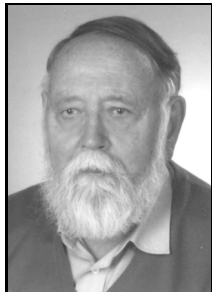


Adam ŻUCHOWSKIZACHODNIOPOMORSKI UNIwersYTET TECHNOLOGICZNY W SZCZECINIE
ul. 26 Kwietnia 10, 71-126 Szczecin**Metoda upraszczania liniowych modeli dynamiki obiektów gwarantująca stabilność uzyskiwanego modelu**

Prof. dr hab. inż. Adam ŻUCHOWSKI

Profesor zwyczajny zatrudniony w Katedrze Sterowania i Pomiarów w Zachodniopomorskim Uniwersytecie Technologicznym. Ze szkolnictwem wyższym związany zawodowo od 1955 roku (Politechnika Wrocławska, Politechnika Szczecińska). Jest współtwórcą polskiej szkoły miernictwa dynamicznego, posiada w dorobku około 350 publikacji. W kwietniu 2010 roku upłynęło 55 lat jego działalności naukowej.



e-mail: adam.zuchowski@zut.edu.pl

Streszczenie

Istnieje wiele metod upraszczania, lub inaczej redukcji liniowych modeli dynamiki obiektów, lecz na ogół nie gwarantują one stabilności wyznaczonych modeli uproszczonych, choć wiadomo, że modele pełne, czyli „wyjściowe” są stabilne. Wiąże się to z koniecznością dodatkowej kontroli uzyskanego wyniku, koniecznością zmiany arbitralnie przyjętej postaci modelu uproszczonego i zbędną stratą czasu. Zaproponowano metodę wyznaczania uproszczonego modelu trzeciego rzędu z zachowaniem identycznego zapasu stabilności modułu i fazy modelu upraszczanego co gwarantuje zapewnienie stabilności tego ostatniego. Opisano sposób wyznaczania parametrów modelu uproszczonego i podano przykłady.

Słowa kluczowe: upraszczanie modeli dynamiki, zapas stabilności.

The method for simplification of linear plant models leading to the stable simplified models**Abstract**

There are numerous methods for simplification of linear models representing plant dynamics but often they do not guarantee the stability of the obtained models, even in case of stable “initial” models of these plants. Because of the above disadvantageous results of simplification, one has to check carefully the obtained model form and, if necessary, change the arbitrarily assumed form of the simplified model, then repeat calculations, which can be treated as waste of time. The method for determining the simplified model of third order with amplitude and phase margins identical to those of the initial model is presented in the paper. Due to the proposed method, one avoids the unstable result of simplification for the stable initial model. When assuming that the model is of third order, there is obtained a complete system of equations for determining its parameters. It is worth noting that three poles of the simplified model in their form can correspond to typical, the so-called “dominant roots”, and thus the behaviour of the simplified model determined can, generally, correspond to that of linear models. There are also discussed the problems arising in case of presence of zeros in the complete model transfer function. The paper contains the algorithm for calculation of a simplified model as well as some examples.

Keywords: simplification of models describing plant dynamics, stability margin.

1. Wstęp

Istnieje wiele metod upraszczania liniowych modeli dynamiki i problematyce tej poświęcono szereg artykułów i zbiorczych monografi, przytoczono tu oczywiście tylko kilka pozycji [1, 2, 3, 4] z bardzo długiej ich listy. Naogół metody te nie gwarantują stabilności uzyskiwanych modeli uproszczonych, mimo iż modele upraszczane, to jest „wyjściowe” są stabilne; taka sytuacja ma miejsce na przykład przy stosowaniu metody Pad'e, metody ułamków łańcuchowych, lub metody momentów [1]. Naraża to użytkownika na dokonywanie zmian postaci poszukiwanego modelu uproszczonego, zmiany założeń dotyczących jego stoso-

walności, lub konieczność użycia innej metody, a zawsze na stratę czasu. W wymienionych tu metodach „klasycznych” postulatu koniecznej stabilności nie udaje się uwzględnić i niechaj to usprawiedliwi próbę opracowania metody prezentowanej w niniejszej pracy.

W przypadku wielu metod postać modelu uproszczonego przyjmuje się w sposób arbitralny. Postąpimy tu w identyczny sposób wprowadzając model uproszczony trzeciego rzędu o transmitancji:

$$K_m(s) = \frac{k}{1 + a_1 T \cdot s + a_2 \cdot s^2 \cdot T^2 + s^3 \cdot T^3} \quad (1)$$

gdzie k jest współczynnikiem wzmocnienia statycznego, a_1 i a_2 – parametrami dynamiki, T – współczynnikiem skali czasu.

Taka postać modelu uproszczonego uwzględnia wszystkie rodzaje możliwych biegunów i umożliwia na przykład łatwy dobór optymalnych parametrów regulatora PID, przy wykorzystaniu metody redukcji zer i biegunów. Warto też nadmienić, że takie cechy modelu jak jego zapas stabilności modułu i fazy, typ biegunów i wielkość przeregulowania są od współczynnika skali czasu niezależne a czas regulacji jest do niego proporcjonalny. Ułatwia to dokonywanie szeregu analiz. Parametry modelu uproszczonego wyznaczmy dobierając je w taki sposób, by zapewnić identyczny zapas stabilności modułu i fazy modelu wyjściowego i uproszczonego (co gwarantuje stabilność tego ostatniego, jeśli stabilny jest model wyjściowy), zachowując jednocześnie wartość współczynnika wzmocnienia statycznego i dobierając odpowiednio skalę czasu.

2. Obliczenie parametrów a_1 i a_2 modelu uproszczonego

Wolno przyjąć, że model o transmitancji

$$K(s) = k \cdot K_1(s) = k \cdot \frac{1 + B_1 \cdot s + \dots + B_m \cdot s^m}{1 + A_1 \cdot s + \dots + A_n \cdot s^n}, n \geq m \quad (2)$$

został zrealizowany w układzie z ujemnym sprzężeniem zwrotnym;

$$K(s) = k \cdot \frac{K_s(s)}{1 + K_s(s)} \quad (3)$$

a zapas stabilności modułu i fazy oblicza się dla transmitancji

$$K_s(s) = \frac{K_1(s)}{1 - K_1(s)} \quad (4)$$

Dla modelu wyjściowego (2) zapasy te zostały obliczone i są znane. Dla modelu uproszczonego (1) są one niezależne od współczynnika skali czasu T i tym samym wolno przyjmując:

$$K_{sm}(s) = \frac{1}{s \cdot (a_1 + s^2 + a_2 \cdot s)}$$

lub:

$$K_{sm}(j\omega) = \frac{1}{j\omega \cdot (a_1 - \omega^2 + j \cdot a_2 \cdot \omega)} \quad (5)$$

Zapas stabilności modułu przy $w^2 = a_1$ łatwo obliczyć jako:

$$x_0 = -\frac{1}{a_1 \cdot a_2} \quad (6)$$

a zapas fazy:

$$\operatorname{tg} \phi = \frac{a_1 - w^2}{w \cdot a_2}$$

przy dodatkowym warunku

$$w^2 \cdot \left[(a_1 - w^2)^2 + w^2 \cdot a_2^2 \right] = 1 \quad (7)$$

skąd po wyeliminowaniu pulsacji w i prostych przekształceniach:

$$a_2 = \left\{ \frac{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \phi} + x_0}{x_0 \cdot \operatorname{tg} \phi \cdot (1 + \operatorname{tg}^2 \phi)^{1/4}} \right\}^{2/3}, \quad a_1 = \frac{1}{a_2 \cdot x_0} \quad (8)$$

Znając wartości x_0 i $\operatorname{tg} \phi$ dla modelu wyjściowego (2) można wyznaczyć parametry a_2 i a_1 gwarantujące stabilność modelu uproszczonego. Przy zachowaniu identycznej wartości współczynnika wzmocnienia k w obu modelach pozostaje już tylko wyznaczenie odpowiedniej wartości współczynnika skali czasu T . W pewnych warunkach można postulować zapewnienie zgodności zachowań modelu wyjściowego i uproszczonego dla czasów długich (stan bliski ustalonemu), to jest dla małych wartości operatora s i wtedy:

$$T = \frac{A_1 - B_1}{a_1} \quad (9)$$

ale taka metoda nie zawsze jest najkorzystniejsza, zauważymy bowiem, że w przypadkach, gdy $B_1 > A_1$ prowadzi do modelu uproszczonego niestabilnego, a jeśli $x_0 = 0$, to modelu uproszczonego nie da się wyznaczyć.

Założymy więc dalej, że transmitancja uproszczonego modelu (2) nie posiada miejsc zerowych, a do metody postępowania w innych warunkach jeszcze powrócimy.

3. Błąd modelu uproszczonego

Błąd modelu uproszczonego, czyli różnica reakcji modelu wyjściowego $y_m(t)$ i modelu uproszczonego na sygnał $x(t)$ wynosi:

$$D(s) = x(s) \left[K(s) - k \frac{K_{sm}(s)}{1 + K_{sm}(s)} \right] \quad (10)$$

Po wykorzystaniu zależności (8), (9) i niewielkim uproszczeniu otrzymuje się wzór przybliżony:

$$D(s) \cong y_m(s) \cdot \frac{s^2 \cdot (a_2 \cdot T^2 - A_2) + s^3 \cdot (T^3 - A_3) + s^4 \cdot A_4 + \dots}{1 + A_1 \cdot s + A_2 \cdot s^2 + A_3 \cdot s^3 + \dots} \quad (11)$$

Ponieważ w większości przypadków sygnał $y_m(t)$ jest stosunkowo „gładki”, zatem błąd jest zależny w głównej mierze od wielkości drugiej i trzeciej pochodnej sygnału wyjściowego $y_m(t)$, oraz od wielkości różnic współczynników $d_2 = a_2 T^2 - A_2$ i $d_3 = T^3 - A_3$ modeli. Taka sytuacja ma miejsce w przypadku, gdy transmitancja modelu wyjściowego nie posiada zer.

4. Przykłady uproszczeń modeli o transmitancji nie posiadających zer

Jako pierwszy przykład rozpatrzmy grupę modeli Strejca o transmitancjach:

$$K(s) = \frac{k}{(1 + s \cdot T_1)^n} \quad (12)$$

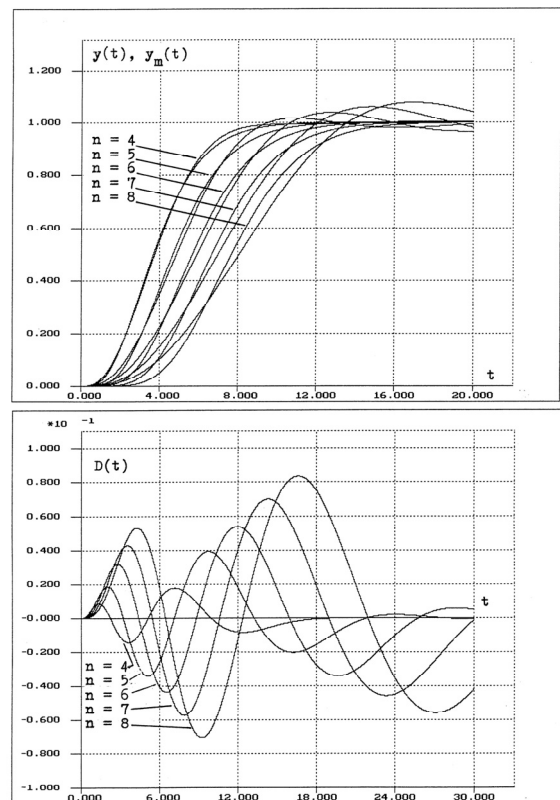
dla rzędów $n = 4, 5, \dots, 8$. Modele te uprościmy podaną metodą do modeli trzeciego rzędu (1). Wyniki obliczeń zapasów stabilności modułu, fazy, parametrów modelu uproszczonego, oraz różnic d_2 i d_3 zestawiono w tabeli 1.

Tab. 1. Zestawienie parametrów modeli uproszczonych w przypadku wyjściowego modelu Strejca, przy $k = 1$, oraz $T_1 = 1s$

Tab. 1. Parameters of the simplified models for the initial model given in the form of Strejca's model with $T_1 = 1s$

Rząd modelu n	x_0	$\operatorname{tg} \phi$	T	$a_1 \cdot T$	$a_2 \cdot T^2$	T^3	d_2	d_3
4	-0.11	2.55	1.67	4.0	5.8	4.66	-0.2	0.66
5	-0.26	3.31	2.30	5.0	9.51	12.2	-0.49	2.20
6	-0.30	2.23	2.90	6.0	13.7	24.4	-1.3	4.40
7	-0.33	2.15	3.49	7.0	18.7	42.5	-2.3	7.50
8	-0.35	2.09	4.08	8.0	24.5	67.9	-3.5	11.9

Rosnące ze wzrostem rzędu dynamiki n wielkości modułów różnic d_2 i d_3 pozwalają spodziewać się większych błędów modelu uproszczonego, a symulowany eksperyment, którego wyniki ilustrują wykresy pokazane na rys. 1 prognozę tą potwierdza.



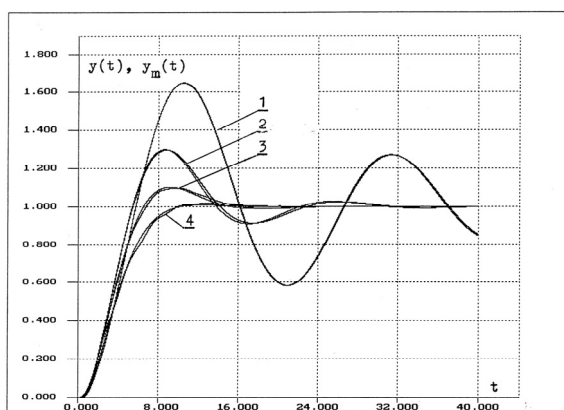
Rys. 1. Przebiegi charakterystyk skokowych $y(t)$, $y_m(t)$ modeli użytych w eksperymencie pierwszym i błędów $D(t)$ modeli uproszczonych
Fig. 1. Step responses $y(t)$, $y_m(t)$ of the models considered in the first experiment and errors $D(t)$ of the simplified models

W drugim przykładzie modele wyjściowe czwartego rzędu o jednakowych parametrach $A_3 = A_4 = 1$, $x_0 = -0.1$ zastąpiono uproszczonymi modelami trzeciego rzędu o parametrach wyznaczonych z wykorzystaniem omówionej metody. Wartości pozostałych parametrów zestawiono w tabeli 2.

Tab. 2. Zestawienie parametrów modeli użytych w eksperymencie drugim
Tab. 2. Parameters of the models used in the second experiment

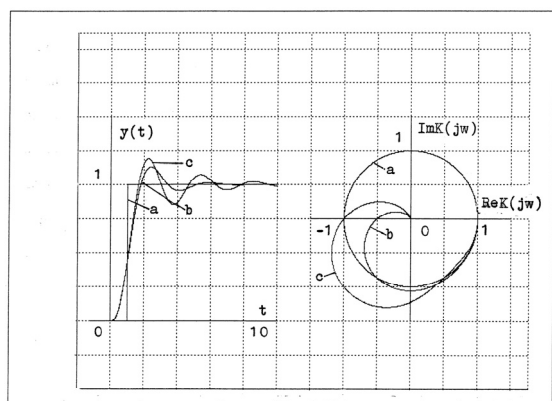
Lp.	A_1	A_2	$tg\phi$	$a_1 \cdot T$	$a_2 \cdot T^2$	T^3	d_2	d_3
1.	1	11.0	0.28	1.0	10.8	1.08	-0.18	0.08
2.	2	7.0	0.81	2.0	6.62	1.32	-0.38	0.32
3.	3	6.33	1.58	3.0	6.03	1.81	-0.30	0.81
4.	4	6.5	2.57	4.0	6.20	2.48	-0.30	1.48

W tym przypadku zmiany wielkości różnicy d_2 są niewielkie i błędy modeli uproszczonych w warunkach skoku jednostkowego na wejściu także nie wiele się różnią, co ilustrują przebiegi pokazane na rys. 2.



Rys. 2. Przebiegi charakterystyk skokowych $y(t), y_m(t)$ modeli użytych w eksperymencie drugim

Fig. 2. Step responses $y(t)$, and $y_m(t)$ of the models used in the second experiment



Rys. 3. Charakterystyki skokowe oraz częstotliwościowe modelu o transmitancji $K(s) = \exp(-s)$ (a) i modeli uproszczonych uzyskanych metodą Pad'e (b), oraz metodą prezentowaną w artykule (c)

Fig. 3. Step and frequency responses of the initial model $K(s) = \exp(-s)$ - curve (a) and the simplified models obtained by means of Pade's method (b) and the algorithm given in the paper (c)

W trzecim eksperymencie przyjęto model wyjściowy o transmitancji $K(s) = \exp(-s)$ dla którego $x_0 = -0.5$, oraz $tg\phi = 3$. Otrzymano model uproszczony o transmitancji:

$$K_m(s) = \frac{1}{1 + s + \frac{3}{8} \cdot s^2 + \frac{3}{16} \cdot s^3} \quad (13)$$

inny, niż w przypadku zastosowania np. metody Pad'e. Odpowiedzi skokowe, oraz charakterystyki częstotliwościowe modelu wyjściowego (a), modelu Pad'e (b), oraz modelu (13) (c) pokazano na rys. 3.

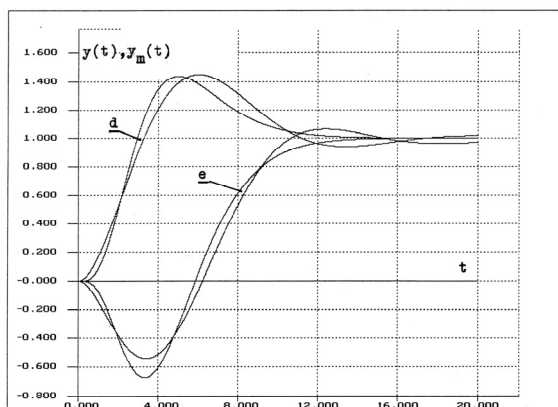
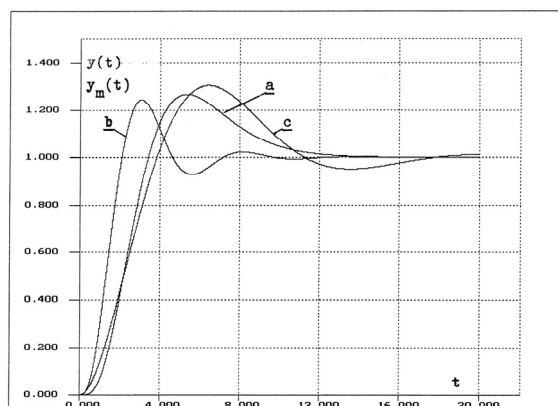
5. Postępowanie w przypadku, gdy transmitancja modelu wyjściowego posiada zera

Jeśli transmitancja modelu upraszczonego posiada postać jak we wzorze (2), to można podjąć próbę wyznaczania parametrów modelu uproszczonego według podanego sposobu, ale bez gwarancji pełnego sukcesu. Nawet w przypadku uzyskania stabilnego modelu uproszczonego dobór współczynnika skali czasu T według wzoru (9) może się okazać niewłaściwy. Dowodzi tego przykład modelu wyjściowego o transmitancji:

$$K(s) = \frac{1 + 4 \cdot s}{(1 + s)^5} \quad (14)$$

dla którego $x_0 = -0.319$, $tg\phi = 1.026$ a uzyskany model uproszczony przyjmuje postać:

$$K_m(s) = \frac{1}{1 + s + 0.80 \cdot s^2 + 0.26 \cdot s^3} \quad (15)$$



Rys. 4. Charakterystyki skokowe modeli (14) (a) i odpowiadających mu modeli uproszczonych (b,c) oraz modelu (16) i odpowiadających mu modeli uproszczonych (d,e)

Fig. 4. Step responses of: the model (14) - curve (a) - and corresponding simplified models - curves (b,c), the initial model (16) and corresponding simplified models - curves (d,e).

Z przebiegu zdjętych charakterystyk skokowych obu modeli (rys. 4) – wykres (a) dla modelu pełnego (14) i wykres (b) dla modelu (15) wynika, że w tym przypadku należało by przyjąć współczynnik skali czasu około 1.73 razy mniejszy od wyznaczonego ze wzoru (9). Autorowi nie jest znana prosta, analityczna metoda wyznaczania odpowiedniej wartości T , ale już w przypadku transmitancji modelu pełnego o postaci:

$$K(s) = \frac{1 + 5 \cdot s}{(1 + s)^5} \quad (16)$$

prezentowana metoda nie prowadzi do celu. Skuteczną wydaje się metoda upraszczania modelu polegająca na rozpatrzeniu modelu (2) bez zer transmitancji ($B_1 = B_2 = \dots = B_m = 0$) i uzupełnieniu uzyskanego modelu uproszczonego (1) o licznik taki, jak w modelu (2). Jest to możliwe tylko wtedy, gdy $m \leq 3$. Uzyskane rezultaty dla obu modeli (14) i (15) ilustrują wykresy (c) dla modelu (14), oraz pary przebiegów $y(t)$, $y_m(t)$, oznaczone jako (d) w przypadku modelu (16) ze znakiem (+) w liczniku i odpowiednio jako (e), przy znaku (-) w liczniku transmitancji. Uzyskane modele uproszczone przy takiej metodzie są stabilne, lecz ich dokładność jest mniejsza, niż w przypadku modeli uproszczonych dla transmitancji bez zer licznika, a są także bardziej skomplikowane niż model (1).

6. Podsumowanie

Każda metoda upraszczania modeli dynamiki posiada pewne wady i pewne zalety. Podstawową zaletą metody prezentowanej w niniejszej pracy jest gwarantowana stabilność uzyskiwanego modelu i stosunkowo niski rząd jego dynamiki. Wadą wydaje się konieczność wyznaczania zapasu stabilności modułu i fazy modelu, co wymaga zwykle użycia odpowiednich programów komputerowych, konieczna jest więc znajomość liczbowych wartości parametrów modelu pełnego.

7. Literatura

- [1] Halawa J.: Metody wyznaczania transmitancji uproszczonych i ich zastosowania w automatyce i elektroenergetyce. Politechnika Wroclawska, Instytut Cybernetyki Technicznej, Prace Naukowe 1991, Seria Monografie Nr 21.
- [2] Layer E.: Modelling of Simplified Dynamical Systems. Berlin, Springer Verlag 2002.
- [3] Rydel M., Stanislawski W.: Problemy redukcji złożonych modeli obiektów sterowania. Pomiary Automatyka Kontrola Nr 2/2010.
- [4] Zuchowski A.: Modele dynamiki i identyfikacja. Wydawnictwo Uczelniane Politechniki Szczecińskiej, Seria Tempus, 2003.

otrzymano / received: 29.09.2010

przyjęto do druku / accepted: 01.12.2010

artykuł recenzowany

INFORMACJE

Energoelektronika

WORTAL BRANŻOWY

[REKLAMA](#) [MAPA SERWISU](#) [KONTAKT](#)

DACPOL

**Kompleksowa oferta
sprzedaży części
i podzespołów**

PARTNERZY >>>

Strona główna
Rejestracja
Artykuły branżowe
Katalog firm
Oferty B2B
FAQ
Kalendarium
Słownik
Forum

Wyszukaj
1USD 3.163 +0.22% 1EUR 3.8285 +0.3% 1GBP 5.6103 +0.69%

WORTAL BRANŻOWY

+ **Nowości, Słownik techniczny**

+ **Porady specjalistów**

+ **Przegląd prasy**

+ **Katalog firm i produktów**

+ **Opis urządzeń i podzespołów**

+ **Kalendarium ważnych wydarzeń**

ZAPRASZAMY: www.energoelektronika.pl

Ostatnio dodane

Firmy:
Centrum Dystrybucji Norster
więcej >>>
P.W.STOLARZ-LEMPERT sp.j.
więcej >>>

Produkty:

Kompaktowa dmuchawa grzewcza dużej wydajności
CR 030
więcej >>>
Promienniki podczerwieni do maszyn rozdmuchowych
PET - IRK13213/98F
więcej >>>

ul. Puławska 34 05-500 Piaseczno k. Warszawy

tel. (+48) 22 70 35 290

fax. (+48) 22 70 35 101