

Ryszard BENIAK, Tomasz PYKA

POLITECHNIKA OPOLSKA, WYDZIAŁ ELEKTROTECHNIKI, AUTOMATYKI I INFORMATYKI,
 INSTYTUT UKŁADÓW ELEKTROMECHANICZNYCH I ELEKTRONIKI PRZEMYSŁOWEJ, ul. Luboszycka 7, 45-036 Opole

Dobór nastaw regulatora dla robota trójkołowego przy uwzględnieniu wpływu koła włączanego i zmiennych współczynników tarcia kół o podłoże

Dr inż. Ryszard BENIAK

Absolwent Wydziału Elektrotechniki WSI w Opolu. Od 1986 roku zatrudniony na stanowisku asystenta w Katedrze Napędu Elektrycznego. Pracę doktorską obronił w 1994 roku na Wydziale Elektrycznym Politechniki Śląskiej w Gliwicach. Zainteresowania zawodowe dotyczą: metod modelowania i symulacji przekształtnikowych układów napędowych, metod identyfikacji parametrów, mobilnych układów robotyki oraz metod całkowania równań różniczkowych zwyczajnych.

e-mail: r.beniak@po.opole.pl



Mgr inż. Tomasz PYKA

Absolwent Wydziału Elektrotechniki, Automatyki i Informatyki Politechniki Opolskiej. W roku 2009 ukończył kierunek Automatyka i Robotyka w stopniu inżyniera oraz kierunek Informatyka w stopniu magistra. Zainteresowania zawodowe dotyczą metod symulacji oraz zagadnień sieci komputerowych.

e-mail: tomala_p1@wp.pl



Streszczenie

W artykule przedstawiono metodę doboru nastaw regulatora wykorzystanego do sterowania robota trójkołowego z kołem swobodnym włączonym przy uwzględnieniu losowego początkowego położenia koła swobodnego oraz zmian współczynników tarcia kół o podłoże. Rozważono przypadek nieszlizgającego się i szlizgającego się koła włączanego wykorzystując nowe równania robota trójkołowego. Stosując równanie wariacyjne Pontryagina wykazano wzajemną zależność pomiędzy współczynnikami tarcia oraz podano sposób obliczania współczynników z wykorzystaniem informacji o kątach i prędkościach kątowych.

Słowa kluczowe: optymalizacja, robot trójkołowy, koło swobodne włączone, równanie wariacyjne Pontryagina.

Selection of controller setpoints for a tri-wheel robot when taking into account the impact of a dragged wheel and varying coefficients of wheel friction

Abstract

A tri-wheel robot is a mobile robot which consists of two driving and one free wheels. In standard models there is neglected a fact that the free wheel is very often a drag wheel. The paper presents a method for selecting controller setpoints for a tri-wheel robot with a drag wheel with respect to the randomisation of the initial position of the free wheel, which influences its initial trajectory. Changes in the initial position were randomized from a normal distribution $N(\varphi; 0; 0,4818)$, whereas variations of wheel friction coefficients were drawn from a normal distribution $N(\mu_2; 0,0763; 0,0058)$. There were applied new equations for a tri-wheel robot with a sliding and a non-sliding drag wheel, which were drawn out by means of the Lagrange method. Controller setpoints were determined by use of optimisation approach. For simulation of the trajectory of two different robots (Pioneer-2DX and I-droid 01), there was used a program written in ANSI C and the results were verified by test programs written in FORTRAN. There was proved by means of Pontryagin variation equations that there was a correlation between the coefficients of wheel friction and there was shown how to calculate these coefficients when angles and angular velocities were given.

Keywords: optimisation, tri-wheel robot, free dragged wheel, Pontryagin variation equation.

1. Wstęp

Jedną z konstrukcji robotów mobilnych jest robot trójkołowy. Konstrukcja taka składa się z dwóch kół napędowych i jednego koła swobodnego. W standardowych modelach takiej konstrukcji pomijano fakt, że koło swobodne bardzo często jest kołem włączonym.

Uwzględnienie w modelu tego faktu ma poważne konsekwencje dotyczące nie tylko liczby równań opisujących robota ale także sposobu poruszania się, szczególnie jeśli uwzględni się możliwość

zmienności współczynników tarcia pomiędzy kołami a podłożem. Ponadto wprowadzenie do modelu swobodnego koła włączanego powoduje, że początkowe ustawienie koła swobodnego ma wpływ na początkową część uzyskanej trajektorii. Ustawienie to nie jest stałe, a zmiana tego ustawienia może być przybliżona podczas modelowania za pomocą rozkładu normalnego. Przyjęcie w modelu dodatkowego założenia dotyczącego ciągłości prawych stron równań różniczkowych dodatkowo komplikuje model, bowiem przy przyjęciu że wszystkie parametry układu poza współczynnikami tarcia są stałe, zmiana jednego ze współczynników tarcia wpływa w sposób pośredni na wartość drugiego współczynnika.

W artykule zajęto się kompleksowo zagadnieniem wpływu przyjętego modelu i losowego położenia włączanego koła swobodnego oraz zmiennych współczynników tarcia na nastawy regulatora, którego zadaniem jest takie sterowanie silnikami prądu stałego, aby uzyskać jak najlepsze odwzwierciedlenie zadanej trajektorii. Do uzyskania nastaw regulatora zastosowano podejście optymalizacyjne. Całą symulację ruchu robota wykonano w programie napisanym w ANSI C, posilując się programami testowymi napisanymi w języku FORTRAN.

W rozdziale 2 opisano model robota. W rozdziale 3 przedstawiono równania robota przy uwzględnianiu, że włączone koło swobodne może być kołem nieszlizgającym lub szlizgającym się. W rozdziale 4 sprawdzono wzajemną zależność współczynników tarcia stosując równania wariacyjne Pontryagina. W rozdziale 5 opisano cel i wyniki badania optymalizacyjnego, a w rozdziale 6 przedstawiono przykładowe rezultaty obliczeń.

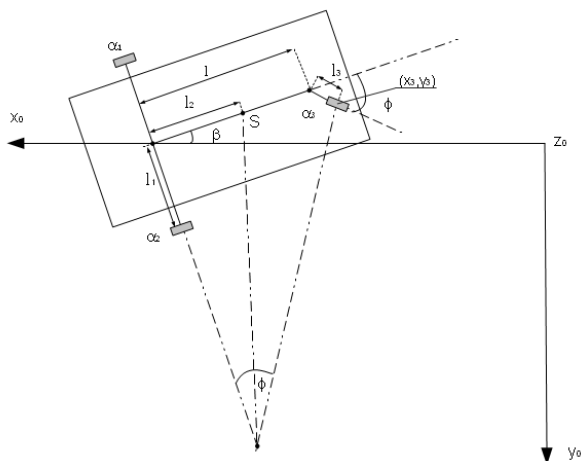
2. Model robota

Do obliczeń przyjęto nowy model robota trójkołowego, uwzględniając wysunięte ramię o długości l_3 z zamocowanym kołem swobodnym włączonym. W modelu (rys. 1.) przyjęto współrzędne określające środek mocowania koła swobodnego, oznaczone jako x_3, y_3 , przy czym: S – środek masy ramy, l – odległość pomiędzy napędem a początkiem ramienia koła swobodnego, l_1 – odległość kół od osi układu, l_2 – odległość od środka masy do środka układu napędowego, l_3 – długość ramienia na którym zamocowane jest koło swobodne, $r_1=r_2$ – promienie kół napędowych, r_3 – promień koła swobodnego, β – kąt obrotu ramy, ϕ – kąt skręcenia koła swobodnego, α_1, α_2 – kąty obrotu kół napędowych, α_3 – kąt obrotu koła włączanego.

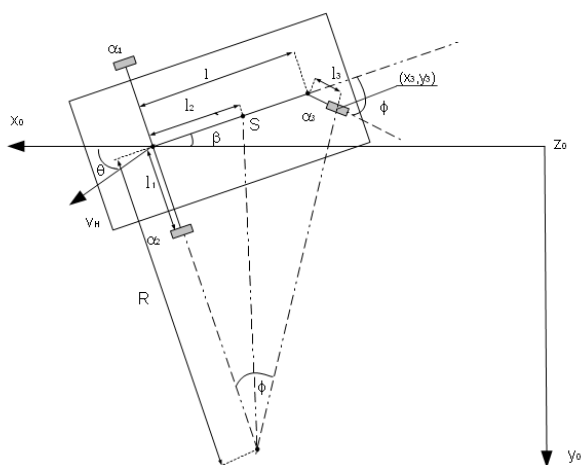
Przyjęto pewne założenia upraszczające, opisane w toku analizy ruchu robota. Następnie założono trajektorię ruchu robota składającą się z:

- ruchu przyspieszonego po prostej,
- ruchu ze stałą prędkością po prostej,
- ruchu po okręgu ze stałą prędkością (rys. 2),

przy czym: θ – chwilowy kąt skręcenia robota, R – promień obrotu, V_H – wektor prędkości.



Rys. 1. Model robota trójkołowego
Fig. 1. Tri-wheel robot model



Rys. 2. Przykładowa trajektoria robota
Fig. 2. Part of moving robot trajectory

3. Wyprowadzenie równań

W celu wyznaczenia kinematyki prostej i odwrotnej modelu rozważanego robota określono jakobiany opisujące więzy kinematyczne występujące dla nieślizgającego się i ślizgającego się koła swobodnego. Dla koła nieślizgającego się wektor pochodnych współrzędnych pierwotnych ma postać: $\dot{\mathbf{q}} = [\dot{x}_A, \dot{y}_A, \dot{\psi}, \dot{\beta}, \dot{\alpha}_1, \dot{\alpha}_2, \dot{\alpha}_3, \dot{x}_S, \dot{y}_S, \dot{\phi}]$, zaś dla koła ślizgającego się wektor jest równy $\dot{\mathbf{q}} = [\dot{x}_A, \dot{y}_A, \dot{\psi}, \dot{\beta}, \dot{\alpha}_1, \dot{\alpha}_2, \dot{\alpha}_3, \dot{x}_S, \dot{y}_S, \dot{\alpha}_3]$.

Koło swobodne jest w tym przypadku całkowicie niezależne, co zostało opisano równaniem (20).

Kolejnym krokiem było wyprowadzenie równań dynamiki prostej oraz odwrotnej robota mobilnego. W tym celu przyjęto uproszczenie, polegające na zastąpieniu obu kół napędowych kołem zastępczym, wg zależności [1]:

$$\dot{\psi} = (\dot{\alpha}_1 + \dot{\alpha}_2)/2 \quad (1)$$

gdzie: $\dot{\psi}$ - zastępcza prędkość obrotowa kół napędowych, $\dot{\alpha}_1, \dot{\alpha}_2$ - prędkości obrotowe kół napędowych. Uproszczenie to powoduje mniejszą złożoność obliczeniową podczas symulacji ruchu po zadanej trajektorii ruchu.

Dla przypadku, gdy swobodne koło się nie ślizga współrzędne uogólnione (stanu) to $\mathbf{q} = [\beta, \psi, \phi]$ zaś dla koła ślizgającego się $\mathbf{q} = [\beta, \psi, \phi, \alpha_3]$.

Analizując oba przypadki, wyznaczono energię kinetyczną. Dla koła nieślizgającego się, ze względu na występujące więzy:

$$\dot{x}_3^2 + \dot{y}_3^2 - \dot{\alpha}_3^2 r_3^2 = 0, \quad (2)$$

energia kinetyczna jest równa:

$$\begin{aligned} T = & \frac{1}{2} \left(m_3 + \frac{I_{z3}}{r_3^2} \right) (r_3^2 \dot{\psi}^2 + l^2 \dot{\beta}^2 + l_3^2 (\dot{\phi} - \dot{\beta})^2 + \\ & + 2l_3 (\dot{\phi} - \dot{\beta})(r_3 \dot{\psi} \sin \phi - l \dot{\beta} \cos \phi)) + \frac{1}{2} I_{y3} (\dot{\phi} - \dot{\beta})^2 + \\ & + (m_1 r_1^2 + I_{z1}) (\dot{\psi}^2 + h_1^2 \dot{\beta}^2) + I_{y1} \dot{\beta}^2 + \\ & + \frac{1}{2} m_5 (r_1^2 \dot{\psi}^2 + l_2^2 \dot{\beta}^2) + \frac{1}{2} I_{z5} \dot{\beta}^2 \end{aligned} \quad (3)$$

Siły uogólnione dla tego przypadku wynoszą:

$$\tilde{P}_\beta = h_1 [(M_1 - M_2) - (N_1 \mu_1 - N_2 \mu_2) \dot{\psi} - (N_1 \mu_1 + N_2 \mu_2) h_1 \dot{\beta}], \quad (4)$$

$$\tilde{P}_\psi = M_1 + M_2 - (N_1 \mu_1 + N_2 \mu_2) \dot{\psi} - (N_1 \mu_1 + N_2 \mu_2) h_1^2 \dot{\beta}, \quad (5)$$

$$\tilde{P}_\phi = -N_3 \mu_3 l_3 \sin(\phi) - D_\phi \dot{\phi} \operatorname{sgn}(\dot{\phi}), \quad (6)$$

Dla koła swobodnego wólczonego ślizgającego się energia kinetyczna wynosi:

$$\begin{aligned} T = & \frac{1}{2} m_3 (r_1^2 \dot{\psi}^2 + l^2 \dot{\beta}^2 + l_3^2 (\dot{\phi} - \dot{\beta})^2 + \\ & + 2l_3 (\dot{\phi} - \dot{\beta})(r_1 \dot{\psi} \sin \phi - l \dot{\beta} \cos \phi)) + \frac{1}{2} I_{y3} (\dot{\phi} - \dot{\beta})^2 + \\ & + \frac{1}{2} I_{z3} \dot{\alpha}_3^2 + \frac{1}{2} (m_1 r_1^2 + I_{z1}) (\dot{\psi}^2 + h_1^2 \dot{\beta}^2) + I_{y1} \dot{\beta}^2 + \\ & + \frac{1}{2} I_{z5} \dot{\beta}^2 + \frac{1}{2} m_5 (r_1^2 \dot{\psi}^2 + l_2^2 \dot{\beta}^2). \end{aligned} \quad (7)$$

Siły działające na układ są równe:

$$\tilde{P}_\beta = (M_1 - M_2) h_1 - (N_1 f_1 - N_2 f_2) h_1 \dot{\psi} - (N_1 f_1 + N_2 f_2) h_1^2 \dot{\beta}, \quad (8)$$

$$\tilde{P}_\psi = M_1 + M_2 - (N_1 f_1 + N_2 f_2) \dot{\psi} - (N_1 f_1 + N_2 f_2) h_1^2 \dot{\beta}, \quad (9)$$

$$\tilde{P}_\phi = -N_3 \mu_3 l_3 \sin(\phi) - D_\phi \dot{\phi} \operatorname{sgn}(\dot{\phi}), \quad (10)$$

$$\tilde{P}_{\alpha_3} = -N_3 \mu_3 r_3 \cos(\phi) - D_{\alpha_3} \dot{\alpha}_3, \quad (11)$$

przy czym: m_1, m_2 - masy kół napędowych, m_3 - masa koła swobodnego, m_5 - masa platformy robota, μ_1, μ_2 - współczynniki tarcia kół napędowych o powierzchnię, μ_3 - współczynnik tarcia koła swobodnego o podłoże, $I_{z1}, I_{z2}, I_{z4}, I_{z5}, I_{y1}, I_{y2}, I_{y3}$ - momenty bezwładności, N_1, N_2 - nacisk kół napędowych na podłoże, N_3 - nacisk koła swobodnego, D_ϕ - współczynnik tarcia wiskotycznego charakteryzujący tłumienie ruchu dla zmiany kąta ϕ koła swobodnego, D_{α_3} - współczynnik tarcia wiskotycznego charakteryzujący tłumienie ruchu dla zmiany kąta α_3 koła swobodnego i M_1, M_2 - momenty napędowe.

Korzystając z równania Lagrange'a II rodzaju [1, 2]:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial(T-U)}{\partial \dot{q}} \right) - \left(\frac{\partial(T-U)}{\partial q} \right) = \mathbf{P} + \mathbf{J}(\mathbf{q}) \boldsymbol{\lambda}, \quad (12)$$

w przypadku nieślizgającego się wólczonego koła swobodnego otrzymano równania:

$$\begin{aligned} \tilde{P}_\beta = & \left\{ \left(m_3 + \frac{I_{z3}}{r_3^2} \right) (l^2 + l_3^2 + 2l_3 l \cos \phi) + I_{y3} + \right. \\ & + 2(m_1 r_1^2 + I_{z1}) h_1^2 + 2I_{y1} + m_5 l_2^2 + I_{z5} \} \ddot{\beta} + \\ & - \left\{ \left(m_3 + \frac{I_{z3}}{r_3^2} \right) l_3 r_1 \ddot{\psi} \sin \phi \right\} \ddot{\psi} + \\ & - \left\{ \frac{1}{2} \left[\left(m_3 + \frac{I_{z3}}{r_3^2} \right) (2l_3^2 + 2l_3 l \cos \phi) + I_{y3} \right] \right\} \ddot{\phi} + \\ & - \left(m_3 + \frac{I_{z3}}{r_3^2} \right) l_3 [r_1 \dot{\psi} \dot{\phi} \cos \phi + 2l \dot{\beta} \dot{\phi} \sin \phi] + \\ & + \left(m_3 + \frac{I_{z3}}{r_3^2} \right) l_3 l \dot{\phi}^2 \sin \phi, \end{aligned} \quad (13)$$

$$\begin{aligned} \tilde{P}_\psi = & \left\{ (2m_1 + m_3 + m_5) r_1^2 + I_{z3} \frac{r_1^2}{r_3^2} + 2I_{z1} \right\} \ddot{\psi} + \\ & \left(m_3 + \frac{I_{z3}}{r_3^2} \right) l_3 r_1 \{ (\ddot{\phi} - \ddot{\beta}) \sin \phi + (\dot{\phi} - \dot{\beta}) \dot{\phi} \cos \phi \}, \end{aligned} \quad (14)$$

$$\begin{aligned} \tilde{P}_\phi = & \left\{ \left(m_3 + \frac{I_{z3}}{r_3^2} \right) l_3^2 + I_{y3} \right\} \ddot{\phi} + \left(m_3 + \frac{I_{z3}}{r_3^2} \right) l_3 r_1 \ddot{\psi} \sin \phi + \\ & - \frac{1}{2} \left(m_3 + \frac{I_{z3}}{r_3^2} \right) \{ 2l_3^2 + 2l_3 l \cos \phi - I_{y3} \} \ddot{\beta} + \\ & + \left(m_3 + \frac{I_{z3}}{r_3^2} \right) l_3 r_1 \dot{\psi} \dot{\phi} \cos \phi + \left(m_3 + \frac{I_{z3}}{r_3^2} \right) [l_3 \dot{\phi} \dot{\beta} \sin \phi + \\ & - l_3 (\dot{\phi} - \dot{\beta}) r_1 \dot{\psi} \cos \phi + l \dot{\beta} \dot{\phi} \sin \phi], \end{aligned} \quad (15)$$

gdzie: $\tilde{P}_\beta, \tilde{P}_\psi, \tilde{P}_\phi$ wyrażono równaniami (4–6).

Z kolei w przypadku koła wólczonego ślizgającego się występują zależności:

$$\begin{aligned} \tilde{P}_\beta = & \{ m_3 (l^2 + l_3^2 + 2l_3 l \cos \phi) + I_{y3} + \\ & + 2(m_1 r_1^2 + I_{z1}) h_1^2 + 2I_{y1} + m_5 l_2^2 + I_{z5} \} \ddot{\beta} + \\ & + \{ -m_3 l_3 r_1 \ddot{\psi} \sin \phi \} \ddot{\psi} + \\ & - \{ m_3 (l_3^2 + l_3 l \cos \phi) + I_{y3} \} \ddot{\phi} + \\ & - m_3 l_3 [r_1 \dot{\psi} \dot{\phi} \cos \phi + 2l \dot{\beta} \dot{\phi} \sin \phi] + \\ & + m_3 \dot{\phi}^2 l_3 l \sin \phi, \end{aligned} \quad (16)$$

$$\begin{aligned} \tilde{P}_\psi = & \{ (2m_1 + m_3 + m_5) r_1^2 + I_{z1} \} \ddot{\psi} + \\ & + m_3 l_3 r_1 \{ (\ddot{\phi} - \ddot{\beta}) \sin \phi + (\dot{\phi} - \dot{\beta}) \dot{\phi} \cos \phi \}, \end{aligned} \quad (17)$$

$$\begin{aligned} \tilde{P}_\phi = & \{ m_3 l_3^2 + I_{y3} \} \ddot{\phi} + m_3 l_3 r_1 \ddot{\psi} \sin \phi - \\ & - \frac{1}{2} m_3 \{ 2l_3^2 + 2l_3 l \cos \phi - I_{y3} \} \ddot{\beta} + \\ & + m_3 l_3 r_1 \dot{\psi} \dot{\phi} \cos \phi + m_3 [l_3 \dot{\phi} \dot{\beta} \sin \phi - \\ & - l_3 (\dot{\phi} - \dot{\beta}) r_1 \dot{\psi} \cos \phi + l \dot{\beta} \dot{\phi} \sin \phi], \end{aligned} \quad (18)$$

$$\tilde{P}_{\alpha 3} = I_{z3} \ddot{\alpha}_3, \quad (19)$$

gdzie: $\tilde{P}_\beta, \tilde{P}_\psi, \tilde{P}_\phi, \tilde{P}_{\alpha 3}$ wyrażono równaniami (8–11). Po przekształceniu (21) otrzymujemy:

$$\ddot{\alpha}_3 = \frac{1}{I_{z3}} (N_3 \mu_3 r_3 \cos(\phi) - D_{\alpha 3} \dot{\alpha}_3), \quad (20)$$

4. Sprawdzenie niezależności parametrów

Model matematyczny opisuje w sposób umowny (zawierający uproszczenia) obiekt poddany modelowaniu, jednak aby dokonać poprawnego modelowania zachowania układu zbliżonego do rzeczywistości dla zmiennych parametrów, należy przyjąć ograniczenie co do możliwości zmiany parametrów, szczególnie wtedy gdy wzajemnie zależą od siebie i poprzez swoje powiązanie mogą wpływać na niewłaściwe rozwiązanie równań różniczkowych.

W procesie rozwiązywania numerycznego równań różniczkowych (r. r.) mają one najczęściej postać równań pierwszego rzędu i dlatego w celu analizy niezależności zmieniających parametrów rozważono układ r. r. postaci [3]:

$$\dot{x}_i = f_i(t, x_1, \dots, x_n, \mu_1, \dots, \mu_l), \quad (21)$$

gdzie $i = 1, \dots, n$, przy czym n określa liczbę r. r. opisujących robota a ponadto μ_1, \dots, μ_l oznaczają parametry modelu robota przy czym l oznacza liczbę parametrów, x_1, \dots, x_n to zmienne stanu, zaś $f_i(t, \mathbf{x}, \boldsymbol{\mu})$ opisuje prawe strony równań różniczkowych, \dot{x}_i oznacza pochodną zmiennej stanu x_i oraz t czas. W analizowanym przypadku przyjęto ciągłość funkcji $f_i(t, x_1, \dots, x_n, \mu_1, \dots, \mu_l)$ dla zmiennych współczynników tarcia μ_1 i μ_2 kół napędowych o podłożu.

Ponieważ funkcje $f_i(t, \mathbf{x}, \boldsymbol{\mu})$ są ciągłe to analizując równanie (21) wraz z warunkiem początkowym $x(t_0) = x_0$ można zapisać równanie całkowe:

$$\varphi(t, \boldsymbol{\mu}) = x_0 + \int_{t_0}^t f(\tau, \varphi(\tau, \boldsymbol{\mu}), \boldsymbol{\mu}) d\tau, \quad (22)$$

opisujące zmienne układu.

Zakładając różniczkowalność funkcji $f_i(t, \mathbf{x}, \boldsymbol{\mu})$ obliczamy wrażliwość tej funkcji na zmiany parametrów:

$$\begin{aligned} e_{i,k}(t, \mathbf{x}, \boldsymbol{\mu}) = & \frac{\partial}{\partial \mu_k} f_i(t, \mathbf{x}, \boldsymbol{\mu}), \\ i \in & \{1, \dots, n\}, k \in \{1, \dots, l\}. \end{aligned} \quad (23)$$

Zgodnie z [3] lokalna wypukłość funkcji $f_i(t, \mathbf{x}, \boldsymbol{\mu})$ pozwala na wyrażenie układu równań wariacyjnych:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \varphi_i(t, \boldsymbol{\mu})}{\partial \mu_k} \right) = & \sum_{i=1}^n f_{i,k}(t, \varphi(t, \boldsymbol{\mu}), \boldsymbol{\mu}) \frac{\partial \varphi_i(t, \boldsymbol{\mu})}{\partial \mu_k} + \\ & + e_{i,k}(t, \varphi(t, \boldsymbol{\mu}), \boldsymbol{\mu}), \end{aligned} \quad (24)$$

przy warunku początkowym:

$$\frac{\partial \varphi_i(t_0, \boldsymbol{\mu})}{\partial \mu_k} = 0, \quad (25)$$

opisującym niezmiennosc rozwiązań (w punkcie początkowym) względem zmiany parametrów.

Analizując układ robota mobilnego trójkołowego z nieślizgającym się kołem swobodnym na podstawie równań (21 - 25) otrzymano zależności pomiędzy współczynnikami tarcia kół tocznych o podłożu (w zastosowanej metodyce drugi współczynnik jest

losowany z rozkładu normalnego $N(\mu_2; 0,0763; 0,0058)$, natomiast pierwszy jest od niego zależny).

Z uwagi na bardzo rozbudowaną postać równań przedstawiono przykładowe zależności przy dwóch kątach skręcenia koła swobodnego przyjmując, że h jest aktualnym krokiem czasowym numerycznego całkowania równań różniczkowych, przy czym wartości liczbowe zawarte w równaniach (26) i (27) obliczono na podstawie danych robota I-droid 01 zawartych w rozdziale 6.

a) $\phi = 0$ [rad]:

$$\begin{aligned} \mu_1 = & -\frac{1}{\beta h} [3,787 \cdot 10^{-25} (-3,723 \cdot 10^{19} \dot{\phi} \dot{\psi} h - \\ & - 1,021 \cdot 10^{20} \dot{\phi} \dot{\beta} h + 2,64 \cdot 10^{24} \dot{\beta} \mu_2 h + \\ & + 3,823 \cdot 10^{19} \dot{\phi} \dot{\psi} h + 1,021 \cdot 10^{20} \dot{\beta}^2 h - 1,149 \cdot 10^{22} \dot{\beta})], \end{aligned} \quad (26)$$

b) $\phi = \pi/6$ [rad]:

$$\begin{aligned} \mu_1 = & [0,143 \cdot 10^{-5} (2,769 \cdot 10^{22} \cdot \dot{\beta} \dot{\phi} h + 9,437 \cdot 10^{21} \dot{\phi} \dot{\psi} h - \\ & - 6,448 \cdot 10^{26} \dot{\beta} \mu_2 h - 1,306 \cdot 10^{23} \dot{\psi} \mu_2 h - 5,125 \cdot 10^{22} \dot{\beta}^2 h - \\ & - 2,05 \cdot 10^{22} \dot{\beta} \dot{\psi} h - 1,169 \cdot 10^{21} \dot{\psi}^2 h + 2,839 \cdot 10^{24} \dot{\beta} + \\ & + 2,105 \cdot 10^{20} \dot{\psi})] / \{h(9,215 \cdot 10^{20} \dot{\beta} + 1,866 \cdot 10^{17} \dot{\psi})\}, \end{aligned} \quad (27)$$

Korzystając z [3,4] sprawdzono wzajemną zależność współczynników tarcia kół tocznych o podłoże. Jeśli jeden ze współczynników zmienia się w sposób losowy, to drugi musi zmieniać się w ściśle określony sposób, gdyż w przeciwnym razie rozwiązania równań nie będą ciągłe, co pokazano w zależnościach (26 oraz 27).

5. Cel i metodyka badania optymalizacyjnego

W chwili stawiania robota na podłoże, koło swobodne przyjmuje dowolne położenie, aby więc zbliżyć symulację komputerowe do rzeczywistego zachowania robota, wylosowano 31 kątów z rozkładu normalnego $N(\varphi; 0; 0,4818)$ [5].

Pętla sprzężenia zwrotnego, w której zaimplementowany był regulator może być opisana za pomocą równania [6]:

$$\begin{bmatrix} \ddot{\psi} \\ \ddot{\beta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \ddot{\psi}_d \\ \ddot{\beta}_d \end{bmatrix} + [\mathbf{K1}] \begin{bmatrix} \dot{\psi}_d - \dot{\psi} \\ \dot{\beta}_d - \dot{\beta} \end{bmatrix} + [\mathbf{K2}] \begin{bmatrix} \psi_d - \psi \\ \beta_d - \beta \end{bmatrix}, \quad (28)$$

przy czym $\ddot{\psi}_d, \ddot{\beta}_d, \dot{\psi}_d, \dot{\beta}_d, \psi_d, \beta_d$ oznaczają wartości zadane regulatora odpowiadające przyspieszeniom, prędkościom i kątom opisującym ruch robota do przodu i skręcenie korpusu robota. Układ regulatora został zaimplementowany jako podwójne SISO.

Do celów optymalizacyjnych przyjęto dwie funkcje celu:

$$J_1 = \frac{1}{2n-2} \sum_{i=1}^n [(\Delta\psi_i)^2 + (\Delta\beta_i)^2], \quad (29)$$

przy czym $\Delta\psi_i$ jest różnicą wartości kąta ψ dla chwili czasowej t_i a $\Delta\beta_i$ jest różnicą wartości kąta β ,

$$J_2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n [(x_d - x_o)^2 + (y_d - y_o)^2], \quad (30)$$

przy czym x_d, y_d - wartość zadana położenia, x_o, y_o - wartość obliczona położenia.

Na podstawie równań (13 - 15) oraz (16 - 19) utworzono program w języku ANSI C oraz wykonano obliczenia dla przypadku, gdy koło włączone się nie ślizga oraz gdy się ślizga, przy dwóch różnych funkcjach celu (29, 30) wykorzystanych w metodzie minimalizacji Hooke'a-Jeevesa [7, 8, 9].

W układzie zamodelowano również silniki prądu stałego, które przybliżają rzeczywiste zmiany momentu napędowego przy wymuszonym przez momenty zadane sterowaniu napięcia twornika. Wykonano także symulację po zadanej trajektorii dla układu rzeczywistego robota I-droid01. Wszystkie symulacje zostały przeprowadzone z uwzględnieniem współczynników tarcia o podłoże, które mogą się zmieniać w sposób losowy w każdym kroku i są wzajemnie zależne od siebie, co zostało wykazane w (28) i (29). Dla uproszczenia przyjęto, że naciski kół na podłoże się nie zmieniają.

6. Rezultaty obliczeń

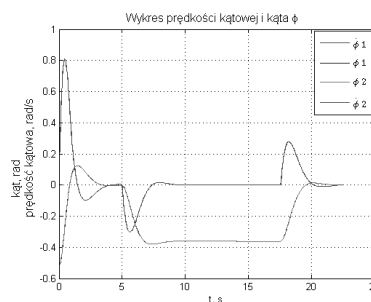
Do modelowania robota trójkołowego wykorzystano dane robota Pioneer-2DX [1] oraz dane robota I-droid 01 [10]: $l_1=0,096$ m, $l_2=0,12$ m, $l_3=0,01$ m, $l=0,26$ m, $m_1=m_2=0,0789$ kg, $m_3=0,0097$ kg, $m_5=1,8324$ kg, $J_{z1}=4,8355 \cdot 10^{-5}$ kg·m², $J_{y1}=4,7862 \cdot 10^{-5}$ kg·m², $r_1=0,035$ m, $J_{z3}=1,0875 \cdot 10^{-6}$ kg·m², $J_{y3}=1,8327 \cdot 10^{-6}$ kg·m², $r_3=0,015$ m, $J_{z5}=0,0045$ kg·m².

Dane dla robota I-droid 01 zostały oszacowane na podstawie wymiarów robota oraz danych z [10]. Model robota trójkołowego I-droid 01 charakteryzuje się znacznymi różnicami wartości parametrów względem zastosowanych do optymalizacji wartości parametrów robota Pioneer-2DX. Przeprowadzenie symulacji dla danych robota I-droid 01 (rys. 10-15) miało potwierdzić poprawność zastosowanego modelu robota i sprawdzić poprawność obliczeń numerycznych przy bardzo małych wartościach momentów bezwładności. Dane robota odpowiadają oznaczeniom przedstawionym na rys. 1.

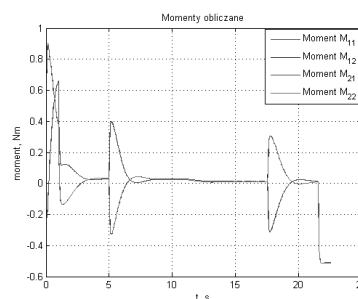
Na rysunku 4 i 5 przedstawiono wykresy momentów, w ich początkowej fazie można zauważyć znaczne wartości momentów powodujących stabilizację ruchu oraz momenty odpowiadające chwili czasowej wejścia i wyjścia z ruchu po okręgu ze stałą prędkością.

W wyniku przeprowadzonych symulacji dla danych robota Pioneer-2DX przy uwzględnieniu dwóch różnych funkcji celu (29) i (30) otrzymano następujące zestawy rozwiązań dla optymalnych nastaw regulatora:

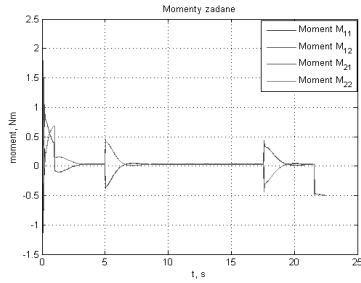
a) koło się nie ślizga – 1 i 2 funkcja celu (29) i (30),



Rys. 3. Wykres prędkości kątowej i kąta ϕ
Fig. 3. Angular velocity and angle ϕ trajectory

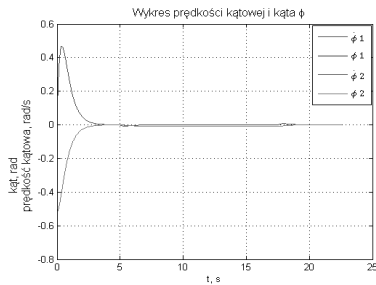


Rys. 4. Wykres momentów obliczanych
Fig. 4. Calculated torques waveforms

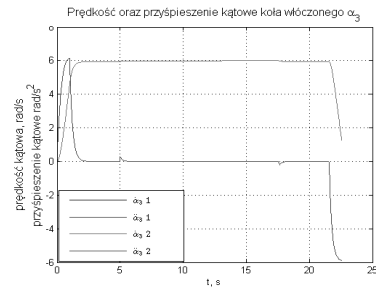


Rys. 5. Wykres momentów zadanych
Fig. 5. Controlled torques waveforms

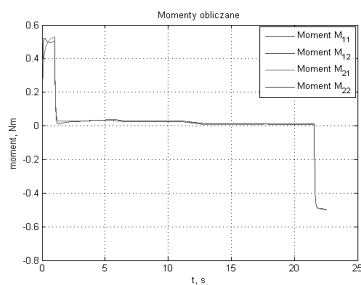
b) koło się ślizga – 1 i 2 funkcja celu (29) i (30),



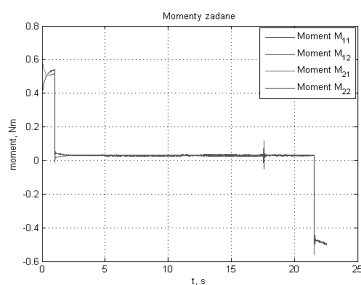
Rys. 6. Wykres prędkości kątowej i kąta phi
Fig. 6. Angular velocity and angle phi trajectory



Rys. 7. Wykres prędkości i przyspieszenia koła wólczonego alpha_3
Fig. 7. Angular acceleration and velocity of dragged wheel alpha_3

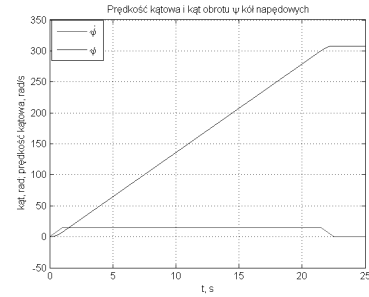


Rys. 8. Wykres momentów obliczanych
Fig. 8. Calculated torques waveforms

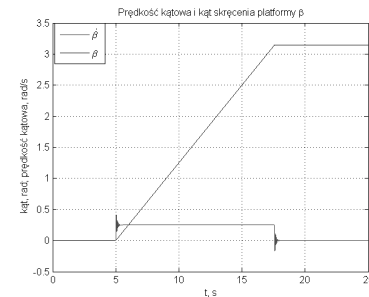


Rys. 9. Wykres momentów zadanych
Fig. 9. Controlled torques waveforms

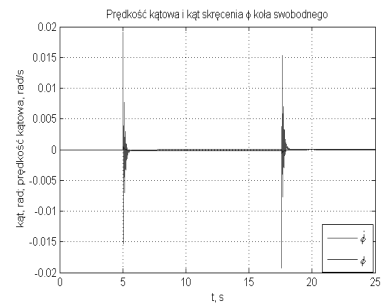
c) symulacja dla koła ślizgającego się dla rzeczywistego robota I-droid01 bez optymalizacji nastaw regulatora.



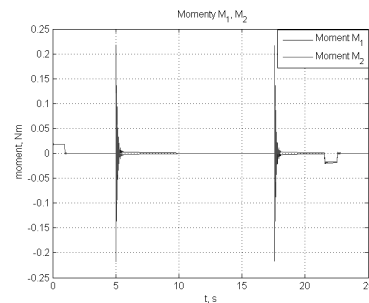
Rys. 10. Wykres prędkości kątowej i kąta obrotu wólczonego psi
Fig. 10. Angular velocity and angle psi trajectory



Rys. 11. Wykres prędkości i kąta skręcenia platformy beta
Fig. 11. Chassis angular velocity and angle beta trajectory

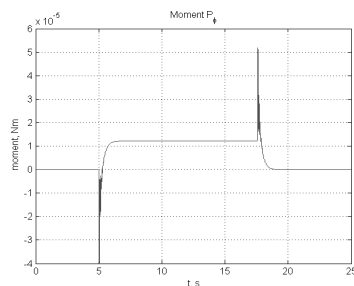


Rys. 12. Wykres prędkości kątowej i kąta phi
Fig. 12. Angular velocity and angle phi trajectory

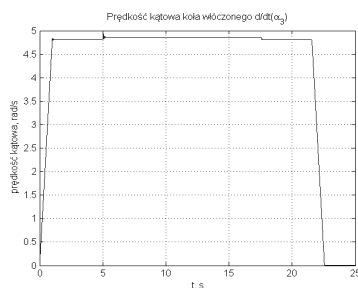


Rys. 13. Wykres momentów
Fig. 13. Torques waveforms

Uzyskano również następujący wykres dla koła swobodnego wólczonego oraz siły uogólnionej P_phi:



Rys. 14. Wykres siły uogólnionej P_ϕ
Fig. 14. Generalised force P_ϕ waveform



Rys. 15. Wykres prędkości kątowej koła włożonego
Fig. 15. Free drag wheel angular velocity trajectory

Tabela 1 przedstawia uzyskane za pomocą optymalizacji nastawy regulatorów oraz różnice pomiędzy trajektoriami zadanymi i otrzymanymi dla nastaw początkowych oraz nastaw optymalnych. Przy czym indeksy a, b, c, d odnoszą się do: a - koło włożone się nie ślizga (1 i 2 funkcja celu), b - koło włożone się ślizga (1 i 2 funkcja celu), c - koło włożone się ślizga (2 funkcja celu).

Tab. 1. Wyniki symulacji i optymalizacji
Tab. 1. Simulation and optimization results

	Przed optymalizacją	Po optymalizacji
K_{1a}	1,0	$5,4150 e^2$
K_{2a}	1,0	$5,4150 e^2$
ε_{1a}	$3,6476 e^{-4}$	$3,1017 e^{-5}$
K_{1b}	1,0	$5,4150 e^2$
K_{2b}	1,0	$5,4150 e^2$
ε_{1b}	$6,3979 e^{-4}$	$5,4924 e^{-5}$
K_{1c}	1,0	$1,8285 e^3$
K_{2c}	1,0	$1,6125 e^3$
ε_{1c}	$3,6115 e^{-4}$	$2,8745 e^{-5}$
K_{1d}	1,0	$1,8286 e^3$
K_{2d}	1,0	$1,6255 e^3$
ε_{1d}	$6,2890 e^{-5}$	$5,0053 e^{-5}$

Indeksy przy konkretnych parametrach odpowiadają funkcji celu, tj. M_{11}, M_{12} dla pierwszej funkcji celu a M_{21}, M_{22} dla drugiej funkcji celu.

Na podstawie uzyskanych, po przeprowadzeniu optymalizacji dla 31 kątów startowych, rezultatów przedstawionych w tabeli 1 można wywnioskować, iż uzyskano nieznaczną poprawę ruchu po trajektorii, gdyż pomimo bardzo dużych wzmocnień regulatora występują znaczne zakłócenia w początkowej trajektorii ruchu, silnie zmienny sygnał sterujący jest wygładzany przez silniki DC, będące z punktu widzenia automatyki elementami całkującymi z inercją pierwszego rzędu.

7. Podsumowanie

Przeprowadzając dokładną analizę robota trójkołowego z kołem swobodnym, można zaobserwować duży wpływ dowolnego położenia początkowego koła swobodnego na wyniki symulacji. Dodatkowo spore znaczenie ma rodzaj ruchu koła włożonego, czy ślizga i toczy się ono po podłożu, czy też jedynie toczy się po nim. Cały układ uwzględniał również zmienne do współczynniki tarcia o podłoże, gdyż rzeczywista powierzchnia nie jest idealna, a co za tym idzie, pojawia się zakłócenie działające na układ w postaci szumu stochastycznego, jakim jest zmienność podłoża.

Optymalne wartości nastaw regulatora uzyskano przeprowadzając optymalizację dla 31 różnych skręceń kąta swobodnego. Po optymalizacji otrzymano wartości błędów na poziomie 10^{-5} . Wartości zmiany nastaw regulatora od początkowych do optymalnych nie wpływają silnie na zgodność pełnych trajektorii. Jest to spowodowane znaczącym wpływem położenia początkowego koła swobodnego (duże różnice w trajektorii w początkowej fazie) oraz bardzo małymi różnicami pomiędzy trajektorią zadaną a otrzymaną po ustabilizowaniu ruchu robota, czyli uzyskaniu wstępnej zgodności pomiędzy ruchem zadanym a realizowanym z minimalnym błędem.

Optymalizację przeprowadzono stosując dwie funkcje celu, przy czym wyniki uzyskane przy ich wykorzystaniu, były porównywalne, co potwierdza poprawność obliczeń optymalizacyjnych.

Analizowany model robota uwzględniał w symulacji modele silników prądu stałego, które spowodowały, że wymuszenia ze strony regulatora były realizowane z opóźnieniem, przez co zachowanie robota stało się bliskie zachowaniu układu rzeczywistego.

Przed przeprowadzeniem symulacji sprawdzono również wzajemną niezależność zmienianych w toku symulacji parametrów i w rezultacie uzyskano zależność pomiędzy dwoma współczynnikami tarcia. Zgodnie z (28) przy zmianie jednego ze współczynników, drugi jest w sposób pośredni zależny od niego i nie może się zmieniać w sposób dowolny, gdyż wtedy rozwiązanie układu równań różniczkowych opisujących ruch robota prowadziłyby do uzyskania niewłaściwych rozwiązań dla przyjętych zmiennych stanu.

8. Literatura

- [1] Giergiel M. J., Hendzel Z., Żylski W.: Modelowanie i sterowanie mobilnych robotów kołowych, Warszawa, Wydawnictwo Naukowe PWN, 2002.
- [2] Beniak R., Wach P.: Zadania z dynamiki układów elektromechanicznych przy zastosowaniu MAPLE V, Opole, Politechnika Opolska, Oficyna Wydawnicza, 1999.
- [3] Pontrjagin L. S.: Równania różniczkowe zwyczajne, Warszawa, Państwowe Wydawnictwo Naukowe, 1964.
- [4] Pyka T.: Analiza przestrzeni działań robota mobilnego z uwzględnieniem więzów nieholonomicznych, Opole, 2009.
- [5] Pyka T.: Oprogramowanie dodatkowe robota mobilnego I-droid 01 z uwzględnieniem niepewności ustawienia koła swobodnego, Opole 2009.
- [6] Spong M.W., Vidyasagar M.: Robot Dynamics and Control, J. Wiley & Sons, 1989.
- [7] Findeisen W., Szymanowski J., Wierzbicki A.: Teoria i metody obliczeniowe optymalizacji, Warszawa, PWN, Oficyna Wydawnicza 1980.
- [8] Brandt S.: Analiza danych, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa 2002.
- [9] Walter E., Pronzato L.: Identification of Parametric Models from Experimental Data, Springer Masson, Paris Milan, Barcelona-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1997.
- [10] <http://www.i-droid01.com> (02-07-2010)