

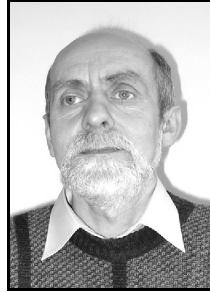
Jerzy AUGUSTYN

POLITECHNIKA ŚWIĘTOKRZYSKA,
Al. Tysiąclecia Państwa Polskiego 7, 25-314 Kielce

Estymacja składowych impedancji algorytmem 3-punktowym

Dr hab. inż. Jerzy AUGUSTYN

Ukończył studia na Wydziale Elektrycznym Politechniki Śląskiej w 1978 r. Na tym samym Wydziale w roku 1988 uzyskał stopień doktora nauk technicznych, a w roku 2008 – doktora habilitowanego. Profesor w Katedrze Elektrotechniki i Systemów Pomiarowych Wydziału Elektrotechniki, Automatyki i Informatyki Politechniki Świętokrzyskiej. Głównie zainteresowania naukowe: pomiary impedancji, algorytmy przetwarzania danych pomiarowych, propagacja niepewności w systemach pomiarowych.



e-mail: j.augustyn@tu.kielce.pl

Streszczenie

W artykule przedstawiono algorytm estymacji składowych impedancji na podstawie trzech próbkowanych wartości napięcia i prądu związanych z mierzoną impedancją. Do realizacji algorytmu zaproponowano wykorzystanie iloczynu skalarnego wektorów. Algorytm uzupełniono o procedurę eliminacji wpływu składowej stałej oraz trzeciej harmonicznej na wynik estymacji. Właściwości zaproponowanego algorytmu, a w szczególności wpływ niekoherentnego próbkowania oraz rozdzielczości przetworników a/c, zbadano metodą Monte Carlo.

Słowa kluczowe: pomiary składowych impedancji, algorytmy pomiarowe, algorytm trzypunktowy, analiza niepewności.

Three-point impedance component estimation algorithm**Abstract**

In the paper a simple algorithm for impedance component estimation on the basis of three successive signal samples connected with the measured impedance measured at 1/3 period interval of the given sinusoidal signal is presented. To realise this algorithm, use of scalar product of vectors (7) is proposed. In order to eliminate the influence of errors related to the dc offset in data acquisition systems and the third harmonic, the obtained algorithms were properly modified, and finally presented as (12). The proposed algorithm properties and, particularly, the influence of incoherent sampling and A/D converter resolution were examined with use of the Monte Carlo method. Simulations were carried out for two impedances Z_1 and Z_2 of different phase angle values. The influence of the A/D converter resolution equal to 8, 12 and 16 bits was examined. It was assumed that the instant when the sampling of the input waveforms begins varies randomly in the range from 0 to T , and the desynchronisation factor value – in the limited range to $\pm 1\%$ of the full range. The experiment results experiment in the form of bivariate histograms of the resultant absolute measurement error of impedance components δR and δX , for 12-bit A/D converters are shown in Figs. 1 and 2, for impedance Z_1 and Z_2 respectively. The influence of the A/D converter resolution on the random characteristics of the absolute measurement error of the impedance components is shown in Figs. 4-6, in the form of histograms and empirical cumulative distribution curves.

Keywords: impedance component measurement, measurement algorithms, three-point algorithm, uncertainty analysis.

1. Wprowadzenie

Estymacja składowych impedancji jest istotnym zagadnieniem w wielu obszarach pomiarów i sterowania. Spotykane są różne rozwiązania umożliwiające wyznaczenie tych składowych na podstawie próbkowanych wartości chwilowych sygnałów związanych z mierzoną impedancją. W zależności od warunków pomiaru oraz wymagań związanych z jego dokładnością, najczęściej stosuje się algorytmy wykorzystujące dyskretne przekształcenie Fouriera [1-4] oraz dopasowanie do przebiegu sinusoidalnego [1-7]. Spotykany jest również algorytm oparty na dopasowaniu do elipsy [7-8]. W niektórych zastosowaniach czujników parametrycznych istotnym ograniczeniem jest stosunkowo duża złożoność oblicze-

niowa tych algorytmów. W artykule przedstawiono prosty algorytm umożliwiający estymację składowych impedancji na podstawie trzech kolejnych próbek sygnałów związanych z mierzoną impedancją, pobranych w odstępnie 1/3 okresu sinusoidalnego sygnału wymuszającego. Podano również wyniki badań właściwości metrologicznych tego algorytmu otrzymane metodą symulacyjną.

2. Trzypunktowy algorytm estymacji składowych impedancji

Impedancja dwójnika Z jest definiowana jako parametr charakteryzujący dwójnik elektryczny w stanie ustalonym, przy pobudzeniu przebiegiem sinusoidalnym o pulsacji ω . Dla skupionego, liniowego, stacjonarnego i bezźródłowego dwójnika impedancja jest liczbą zespoloną równą stosunkowi napięcia na dwójniku do płynącego przez niego prądu. Jeżeli

$$u(t) = U_m \sin(\omega t + \psi_u), \quad (1a)$$

$$i(t) = I_m \sin(\omega t + \psi_i), \quad (1b)$$

to
$$\underline{Z} = Z e^{j\phi} = R + jX = \frac{U}{I} = \frac{U_m e^{j\psi_u}}{I_m e^{j\psi_i}}, \quad (2)$$

gdzie: Z oznacza moduł, $\phi = \psi_u - \psi_i$ – kąt fazowy impedancji, a R , X – odpowiednio składową rzeczywistą (rezystancję) i składową urojoną (reaktancję).

Wzór (2) można przekształcić do postaci

$$\underline{Z} = \frac{UI^*}{II^*} = \frac{P + jQ}{I^2}, \quad (3)$$

gdzie: P oznacza moc czynną, Q – moc bierną, a symbolem $*$ oznaczono wartość sprzężoną.

Jeżeli częstotliwość próbkowania f_s jest całkowitą wielokrotnością częstotliwości sygnału wymuszającego f , to do wyznaczenia mocy czynnej, mocy biernej oraz kwadratu modułu prądu I^2 można wykorzystać definicję iloczynu skalarnego wektorów. Dla

$$f_s = 3f, \quad (4)$$

wartości kolejnych próbek napięcia i prądu są równe

$$\begin{aligned} u_n &= U_m \sin(2\pi n + \psi_u) \\ i_n &= I_m \sin(2\pi n + \psi_i) \end{aligned} \quad n = 0, 1, 2. \quad (5)$$

Można je zapisać w postaci wektorowej

$$\begin{aligned} \mathbf{u}^T &= [u_0 \quad u_1 \quad u_2], \\ \mathbf{i}^T &= [i_0 \quad i_1 \quad i_2]. \end{aligned} \quad (6)$$

Estymaty odpowiednich iloczynów skalarnych przyjmują postać:

$$\tilde{P} = \frac{1}{3} \mathbf{u}^T \mathbf{i} = \frac{1}{3} (u_0 i_0 + u_1 i_1 + u_2 i_2), \quad (7a)$$

$$\tilde{I}^2 = \frac{1}{3} \mathbf{i}^T \mathbf{i} = \frac{1}{3} (i_0 i_0 + i_1 i_1 + i_2 i_2), \quad (7b)$$

$$\begin{aligned}\tilde{Q} &= \frac{1}{3} \frac{1}{\sqrt{3}} \mathbf{u}^T (\mathbf{D}^2 - \mathbf{D}) \mathbf{i} = \\ &= \frac{1}{3\sqrt{3}} [(u_2 - u_1)i_0 + (u_0 - u_2)i_1 + (u_1 - u_0)i_2],\end{aligned}\quad (7c)$$

gdzie: \mathbf{D} jest macierzą opóźnienia próbek

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad (8)$$

którą wprowadzono w celu uzyskania we wzorze (7c) napięć przesuniętych o kąt $\pi/2$ względem napięcia na mierzonej impedancji. Wykorzystano właściwości symetrycznej gwiazdy napięć i obliczono różnice odpowiednich próbek, zmieniając jednocześnie współczynnik skalujący.

Istotnym problemem występującym w praktycznych zastosowaniach jest wrażliwość algorytmu na wartość składowych stałych, jakie mogą pojawić się w próbkowanych sygnałach związanych z napięciem i prądem na skutek błędów przesunięcia zera w układach akwizycji danych. W celu eliminacji tego wpływu otrzymane algorytmy należy odpowiednio zmodyfikować. W [9] minimalizację wpływu składowej stałej na wartość estymatora amplitudy sygnału sinusoidalnego uzyskano poprzez wykorzystanie właściwości iloczynów skalarnych próbek przesuniętych o kąt $2\pi/3$. Algorytm (7b) przyjmuje wtedy postać

$$\tilde{I}^2 = \frac{2}{9} [(i_0i_0 + i_1i_1 + i_2i_2) - (i_0i_1 + i_0i_2 + i_1i_2)]. \quad (9)$$

Jeżeli sygnały napięcia i prądu zawierają składowe stałe:

$$\begin{aligned}u_n^b &= u_n + U_0, \\ i_n^b &= i_n + I_0,\end{aligned} \quad n = 0, 1, 2, \quad (10)$$

gdzie: U_0, I_0 oznaczają odpowiednio składowe stałe w sygnale napięciowym i prądowym,

$$\begin{aligned}\text{to} \quad U_0 &= \frac{1}{3}(u_0^b + u_1^b + u_2^b) \\ I_0 &= \frac{1}{3}(i_0^b + i_1^b + i_2^b)\end{aligned}\quad (11)$$

Po uwzględnieniu (11) algorytmy estymacji składowych impedancji przyjmują ostatecznie postać

$$\tilde{R} = \frac{(u_0i_0 + u_1i_1 + u_2i_2) - \frac{1}{3}(u_0 + u_1 + u_2)(i_0 + i_1 + i_2)}{(i_0i_0 + i_1i_1 + i_2i_2) - \frac{1}{3}(i_0 + i_1 + i_2)^2}, \quad (12a)$$

$$\tilde{X} = \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{(u_1 - u_2)i_0 + (u_2 - u_0)i_1 + (u_0 - u_1)i_2}{(i_0i_0 + i_1i_1 + i_2i_2) - \frac{1}{3}(i_0 + i_1 + i_2)^2}. \quad (12b)$$

Występujące w mianownikach wzorów (12) wyrażenia opisujące kwadrat wartości skutecznej prądu mają postać prostszą pod względem obliczeniowym w porównaniu do algorytmu (9), ze względu na mniejszą ilość operacji mnożenia.

Dodatkową zaletą algorytmu (12) jest eliminacja wpływu trzeciej harmonicznej zawartej w próbkowanych sygnałach (oraz jej całkowych wielokrotności) na wartość estymowanych składowych impedancji. Jeżeli częstotliwość próbkowania spełnia warunek (4), składniki wynikające z występowania trzeciej harmonicznej w każdej z kolejnych próbek przyjmują stałą wartość i są traktowane przez algorytm tak jak składowa stała.

Wzory (12) zostały wyprowadzone, przy założeniu że częstotliwość próbkowania spełnia warunek (4). W praktycznych zasto-

sowaniach warunek ten jest spełniony jedynie w przybliżeniu. Wtedy

$$3T_s = (1 + \alpha)T, \quad (13)$$

gdzie $|\alpha| < 0,5$ jest współczynnikiem desynchronizacji.

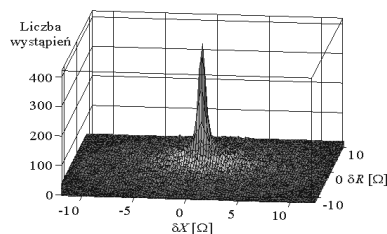
Wpływ niekohherentnego próbkowania na wartość estymowanych składowych można zbadać metodami symulacyjnymi.

3. Badania symulacyjne

Ocenę niepewności pomiaru w układzie złożonym z przetwornika próbkującego oraz algorytmu przetwarzania umożliwia zastosowanie metody Monte Carlo, wykorzystującej matematyczny model pomiaru oraz zasadę propagacji rozkładów prawdopodobieństwa [2-3, 6, 10].

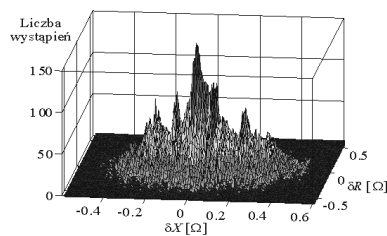
W celu zbadania wpływu niekohherentnego próbkowania oraz błędu kwantowania na niepewność pomiaru składowych impedancji dla algorytmu 3-punktowego, przeprowadzono eksperyment symulacyjny. Zbadano dwie impedancje o różnych wartościach kąta fazowego: $\underline{Z}_1 = (1000 - j1000)\Omega$ oraz $\underline{Z}_2 = (1000 - j10)\Omega$.

Założono, że impedancje zasilono ze źródła napięcia sinusoidalnego o amplitudzie $U_m = 5V$ i częstotliwości $f = 1000Hz$. Ponadto przyjęto, że zakresy przetwarzania dwóch przetworników a/c o rozdzielczości 8, 12 i 16 bitów odpowiadają wartościom amplitud kwantowanych przebiegów napięcia i prądu. Ponadto w celu zbadania wrażliwości algorytmu na obecność składowej stałej przyjęto, że $U_0 = 0,01U_m$ a $I_0 = -0,01I_m$. Symulacje powtarzano 100 000 razy, losując moment rozpoczęcia próbkowania przebiegów wejściowych (jednocześnie w obu kanałach przetwornika) z populacji o rozkładzie jednostajnym w przedziale od 0 do T ($T = 1/f$). Ponieważ w praktyce najczęściej dostępna jest informacja o przybliżonej wartości okresu T analizowanych sygnałów, wartość współczynnika desynchronizacji ograniczonego do $\pm 1\%$ pełnego zakresu, tzn. $\alpha \in (-0,005, 0,005)$. Obliczenia przeprowadzono dla 3 próbek. Wyniki tego eksperymentu w postaci dwuwymiarowych histogramów wypadkowego bezwzględnego błędu pomiaru składowych impedancji, w układzie współrzędnych prostokątnych, dla 12-bitowych przetworników a/c przedstawiono na rys. 1 i 2, odpowiednio dla impedancji \underline{Z}_1 i \underline{Z}_2 .



Rys. 1. Dwuwymiarowe histogramy bezwzględnego błędu pomiaru składowych impedancji \underline{Z}_1 dla współczynnika desynchronizacji $\alpha \in (-0,005, 0,005)$

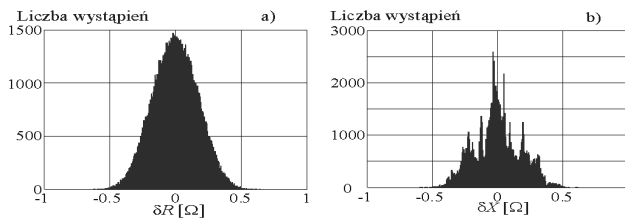
Fig. 1. Bivariate histograms of the absolute measurement error of impedance \underline{Z}_1 components for desynchronisation factor $\alpha \in (-0,005, 0,005)$



Rys. 2. Dwuwymiarowe histogramy bezwzględnego błędu pomiaru składowych impedancji \underline{Z}_2 dla współczynnika desynchronizacji $\alpha \in (-0,005, 0,005)$

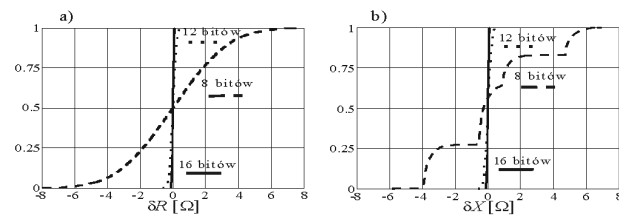
Fig. 2. Bivariate histograms of the absolute measurement error of impedance \underline{Z}_2 components for desynchronisation factor $\alpha \in (-0,005, 0,005)$

Z porównania przedstawionych wykresów wynika, że w odróżnieniu od impedancji Z_1 o jednakowych wartościach składowych, w przypadku impedancji Z_2 o znacznie różniących się wartościach składowych, wektor losowy $[\delta R \ \delta X]$ charakteryzuje się niesymetrycznym rozkładem funkcji gęstości prawdopodobieństwa względem poszczególnych składowych. Jednowymiarowe funkcje gęstości prawdopodobieństwa dla składowych: rzeczywistej δR i urojonej δX , bezwzględnego błędu pomiaru składowych impedancji są brzegowymi rozkładami prawdopodobieństwa względem każdej ze składowych. Histogramy przedstawiające takie rozkłady dla impedancji Z_2 pokazano na rys. 3.



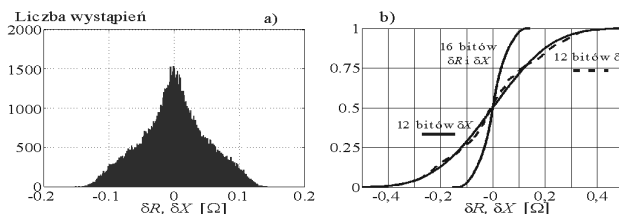
Rys. 3. Histogramy bezwzględnego błędu pomiaru składowej rzeczywistej (a) i składowej urojonej (b) impedancji Z_2 dla 12-bitowego przetwornika a/c
Fig. 3. Absolute error histograms of the impedance Z_2 for 12-bit A/D converter: real component δR (a), imaginary component δX (b)

Błąd składowej dominującej impedancji Z_2 charakteryzuje się rozkładem zbliżonym do normalnego. Postać rozkładu błędów składowej urojonej wynika ze zbyt małej rozdzielczości zastosowanego przetwornika a/c, co potwierdzają wykresy empirycznych dystrybucji błędów składowych impedancji Z_2 dla przetworników a/c o rozdzielczości 8, 12 oraz 16 bitów, przedstawione na rys. 4.



Rys. 4. Empiryczne dystrybucje bezwzględnego błędów pomiaru składowej rzeczywistej (a) i składowej urojonej (b) impedancji Z_2 dla przetwornika a/c o rozdzielczości 8, 12 i 16 bitów
Fig. 4. Empirical cumulative distribution curves of the impedance Z_2 absolute error: real component δR (a), imaginary component δX (b), for 8, 12, and 16-bit A/D converter, respectively

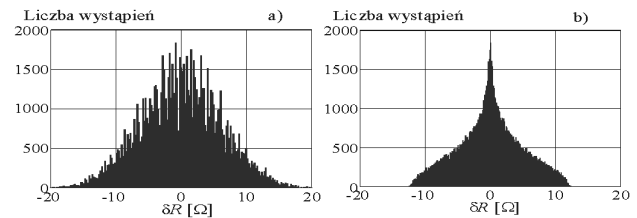
Z wykresów przedstawionych na rys. 4 oraz rys. 5b, a także z histogramu pokazanego na rys. 5a wynika ponadto, że po zwiększeniu rozdzielczości przetwornika a/c do 16 bitów błędy obu składowych impedancji Z_2 mają jednakową postać rozkładu gęstości prawdopodobieństwa.



Rys. 5. Histogram bezwzględnego błędów pomiaru rzeczywistej i urojonej składowej impedancji Z_2 dla 16-bitowego przetwornika a/c (a) oraz empiryczne dystrybucje tych błędów dla przetworników a/c o rozdzielczości 12 i 16 bitów (b)
Fig. 5. Histogram of the absolute error for both real δR and imaginary δX component of the impedance Z_2 for a 16-bit A/D converter (a) and empirical cumulative distribution curves of these errors for 12, and 16-bit A/D converters

Dla impedancji Z_1 rozkłady błędów dla obu składowych są jednakowe. Postać rozkładu zależy od stosunku składowych błędów składających się na wypadkowy błąd pomiaru składowych impedancji. Przykładowe histogramy bezwzględnego błędów pomiaru

składowej rzeczywistej impedancji Z_1 dla przetworników a/c o rozdzielczości 8- oraz 12-bitów przedstawiono na rys. 6.



Rys. 6. Histogramy bezwzględnego błędów pomiaru składowej rzeczywistej impedancji Z_1 dla: 8-bitowego (a) i 12-bitowego (b) przetwornika a/c
Fig. 6. Absolute error δR histograms of the impedance Z_1 real component for 8-bit (a) and 12-bit (b) A/D converter

Histogram dla 16-bitowego przetwornika a/c jest identyczny z przedstawionym na rys. 6b, ze względu na dominujący udział błędów związanych z niekoherentnym próbkowaniem.

4. Wnioski

Wyniki przeprowadzonych symulacji potwierdziły, że zaproponowany 3-punktowy algorytm estymacji składowych impedancji umożliwia wyznaczenie wartości rezystancji i reaktancji dwójnika i jest niewrażliwy na zawartość składowej stałej w próbkowanych przebiegach napięcia i prądu. Istotnym składnikiem złożonej niepewności pomiaru składowych jest wartość błędów kwantowania związana z rozdzielczością przetworników a/c. Dla przetworników o rozdzielczości powyżej 12 bitów dominującym składnikiem staje się niepewność związana z niekoherentnym próbkowaniem, co w istotny sposób wpływa na postać funkcji gęstości prawdopodobieństwa błędów estymacji (rys. 5-6). Wartości graniczne bezwzględnych błędów estymacji przyjmują takie same wartości dla obu składowych, niezależnie od wartości kąta fazowego badanej impedancji.

5. Literatura

- [1] Augustyn J.: Pomiary impedancji metodami algorytmicznymi, *Pomiary Automatyka Kontrola*, 4 (2006), s. 14-16.
- [2] Augustyn J.: Algorytmiczne metody pomiaru impedancji, *Monografie, Studia, Rozprawy Nr 53*, Wyd. Politechniki Świętokrzyskiej, Kielce, 2006.
- [3] Augustyn J.: Influence of the structure of signal conditioning circuits on the uncertainty of impedance measurement with algorithmic methods, *Metrology and Measurement Systems*, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa 2008, vol. XIV, no. 4/2007, pp. 529-541.
- [4] Augustyn J.: Algorytmy przetwarzania sygnałów pomiarowych w układach do pomiarów składowych immittancji, *Metrology and Measurement Systems*, 4 (1999), s. 223-230.
- [5] Augustyn J.: Some LMS-based algorithms for impedance measurements, *Measurement*, vol. 41, no. 2, 2008, pp. 178-185.
- [6] Augustyn J.: Niepewność pomiaru impedancji metodami algorytmicznymi, *Pomiary Automatyka Kontrola*, nr 10, 2007, s. 3-6.
- [7] Ramos P.M., Janeiro F.M., Radil T.: Comparison of impedance measurement in DSP using ellipse-fit and seven-parameter sine-fit algorithms, *Measurement*, 42 (2009), pp. 1370-1379.
- [8] Ramos P.M., Janeiro F.M., Tlemaçani M., Cruz Sierra A.: Recent Developments on Impedance Measurements with DSP-Based Ellipse-Fit Algorithms, *IEEE Trans. Instrum. Meas.*, Vol. 58, No. 5, 2009, pp. 1680-1687.
- [9] Wu Shang-Teh, Hong Jyuan-Lang: Five Point Amplitude Estimation of sinusoidal Signals: with Application to LVDT Signal conditioning, *IEEE Trans. Instrum. Meas.*, Vol. 59, No. 3, 2010, pp. 623-629.
- [10] Guide to the Expression of Uncertainty in Measurement. Supplement 1. Numerical Methods for the propagation of Distributions, BIPM.