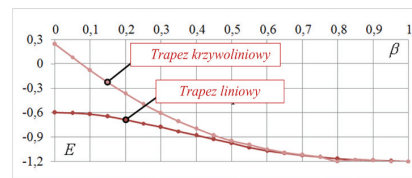
- środek rozpięcia w zakresie stosunku podstaw $1 \geq \beta > 0,35$,
- wartość średnia dla przedziału $0,35 \geq \beta \geq 0$, tj. tak jak dla rozkładu normalnego.

Taki sam rezultat otrzymano dla splotu dwu rozkładów równomiernych o stosunku zakresów około 2,05, który odpowiada powyższej granicznej wartości $\beta \approx 0,35$. Wyznaczona analitycznie [11] graniczna wartość stosunku $\beta \equiv \alpha$ pokryła się z wynikami wcześniejszych symulacji MC

$$\alpha = \frac{-10 + 3\pi + \sqrt{9\pi^2 - 72\pi + 140}}{14 - 3\pi - \sqrt{9\pi^2 - 72\pi + 140}} = 0,3545779$$

Novitzky i Zograph [7] podają topograficzną klasyfikację rozkładów, omawiają zależność efektywności środka rozpięcia od typu rozkładu oraz efektywność estymatorów w funkcji kontrkurtozy $\alpha \in (0;1)$ będącej odwrotnością współczynnika kurtozy $\varepsilon = 1/\alpha^1$.

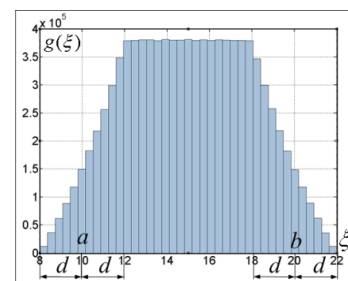
Na rysunku 3, dla dwu trapezowych rodzajów PDF przedstawiono kurtozę $E^{(1)}$ (zwaną też ekscesem) w funkcji stosunku podstaw trapezu $\beta = \beta_C$. Dla obu trapezów funkcje te są jednoznaczne. Odchylenia standardowe środka rozpięcia i wartości średniej trapezu liniowego są jednakowe dla $\alpha = 0,675$. Odpowiada to kurtozie $E = -0,805$ i trapezowi o wyznaczonym stosunku podstaw $\beta = 0,35$.



Rys. 3. Kurtoza E dwu rozkładów trapezowych w funkcji stosunku podstaw $\beta = \beta_C$
 Fig. 3. Coefficient of kurtosis E as vs. base ratio $\beta = \beta_C$ of two trapezes

Rozkład o postaci trapezu krzywoliniowego CTrap

Rozpatrzmy jeszcze rozkład trapezowy o symbolu CTrap(a,b,d) zamieszczony też w tabeli 1 Suplementu 1 do GUM [2]. Jego PDF jest krzywoliniowym wklęsłym trapezem. Rozkład ten stosuje się, gdy długości górnej i dolnej podstawy nie są dokładnie znane i mogą zmieniać się w przedziałach $\pm d$, czyli gdy wynoszą $a \pm d$ i $b \pm d$, przy czym $a, b, d > 0$ oraz $a+d < b-d$. Histogram danych tego rozkładu symulowanych w wąskich przedziałach przedstawiono na rys. 4.



Rys. 4. Rozkład PDF CTrap - o kształcie trapezu krzywoliniowego
 Fig. 4. Curvilinear trapeze PDF CTrap

Rys. 5 pokazuje powierzchnie odchyłeń standardowych trzech podstawowych jednoelementowych estymatorów tego trapezu

¹⁾ Kurtoza $E = \varepsilon - 3$, ($\varepsilon \equiv \mu_4 / \sigma_x^4$, μ_4 - moment centralny rzędu czwartego próbki, σ_x - jej odchylenie standardowe). Dla rozkładu Normalnego $E=0$.

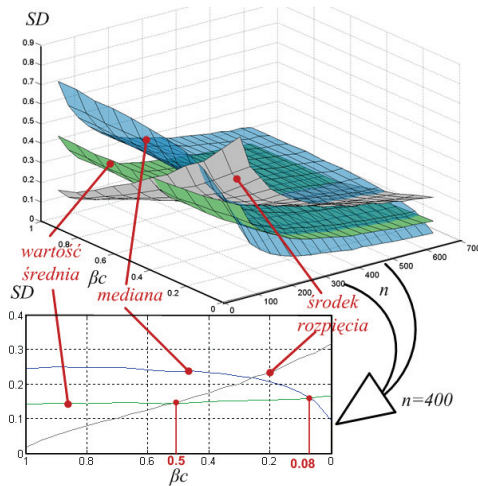
jako funkcje liczby obserwacji n w próbie i stosunku β_c największej górnej i najmniejszej dolnej podstawy jako

$$\beta_c = (a_2 - a_1 - 2d) / (b_2 - b_1 + 2d)$$

Występują tu trzy obszary. W pierwszym wąskim o małych β_c , tj. dla zakresu $0 < \beta_c < 0,08$, najlepszym estymatorem jest mediana, w następnym $0,08 < \beta_c < 0,5$ - wartość średnia, zaś środek rozpięcia dominuje dla $0,5 < \beta_c < 1$. Przy wyznaczaniu niepewności pomiarów należy wziąć pod uwagę, że jest ona wielkością drugiego rzędu i w części przypadków w praktyce, np. przy sprawdzaniu przyrządów wystarcza wyznaczyć z niepewnością nawet rzędu 20%. Wówczas:

$$d = \frac{(b-a)}{2} \cdot \frac{(1-\beta_c)}{(1+\beta_c)} = 0,3 \frac{(b-a)}{2} \Rightarrow \beta = 0,54$$

Można przyjąć, że wartość średnia jest najbardziej efektywnym estymatorem aż do granicy $\beta=0$ na rys. 5. Wówczas rozkłady o postaci trapezu krzywoliniowego będą miały, jak poprzednio, tylko dwa obszary o różnych najefektywniejszych estymatorach 1C, ale o granicy podziału nieco przesuniętej w górę do około $\beta_c=0,5$.



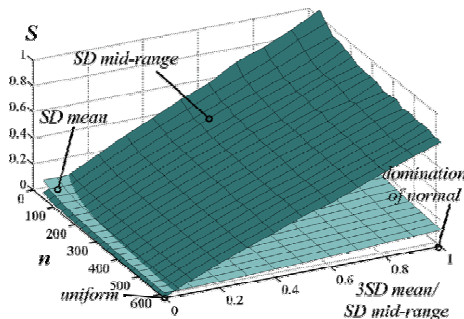
Rys. 5. Odchylenia standardowe SD trzech estymatorów PDF próbki w kształcie trapezu krzywoliniowego: u góry - dla wartości średniej, środka rozpięcia $q_{1/2}$ i mediany X_{med} w funkcji liczby obserwacji n i stosunku podstaw $\beta = \beta_c$, poniżej - przekrój dla $n=400$ [10d]

Fig. 5. SD of single component estimators as function of bases ratio β and of sample size n of curvilinear trapeze PDF CTrap(a,b,d) - up; cross-section for $n=400$ -down [10d]

3. Estymatory 1C splotów innych rozkładów

Splot rozkładu równomiernego z Normalnym

Estymatory 1C tego splotu przedstawiono na rys. 6.

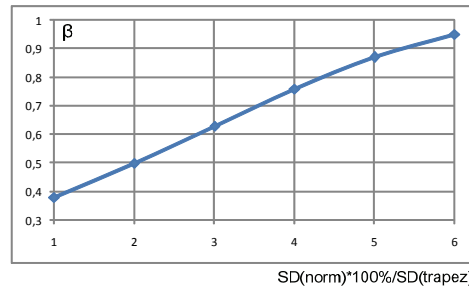


Rys. 6. Estymatory splotu rozkładu normalnego i równomiernego
Fig. 6. Estimators of the Uniform and Normal PDF convolution

Wynika z niego, że środek rozpięcia jest lepszym estymatorem (mniejsze SD) tylko w wąskim obszarze blisko rozkładu równomiernego, zwiężającym się ze wzrostem liczby pomiarów n w próbie.

Splot rozkładu trapezowego Trap z Normalnym

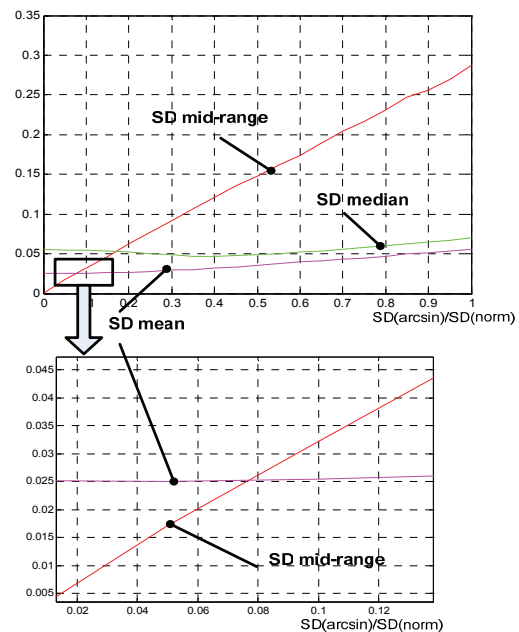
Dla tego splotu zmniejsza się graniczny stosunek podstaw trapezów $\beta=a$ o lepszym środku rozpięcia lub średniej jako estymatorze 1C próbki. Na rys. 7 przedstawiono to dla rozkładu Trap przy różnych % SD dodanego rozkładu Normalnego (np. szum). Przy 5% średnia dominuje już aż dla 95% zakresu β .



Rys. 7. Zmiany granicznej wartości stosunku podstaw β rozkładu Trap (trapez liniowy) przy wzrastającym udziale dodanego rozkładu normalnego
Fig. 7. Changes of border β of the bases ratio of Trap PDF (linear trapeze) for increasing participation of the added normal PDF

Splot rozkładu arcsin z Normalnym

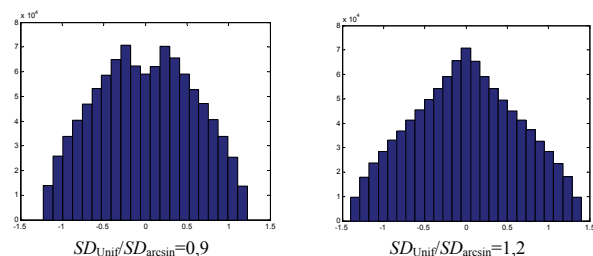
Standardowe odchylenia środka rozpięcia i średniej dla tego splotu podaje rys. 8. W większości zakresu dominuje średnia arytmetyczna.



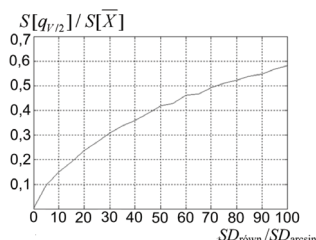
Rys. 8. Estymatory 1C splotu rozkładów arcsin + Normalny
Fig. 8. Estimators 1C (one-component) of two arc sin PDF convolution

Splot rozkładów: równomiernego i arcsin

Rozkłady PDF dla dwu różnych stosunków odchylen standardowych splecanych rozkładów przedstawiono na rys. 9, a stosunek SD środka rozpięcia i średniej - na rys. 10. W całym zakresie stosunku SD najlepszym estymatorem 1C jest środek rozpięcia.



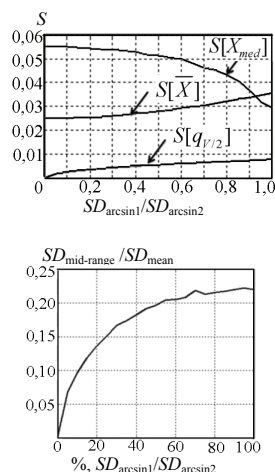
Rys. 9. Dwa przykłady PDF splotu rozkładów równomiernego i arc sin
Fig. 9. Two examples of PDF-s of the Uniform and arc sin convolution



Rys. 10. Stosunek odchyłeń standardowych środka rozpięcia i średniej splotu rozkładów równomiernego i arc sin
Fig. 10. Ratio of mid-range and mean SD of the uniform and arcsin convolution

Splot dwu rozkładów arcsin

Splot arcsin+arcsin przedstawiono na rys. 11. W całym zakresie stosunku SD składników (0, 1) odchylenie standardowe środka rozpięcia $SD_{\text{mid-range}}$ jest najmniejsze.



Rys. 11. Odchylenia standardowe estymatorów splotu dwu rozkładów arcsin
Fig. 11. SD of 1C estimators for convolution of two arc sin PDF

4. Podsumowanie

- Prawidłowe oszacowanie wyznaczonej statystycznie niepewności (odpowiednik u_A z Przewodnika GUM) zależy od wyboru efektywnego, tj. najbardziej dokładnego estymatora PDF próbki, stosowanego w przetwarzaniu jej danych.
- Najlepszy jednoelementowy estymator wartości mierzand dla próbki o rozkładzie PDF modelowanym symetrycznym trapezem zależy od jego kształtu opisanego przez stosunek podstaw β . Jeśli trapez jest bliski prostokąta ($1 \geq \beta \geq 0,35$) to lepszy jest środek rozstępu próbki, a poniżej ($0,35 \geq \beta \geq 0$) aż do rozkładu trójkątnego ($\beta=0$) – wartość średnia.

Autor serdecznie dziękuje mgr inż. Marynie Galowskiej, obecnie asystentowi naukowemu w Instytucie Metrologii Techniki Wytwarzania TU w Braunschweig, Niemcy, która w latach 2007 - 2009 jako aspirantka Ukraińskiego Narodowego Uniwersytetu Technicznego z własnego wyboru współpracowała z autorem w powyższych zagadnieniach i przy dużym zaangażowaniu uzyskała wiele wyników tej pracy metodą symulacji Monte Carlo. Dzięki temu udało się sprawdzić szereg intuicyjnych idei autora dotyczących rozkładów trapezowych i znaleźć dla nich nowe estymatory.

5. Literatura

- [1] Wyrażanie Niepewności Pomiaru. Przewodnik. Tłum. z Guide to the Expression of Uncertainty in Measurement, ISO 1992, revised and corrected 2nd ed. 1995. Wyd. Głównego Urzędu Miar, Warszawa, 2002 r.
- [2] Supplement 1 to the Guide to the expression of uncertainty in measurement (GUM) – Propagation of distributions using a Monte Carlo method. Guide OIML G 1-101 Edition 2007 (E).
- [3] Taylor B. N., Kuyatt Ch. E.: Guidelines for Evaluating and Expressing the Uncertainty of NIST Measurement Results. NIST Technical Note 1297, National Institute of Standards and Technology, USA, 1994.
- [4] Measurement Uncertainty Analysis Principles and Methods. NASA Measurement Quality Assurance Handbook – ANNEX 3, July 2010.
- [5] a. Dorozhovets M., Warszawa Z.L.: Udoskonalenie metod wyznaczania niepewności wyników pomiaru w praktyce. Przegląd Elektrotechniczny nr 1, 2007, s.1-13.
b. Dorozhovets M., Warszawa Z. L.: Methods of upgrading the uncertainty of type A evaluation (2). Elimination of the influence of autocorrelation of observations and choosing the adequate distribution. Proc. of 15th IMEKO TC4 Symposium, Sept.2007, Iasi Romania, p. 199 – 204.
c. Warsza Z., Dorozhovets M.: Uncertainty type A evaluation of autocorrelated measurement observations. Biuletyn WAT 2008, Vol. 57, nr 2, s. 143 – 152.
- [6] a. Warsza Z. L., Dorozhovets M., Korczyński M. J.: Methods of upgrading the uncertainty of type A evaluation (1). Elimination of the influence of unknown drift and harmonic components. Proc. of 15th IMEKO TC4 Symposium, Sept. 2007, Iasi Romania, pp. 193-198.
b. Dorozhovets M., Warsza Z., Korczyński M. J.: Udoskonalenie metody typu A wyznaczania niepewności pomiarów. Pomiary Automatyka Kontrola nr 12/2007, s. 8 -11.
c. Warsza Z.L., Korczyński M.J.: Eliminacja nieznanych a priori składowych systematycznych z niepewności typu A pomiarów o równomiernym próbkowaniu. Przegląd Elektrotechniczny nr 05/2008, s.109 –114.
- [7] Novickij P.V., Zograf I.A.: Ocenka pogreshnostiej rezultatov izmierenii. Energoatomizdat Leningrad,1985 [7].
- [8] Kacker R. N., Lawrence J. F.: Trapezoidal and triangular distributions for Type B evaluation of standard uncertainty. Metrologia 44 (2007), pp. 117–127.
- [9] Fotowicz P.: Ocena dokładności przybliżenia splotu rozkładu normalnego i prostokątnego rozkładem trapezowym. Pomiary Automatyka Robotyka 5/2001, s. 9-11.
- [10] a. Warsza Z. L., Galovska M.: About the best measurand estimators of trapezoidal probability distributions. Przegląd Elektrotechniczny - Electrical Review, no 5'2009, s. 86-91.
b. Warsza Z. L., Galovska M.: The best measurand estimators of trapezoidal PDF. Proc. of IMEKO World Congress "Fundamental and Applied Metrology", September 2009, Lisbon Portugal, p. 2405-2410.
c. Warsza Z. L., Galovskaja M.V.: Vybór najlutshej ocenki izmierajemoj velichiny na primiere trapecievidnyh raspredelenij. Sistemy Obrobtiki Informacii. Vp. 4(78), Charkov 2009 s. 28-31.
d. Warsza Z. L., Galovska M.: Estymatory wartości mierzand dla trapezowych rozkładów prawdopodobieństwa danych pomiarowych. Pomiary Automatyka Komputery w gospodarce i ochronie środowiska (PAKgoś) nr 1 2010 s. 12-16.
- [11] Endovitskiy P.: Ukraiński Narodowy Uniwersytet Techniczny „Kijowski Instytut Politechniczny”, praca nieopublikowana.