

**Bogdan GRZYWACZ**

ZACHODNIOPOMORSKI UNIWERSYTET TECHNOLOGICZNY, WYDZIAŁ ELEKTRYCZNY, KATEDRA STEROWANIA I POMIARÓW  
ul. Sikorskiego 37, 70-310 Szczecin

## Wykorzystanie koncepcji sterowania skalą czasu do syntezy sterowań dla liniowych i nieliniowych układów dynamicznych

Dr inż. Bogdan GRZYWACZ

Adiunkt w Instytucie Automatyki Przemysłowej Zachodniopomorskiego Uniwersytetu Technologicznego (dawniej Politechnika Szczecińska). Tematyka badań: modele dynamiki i ich identyfikacja, sterowanie obiektami nieliniowymi, filtracja sygnałów. Był głównym inżynierem kompleksu biurowo-hotelowego Pazim-Raddisson w Szczecinie, gdzie zdobył wiedzę i doświadczenie w zakresie eksploatacji i automatyki kompleksowej systemów technicznych w budynkach o wielkich kubaturach.

e-mail: grzywacz@zut.edu.pl



### Streszczenie

W pracy przedstawiono nową koncepcję sterowania obiektami dynamicznymi, tak liniowymi jak i nieliniowymi, poprzez sterowanie skalą czasu wyjścia obiektu. Zaproponowano implementację tej koncepcji w ramach zmodyfikowanej struktury MFC. Wskazano korzystne własności charakteryzujące jakość regulacji w przypadku stosowania sterowań opartych o reguły skalowania czasowego. Rozważania ilustrowane są przykładami.

**Słowa kluczowe:** sterowanie obiektami liniowymi i nieliniowymi, skalowanie czasowe odpowiedzi układów dynamicznych, sterowanie z użyciem modelu obiektu.

### Application of idea of time–scale control to synthesis of control signals for linear and nonlinear objects

#### Abstract

A new concept of control of objects described by state equation system (1) or equivalent ones is proposed. Basing on Eqs. (5),(6) and model (2) shown in Fig. 1, one can determine such an object input  $U(t)$  that the output has the form  $Y(T)$ , where the “new” time  $T$  is defined by formula  $dT=A(t)dt$  depending on the time-variable, time-scale coefficient  $A(t)$ .  $Y(t)$  is the object response to the reference input for  $A=1$  (see Fig. 3). Signal  $A(t)$  is formed on the basis of control system error signal  $e(t)$  as the result of static, linear or nonlinear operation  $A(t)=q(e(t))$ , where  $q(0)=0$ . Thus, using (5),(6) and model (2), one can design the modified MFC structure shown in Fig. 4 for precise control of the object output  $Y$ . The principle of control is very simple: if the error reaches the value  $e(t)=A(t)=0$ , then the object model in Fig. 1 can be treated as decoupled, values of its state variables remain the same and model output  $y$  remains the same, too. Because  $Y$  follows  $y$  (Fig. 4), the changes of the object output  $Y$  do not occur. If  $e(t)=A(t) \neq 0$ , then  $y$  and  $Y$  tend to the reference signal  $y_0$  and the rate of this follow-up action depends on the choice of  $q(e(t))$ . During this process the consecutive values of the model and object output are  $y(T)$  and  $Y(T)$ . This means, that the “reference” plant response  $Y(t)$  for  $A=1$  exactly defines  $Y(T)$ . The mentioned above properties generate an extremely simple way for analysis of the system stability and allow obtaining perfect results of the follow-up action (lack of overshoots, short setting times) – see Figs. 5, 6.

**Keywords:** control of linear and nonlinear objects, time-scaling of system responses, control based on object model.

### 1. Wstęp

W [1, 2] dokonano syntezy sygnałów sterujących  $U_A(t)$ , które powodują, że odpowiedź obiektu przyjmie postać  $Y(AT)$ , gdzie  $Y(t)$  jest odpowiedzią „odniesienia” otrzymaną dla wymuszenia  $U(t)$ , a stała  $A$  jest współczynnikiem skali czasu. Jeśli  $A>1$ , to odpowiedzi układu są „przyspieszane” w porównaniu z odpowiedzią odniesienia (otrzymaną dla  $A=1$ ), a dla  $0<A<1$  ulegają spowolnieniu. Dokładnie skalowana odpowiedź zachowuje te same wartości parametrów związanych z kształtem odpowiedzi odniesienia

(przeregulowanie, błąd statyczny, stopień tłumienia oscylacji, itd.). Skalowanie odpowiedzi układu stabilnego nie powoduje też utraty stabilności, bo odpowiedź układu skalowanego niejako powiela odpowiedź odniesienia, a od  $A$  zależy tylko „tempo” generowania tych odpowiedzi. Zaletą sterowania opartego o skalowanie czasowe jest też możliwość natychmiastowej interpretacji własności układu w dziedzinie częstotliwości (jeśli  $Y(t)$  ma reprezentację widmową  $Y(j\omega)$ , to  $A^{-1}Y(A^{-1}\omega)$  jest widmem  $Y(AT)$ ). Własności częstotliwościowe układu dla  $A=1$  określają więc własności dla dowolnego  $A$ , a wiele parametrów definiowanych w oparciu o reprezentację widmową (np. zapas stabilności, częstotliwościowe miary interakcji pomiędzy torami transmisji sygnałów dla układów MIMO) można traktować jako inwariantne przy zmianach  $A$ . Algorytmy sterowania w [1, 2] pozwalają skalować wyjścia liniowych i nieliniowych obiektów SISO i MIMO. Algorytmy w [3] realizują przybliżone skalowanie czasowe układów ciągłych SISO i MIMO w oparciu o ich dyskretne modele. W [1, 2, 3] rozważano przypadek  $A=const$ . Ograniczoną, co do możliwości stosowania ideę sterowania z użyciem zmiennego współczynnika  $A(t)$  opisano w [4].

Poniżej pokazano, że sterowanie z wykorzystaniem zmiennego  $A(t)$  może być realizowane w oparciu o schemat na rys. 4, będący oryginalną modyfikacją struktury MFC (Model Following Control). W rozdziale 2 pokazano, że model (2), utworzony w oparciu o równania stanu obiektu (1), posiada „idealne” własności jako obiekt sterowania, bo przy pomocy sygnału  $A(t)$  możemy w trybie natychmiastowym zatrzymać zmiany stanu i tym samym wyjścia  $y$  tego modelu, a także w sposób całkowicie przewidywalny przyspieszać i spowalniać przebieg wyjścia  $y$ . Następnie rozważono, czy przebiegi  $Y(t)$  na wyjściu obiektu rzeczywistego (1) mogą być identyczne, jak te na wyjściu modelu (2). Pokazano, że jeśli na wejście obiektu rzeczywistego podać „gładki” sygnał  $U(t)$  otrzymany jako rozwiązanie równania różniczkowego (6) i spełnione są ograniczenia dotyczące różniczkowalności  $A(t)$  i wejścia modelu  $u(t)$ , to wyjścia  $Y$  i  $y$  są identyczne. Rozdział 3 zawiera koncepcję sterowania wyjściem obiektu  $Y$  przy pomocy sygnału  $A(t)$  zależnego od błędu  $e(t)$ .

Przyjęcie zmiennego  $A(t)$  powoduje, że proces opisany funkcją np.  $Y(t)$ , po skalowaniu biegnie niejako w „nowym” czasie  $T$ , czyli reprezentuje go funkcja  $Y(T)$ , gdzie  $dT=A(t)dt$ , skąd  $T=\int_0^t A(t) dt$ .

Rolę sygnału  $A(t)$  podkreśla przyjęta notacja  $Y(T) \equiv Y(A(t))$ , chociaż  $T \neq A(t)$ .

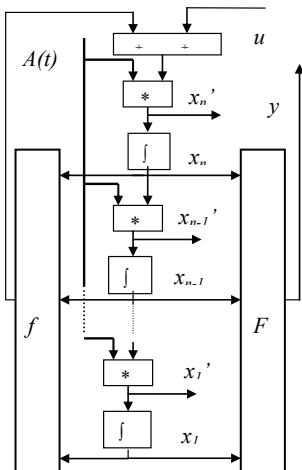
Tematyka artykułu skłania, by odnieść się do faktu, że zaawansowana matematycznie teoria układów definiowanych na skalach czasu jest od 1988 roku intensywnie rozwijana, a wybitne wyniki osiągnięto też w Polsce [5, 6]. Teoria ta powstała przez uogólnienie i unifikację elementów teorii dedykowanych układom z czasem ciągłym i czasem dyskretnym na układy zdefiniowane na skalach czasu, gdzie skalę czasu utożsamia się z arbitralnie wybranymi podzbiorem liczb rzeczywistych, oferując formalnie jednolity aparat matematyczny do badania własności (sterowalność, obserwowalność, równoważność, realizowalność, stabilność, itd.) tak definiowanych układów. Współczynnik  $A$  w niniejszej pracy użyto podobnie, jak to czyniono w analogowej technice obliczeniowej [7]. Definiuje on też skalę czasu w powyższym, ogólnym znaczeniu. Jednak sprowadzając wyniki dla układów definiowanych na skalach czasu na konkretny grunt układów z czasem ciągłym odtworzymy znane wyniki dedykowane tym właśnie układom.

## 2. Skalowanie wyjścia obiektu zmiennym współczynnikiem $A(t)$

Rozważmy obiekt opisany nieliniowymi równaniami stanu i wyjścia:

$$\begin{aligned} \dot{X}_1 &= X_2 \\ &\dots\dots\dots \\ \dot{X}_{n-1} &= X_n \\ \dot{X}_n &= f(X_1, X_2, \dots, X_n) + U \\ Y &= F(X_1, X_2, \dots, X_n) \end{aligned} \quad (1)$$

gdzie  $f(\cdot)$  i  $F(\cdot)$  - statyczne operacje nieliniowe,  $X_1, \dots, X_n$  - składowe wektora stanu  $\mathbf{X}$ ,  $U$  - wejście,  $Y$  - wyjście. Gdy  $f(\cdot)$  i  $F(\cdot)$  są liniowe, obiekt (1) staje się liniowy, a jego własności opisuje transmitancja  $G(s)$  w postaci ilorazu wielomianów zmiennej „ $s$ ”. Obiekty typu (1) modeluje się zwykle przy pomocy struktury opartej o „łańcuch całkowań”. Ilustruje to rys. 1, gdy przyjmując  $A(t) = \text{const.} = 1$  (wtedy  $\mathbf{x} = \mathbf{X}$ , gdzie  $\mathbf{x}$  - wektor stanu układu na rys. 1 o składowych  $x_1, \dots, x_n$ ,  $u = U$ ,  $y = Y$ ).



Rys. 1. Skalowanie wyjścia  $y$  sygnałem  $A(t)$ . Jeśli  $A(t) = 1$ , to  $\mathbf{x} = \mathbf{X}$ ,  $u = U$ ,  $y = Y$ , a rysunek odpowiada równaniu stanu (1)

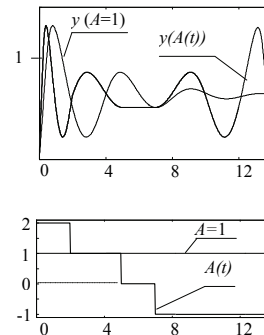
Fig. 1. The scaling of output  $y$  by means of signal  $A(t)$ . If  $A(t) = 1$ , then  $\mathbf{x} = \mathbf{X}$ ,  $u = U$ ,  $y = Y$  and figure corresponds to state equations (1)

Gdy wprowadzić zmienny współczynnik  $A(t)$ , układ na rys. 1 uzyskuje nowe własności, bo sygnałem  $A(t)$  można „modulować” odpowiedź  $y(t)$  uzyskaną w warunkach odniesienia (przy pobudzeniu  $u(t)$ , gdy  $A=1$ ). Jeśli zrelaksowany (zerowe warunki początkowe) układ na rys. 1 zasilić skalowanym sygnałem odniesienia  $u(A(t))$ , to na wyjściu pojawi się sygnał  $y(A(t))$ . Zatem „tempo” generowania kolejnych wartości sygnału odniesienia  $y(t)$  zależy od  $A(t)$ , a ponadto, gdy  $A(t) < 0$ , istnieje możliwość generowania wartości  $y(t)$  „wstecz”. Dla  $A(t) = 0$  następuje rozprzęgnięcia struktury wewnętrznej układu i zatrzymanie zmian sygnałów będących zmiennymi stanu, co oznacza też zatrzymanie zmian wyjścia  $y$ . Należy zauważyć, że zmiana znaku  $A(t)$ , z „+” na „-” lub odwrotnie, zmienia warunki stabilności układu - układ może stać się niestabilny. Rozwiązania niestabilne są niekiedy bardzo wrażliwe (nawet na błędy numeryczne), więc nie w każdym przypadku osiąga się tak spektakularne rezultaty, jak w Przykładzie 1.

### Przykład 1.

Na rys. 2 przedstawiono odpowiedzi układu nieliniowego o strukturze jak na rys. 1, gdzie  $n=3$ ,  $F(\cdot) = -(x_1 + |x_1| + x_2 + x_3)^3$ ,  $f(\cdot) = |x_1 + x_2 + x_3|$ , dla  $u(t) = 2 \cdot 1(t)$ . Odpowiedź odniesienia utrzymano dla  $A=1$ , a efekt skalowania pokazano dla  $A(t) = 2 \cdot 1(t) - 1(t-2) - 1(t-7)$ .

Jak widać, dla  $t < 2$  odpowiedź układu skalowanego  $y$  generowana jest szybciej, niż w układzie odniesienia, dla  $2 < t < 5$  tempo generowania obu odpowiedzi jest identyczne, w przedziale  $5 < t < 7$  zmienne stanu (i wyjście) układu skalowanego nie zmieniają się ( $A(t) = 0$ ), dla  $t > 7$  odpowiedź  $y$  biegnie „wstecz” w tempie generowania odpowiedzi odniesienia.



Rys. 2. Odpowiedzi układu jak na rys. 1 na skok  $u(t) = 2 \cdot 1(t)$  dla  $A(t) = 1$  i dla  $A(t)$  jak na dolnym rysunku

Fig. 2. Responses of the system of Fig. 1 to step  $u(t) = 2 \cdot 1(t)$  for  $A=1$  and  $A(t)$  as shown beneath

Analizując efekty skalowania, choćby te na rys. 2, łatwo stwierdzić, że „obiekt” o strukturze jak na rys. 1 ma „idealne” własności, gdy istnieje potrzeba sterowania jego wyjściem, bo znając odpowiedź odniesienia można je w sposób całkowicie przewidywalny zmieniać przy pomocy sygnału  $A(t)$ . Co więcej, wyjście tego „obiektu” można utrzymać w dowolnym stanie zadanym  $y_o = \text{const.} = y(t)$  ze zbioru wyjść osiągalnych (a te definiuje odpowiedź odniesienia) w prosty sposób: z chwilą osiągnięcia tego stanu należy sprawić, że  $A(t) = 0$ . Powyższe wynika stąd, że wartości wyjścia  $y(t)$  dla kolejnych  $t$  i zmiennego  $A(t)$  można określić z odpowiedzi odniesienia ( $y(t)$  przy  $A(t) = 1$ ) w ten sposób, że odczytamy z niej wartości  $y$  w kolejnych punktach  $t = T = \int_0^t (A(\tau)) d\tau$ .

W stanie  $y(t) = y_o(t)$  jest zatem  $A(t) = 0$ , więc  $T$  przestaje się zmieniać, czyli wartość wyjścia też pozostaje bez zmian. Stopień trudności związany z wyznaczeniem wyjścia układu na rys. 1 jest więc taki, jak dla wyznaczenia wyjścia układu statycznego o znanej charakterystyce wejściowo-wyjściowej i zmieniającym się w czasie wejściu. Ta istotna własność radykalnie upraszcza wszelkie analizy. Z przypadkowymi odchyleniami wyjścia od stanu równowagi (wpływ zakłóceń) „poradzi sobie” regulator statyczny tak zaprojektowany, że przyrosty  $T$  przy błędzie  $e(t) = y_o(t) - y(t) \neq 0$  wymuszają „bieg”  $T$  w kierunku punktu  $t_o$  odpowiedzi odniesienia, gdzie  $y(t_o) = y_o = \text{const.}$  (realizacja takiego regulatora jest prosta). Inaczej mówiąc, gdy tylko  $A(t)$  osiągnie 0, to natychmiast (bezinercyjnie) przestają się zmieniać współrzędne wektora stanu układu na rys. 1 (punkt „kreślący” trajektorię układu w przestrzeni stanu przestaje się poruszać). Ten sam regulator można stosować, gdy  $y_o(t) = \text{var.}$  (praca nadążna), bo dla każdego  $t$  będzie sterował do stanu  $y(t) = y_o(t)$ . Podsumowując: głównym sygnałem, który steruje wyjściem układu na rys. 1 może być sygnał  $A(t)$ , a sygnał  $u$ , definiujący odpowiedź odniesienia, należy wtedy obracać tak, by zapewnić pożądany zbiór wyjść osiągalnych, „proporcje” pomiędzy kolejnymi wartościami chwilowymi sygnału wyjściowego oraz pożądany charakter procesów przejściowych, w zależności od zadanego stanu wyjścia.

Nasuwa się pytanie, czy ta skuteczna taktyka sterowania może być dostosowana do sterowania obiektami rzeczywistymi typu (1). Jest oczywiste, że nie da się manipulować we „wnętrzu” rzeczywistego obiektu, by - na przykład - wprowadzać doń operacje mnożenia, a struktura wewnętrzna obiektu rzeczywistego różni się zazwyczaj od struktury jego wejściowo-wyjściowego modelu matematycznego.

W wielu przypadkach, z równań stanu (2) opisujących układ na rys. 1:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= A(t) x_2 \\ &\dots\dots\dots \\ \dot{x}_{n-1} &= A(t) x_n \\ \dot{x}_n &= A(t)[f(x_1, x_2, \dots, x_n) + u] \\ y &= F(x_1, x_2, \dots, x_n) \end{aligned} \quad (2)$$

można wyznaczyć kolejne pochodne jego wyjścia, aż do  $n$ -tej, co pozwala formować  $n$ -tą pochodną wyjścia przy pomocy sygnałów dostępnych w układzie na rys. 1:

$$\frac{d^n y}{dt^n} = p(y, \frac{dy}{dt}, \dots, \frac{d^{n-1}y}{dt^{n-1}}, x_1, \dots, x_n, \frac{dx_1}{dt}, \dots, \frac{dx_n}{dt}, A, \frac{dA}{dt}, \dots, \frac{d^{n-1}A}{dt^{n-1}}, u, \frac{du}{dt}, \dots, \frac{d^{k-1}u}{dt^{k-1}}) \quad (3)$$

gdzie  $p(\cdot)$  - operacja statyczna,  $k \leq n$ . Jeśli teraz równania obiektu rzeczywistego (1) dadzą się przekształcić do postaci:

$$\frac{d^n Y}{dt^n} + g(Y, \frac{dY}{dt}, \dots, \frac{d^{n-1}Y}{dt^{n-1}}) = h(U, \frac{dU}{dt}, \dots, \frac{d^{k-1}U}{dt^{k-1}}) \quad (4)$$

gdzie  $g(\cdot), h(\cdot)$  - operacje statyczne, to w oparciu o (3) i (4) można następująco zapisać równanie (3):

$$\begin{aligned} \frac{d^n y}{dt^n} + g(y, \frac{dy}{dt}, \dots, \frac{d^{n-1}y}{dt^{n-1}}) &= g(y, \frac{dy}{dt}, \dots, \frac{d^{n-1}y}{dt^{n-1}}) + \\ + p(y, \frac{dy}{dt}, \dots, \frac{d^{n-1}y}{dt^{n-1}}, x_1, \dots, x_n, \frac{dx_1}{dt}, \dots, \frac{dx_n}{dt}, A, \frac{dA}{dt}, \dots, \frac{d^{n-1}A}{dt^{n-1}}, u, \frac{du}{dt}, \dots, \frac{d^{k-1}u}{dt^{k-1}}) & \end{aligned} \quad (5)$$

Porównanie postaci równań (4) i (5) nasuwa odpowiedź na wcześniej postawione pytanie: jeśli - wykorzystując dostępne sygnały, które dają się generować w układzie według rys. 1, opisanym równaniami (2) - rozwiążemy w czasie rzeczywistym równanie różniczkowe:

$$\begin{aligned} h(U, \frac{dU}{dt}, \dots, \frac{d^{k-1}U}{dt^{k-1}}) &= g(y, \frac{dy}{dt}, \dots, \frac{d^{n-1}y}{dt^{n-1}}) + \\ + p(y, \frac{dy}{dt}, \dots, \frac{d^{n-1}y}{dt^{n-1}}, x_1, \dots, x_n, \frac{dx_1}{dt}, \dots, \frac{dx_n}{dt}, A, \frac{dA}{dt}, \dots, \frac{d^{n-1}A}{dt^{n-1}}, u, \frac{du}{dt}, \dots, \frac{d^{k-1}u}{dt^{k-1}}) & \end{aligned} \quad (6)$$

to otrzymane rozwiązanie  $U(t)$ , przetworzone na sygnał fizyczny, można podać na wejście obiektu rzeczywistego, co sprawi, że wyjście obiektu  $Y$  będzie identyczne, jak wyjście  $y$  skalowanego układu (2). By wyznaczyć sterowanie  $U(t)$  trzeba dysponować modelem układu (2) pracującym w czasie rzeczywistym (generowanie prawej strony równania (6)), a sygnały  $A(t)$  i  $u(t)$  powinny być odpowiednio  $(n-1)$  i  $(k-1)$  razy różniczkowalne. Wymagania te nie są zbyt ograniczającymi.

Równania stanu konstruuje się na wiele sposobów, wyrażając  $i$ -tą zmienną stanu jako  $\dot{X}_i = f_i(X_1, X_2, \dots, X_n, U)$ , a w skalowanym modelu  $\dot{x}_i = A(t) f_i(x_1, x_2, \dots, x_n, u)$ . Zatem, dla innych, niż ten na rys. 1 schematów zmiennych stanu skalowanego modelu obiektu, czyli takiego, gdzie sygnały wejściowe integratorów mnoży się przez  $A(t)$ , można powtórzyć podobne rozumowanie otrzymując sygnał  $U$  skalujący wyjście  $Y$  obiektu (1). Dla „nowych” zmiennych stanu otrzymamy też inną postać funkcji  $p$ , co niekiedy może prowadzić do prostszych formuł na  $U$ .

Jeśli  $h$  w (4) nie zależy od pochodnych  $U$ , to (6) jest równaniem algebraicznym.

**Przykład 2.**

Załóżmy, że obiekt rzeczywisty opisuje transmitancja:

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{s+1}{s^3+3s^2+2s+1} \quad (7)$$

Odpowiadają jej równania stanu (1) i (2), gdzie  $n=3$ ,  $F(\cdot)=X_1+X_2$ ,  $f(\cdot)=-X_1+2X_2+3X_3$  i równanie różniczkowe (4), gdzie:

$$g(\cdot) = Y + 2\frac{dY}{dt} + 3\frac{d^2Y}{dt^2}; \quad h(\cdot) = U + \frac{dU}{dt} \quad (8)$$

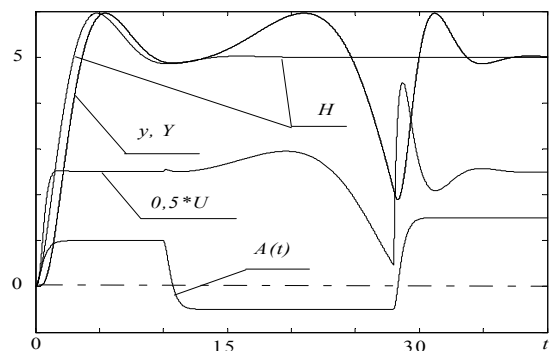
Z (2) lub rys. 1 otrzymujemy:

$$\begin{aligned} y = x_1 + x_2, \quad \frac{dy}{dt} = A(x_2 + x_3), \quad \frac{d^2y}{dt^2} = \frac{dA}{dt}(x_2 + x_3) + A(\frac{dx_2}{dt} + \frac{dx_3}{dt}), \\ \frac{d^3y}{dt^3} = -A^2(\frac{dx_1}{dt} + 2\frac{dx_2}{dt} + 2\frac{dx_3}{dt}) - \frac{du}{dt} - \\ - A\frac{dA}{dt}(x_1 + 2x_2 + 2x_3 - u) + 2\frac{dA}{dt}(\frac{dx_2}{dt} + \frac{dx_3}{dt}) + \frac{d^2A}{dt^2}(x_2 + x_3) = r \end{aligned} \quad (9)$$

Równanie (6) generujące rozwiązanie  $U$ , będące wejściem obiektu (7), ma postać:

$$\frac{dU}{dt} + U = 3\frac{d^2y}{dt^2} + 2\frac{dy}{dt} + y + r \quad (10)$$

gdzie  $r$  - prawa strona wyrażenia na trzecią pochodną w (9). W związku z wyrażeniami (9) zauważmy, że prawą stronę równania (10) - „wymuszenie” - można otrzymać wykonując operacje algebraiczne na sygnałach generowanych w modelu jak na rys. 1, gdzie bezpośrednio dostępne są zmienne stanu i ich pochodne (wejścia integratorów). Na rys. 3 przedstawiono sygnały:  $y$  - wyjście modelu jak na rys. 1,  $U$  - wejście obiektu (rozwiązanie równania (10)),  $Y$  - wyjście obiektu,  $A$  - sygnał skalujący,  $H$  - definiująca zbiór wyjść osiągalnych odpowiedzi odniesienia dla wejścia  $u=5(1-\exp(-10t))$ , będącego dla  $t>0$  różniczkowalną aproksymację skoku  $5*1(t)$ . Widać, że  $y$  i  $Y$  praktycznie pokrywają się.

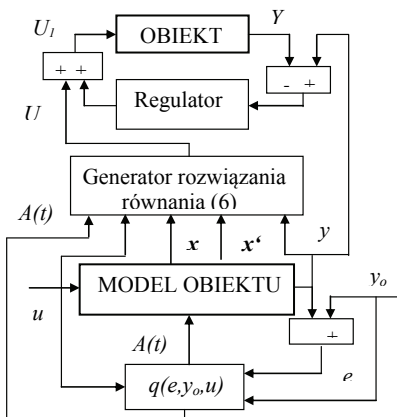


Rys. 3. Skalowanie odpowiedzi układu (7) na sygnał  $u=5(1-\exp(-10t))$ :  $H$  - odpowiedź odniesienia ( $A=1$ ),  $A(t)$ -sygnał skalujący,  $U$ -wejście obiektu (7),  $y$  - wyjście modelu jak na rys. 1,  $Y$  - wyjście obiektu. Sygnały  $y$  i  $Y$  praktycznie pokrywają się  
Fig. 3. The scaling of system (7) response to signal  $u=5(1-\exp(-10t))$ :  $H$  -reference response for  $A=1$ ,  $A(t)$  - scaling signal,  $U$ - input of plant (7),  $y$  - output of plant model shown in Fig.1,  $Y$  - output of plant (7). Signals  $y$  i  $Y$  are almost identical

### 3. Koncepcja sterowania

Jeśli wyjście  $Y$  obiektu (1) dzięki sterowaniu  $U$  jest takie, jak wyjście  $y$  skalowanego modelu obiektu (2), to nie ma przeszkód, by wynik sterowania modelem (2) przenieść na wyjście obiektu rzeczywistego w oparciu o strukturę MFC. Problemu można rozwiązać dwojako. Sposób klasyczny polegałby na wykorzystaniu zewnętrznie generowanej funkcji  $A(t)$  do modulacji przebiegów w pętli sterowania modelem (2) struktury MFC, za pomocą mniej, czy bardziej skomplikowanego regulatora. Skalowaniu tym samym  $A(t)$  musiałyby podlegać: model obiektu, regulator i sygnał odniesienia  $y_o(t)$ . Wejście  $U$  obiektu (1) byłoby formowane w oparciu o wejście i zmienne stanu modelu (2) oraz sygnał  $A(t)$  i jego pochodne, jako rozwiązanie równania (6), a efekty jakościowe byłyby podobne do tych na rys. 3.

Jest też inny, ciekawszy i wydaje się oryginalny sposób: jeśli sprawić, że błąd  $e(t)=y_o(t)-y(t)$  w pętli sterowania modelem struktury MFC będzie proporcjonalny do współczynnika skali czasu (rys. 4), czyli  $\pm A(t)=Ke(t)$ ,  $K$ -stała, to dobierając znak  $A(t)$  zależnie od znaku  $u$  i  $y_o$  tak, by wyjście  $y$  dążyło do wartości zadanej  $y_o$  sprawimy, że proces regulacji zakończy się dla  $A(t)=e(t)=0$ , co oznacza, że wyjście modelu  $y$  i śledzące je wyjście obiektu rzeczywistego  $Y$ , sterowane sygnałem  $U$  zdefiniowanym przez równanie (6), przestanie się zmieniać (efekt rozprężenia układu na rys.1). By modyfikować stany nieustalone można proponować inne operacje, liniowe i nieliniowe, typu  $A(t)=q(e, y_o, u)$ , gdzie  $q(0, y_o, u)=0$ . Na przebieg wyjścia możemy też wpływać poprzez zmiany  $u$ , by, na przykład, ograniczyć, czy rozszerzyć zbiór wyjść osiągalnych. Regulator (rys. 4) pełni rolę pomocniczą kompensując błędy powodowane niedokładną identyfikacją modelu obiektu i ograniczając wpływ zakłóceń przenoszących się na wyjście obiektu. Proces regulacji jest przewidywalny, gdyż kolejne stany wyjścia obiektu odwzorować można jako ruch punktu po odpowiedzi odniesienia, w kierunku i tempie dyktowanym przez sygnał  $A(t)$ , którego wartość w danej chwili określa funkcja  $q$ . Można to uzasadnić podobnie, jak wyżej w rozdziale 2. Dokładność nadążania  $y(t)$  za  $y_o(t)$  zależy od prędkości zmian  $y$ , a ta zależy od przyjętego  $q(\cdot)$ , zatem w zakresie wyjść osiągalnych może być szacowana jak dla serwomechanizmów. Formalnie  $A(t)$  mogłoby być też wynikiem operacji dynamicznej na  $e(t)$ , np. realizowanej za pomocą klasycznego, czy specjalizowanego algorytmu sterowania (układ przetwarzający  $e$  w  $A$  pełni rolę regulatora). Nie wydaje się to celowe, bo tracimy efekt jednoczesnego zerowania  $e(t)$  i  $A(t)$ .

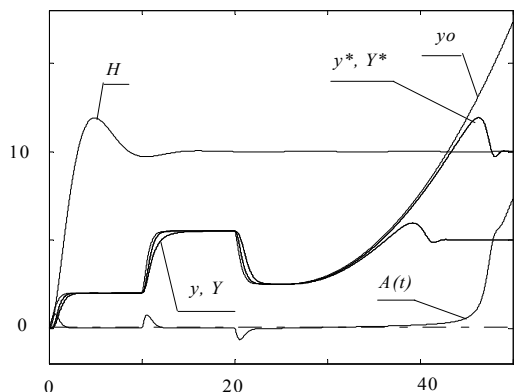


Rys. 4. Sterowanie wyjściem obiektu  $Y$  w oparciu o rezultat skalowania jego modelu  
 Fig. 4. The idea of control: if  $e=0$  then  $A(t)=0$  and  $y=y_o=Y$ . The input  $U$  is formed with signals accessible in model shown in Fig. 1

#### Przykład 3.

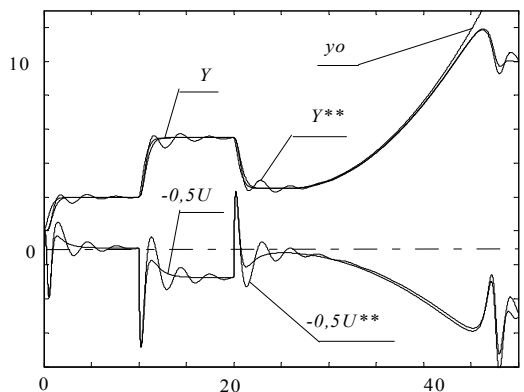
Przyjmując  $A(t)=e(t)$  symulowano układ jak na rys. 4 z obiektem (7). Sygnały  $y_o$  i  $u$  generowano „na zewnątrz” tego układu,

tak, by dostępne były też ich pochodne, niezbędne do generowania  $r(t)$  w (9). Pochodne sygnału  $A(t)=y_o(t)-y(t)$  generowano z pochodnych  $y_o$  i pochodnych  $y$ . Te ostatnie wyznaczono pośrednio z sygnałów w modelu, według formuł (9). Wyniki pokazano na rys. 5. Gdy przyjąć identyczne parametry dla obiektu i modelu, to  $U$  i  $U_l$  oraz  $y$  i  $Y$  (rys. 4) pokrywają się - regulator nie wpływa na  $Y$ . O ile  $y_o(t)$  nie przekroczy zakresu wyjść osiągalnych, błędy nadążania są niewielkie, jeśli tylko błąd  $e$  dla danego  $y_o$  „przetworzony” zostanie na dostatecznie duże  $A(t)$ , zapewniające odpowiednio szybkie zmiany wyjścia. Widać też, że uzyskuje się szybkie nadążanie za  $y_o$  bez przeregulowań (dzięki efektowi rozprężania). Wyniki na rys. 6 potwierdzają korzystną własność struktury na rys. 4, pozwalającą skutecznie sterować, gdy nie dysponujemy dokładnym modelem obiektu (jak w klasycznych strukturach MFC).



Rys. 5. Sterowanie obiektem (7) w układzie jak na rys. 4, gdy  $A(t)=e(t)$ :  $y_o$ -sygnał zadany,  $y$  i  $Y$ - wyjścia modelu i obiektu, gdy  $u(t)=[5(1-\exp(-10t))]$ , czyli dla zakresu wyjść osiągalnych jak w Przykładzie 2,  $H$ - odpowiedź odniesienia ( $A=1$ ), gdy zwiększono zakres wyjść osiągalnych podając  $u(t)=[10(1-\exp(-10t))]$ ,  $y^*$  i  $Y^*$ - wyjście modelu i obiektu dla większego zakresu wyjść osiągalnych

Fig. 5. The control of output of plant (7) according to scheme in Fig.4 for  $A(t)=e(t)$ :  $y_o$ -reference signal,  $y, Y$ - output signals of model and plant for  $u(t)=[5(1-\exp(-10t))]$  and scope of reachable outputs like in Example 2,  $y^*, Y^*$ -output signals of model and plant for enlarged scope of reachable outputs, i.e. for  $u(t)=[10(1-\exp(-10t))]$  and reference response  $H$



Rys. 6. Sterowanie dla dużych różnic między parametrami obiektu i modelu, przy  $u(t)=[10(1-\exp(-10t))]$ :  $U, Y$ -wejście i wyjście obiektu, gdy model jest dokładny,  $U^{**}, Y^{**}$ - wejście i wyjście obiektu, gdy model (2) odpowiada transmitancji (7), zastosowano regulator PI o transmitancji  $(4+s^{-1})$ , a obiekt ma transmitancję  $[(s+1)/(s^3+2s^2+1.5s+1)]^2$

Fig. 6. The control of plant output for big differences between parameters of plant and its model when  $u(t)=[10(1-\exp(-10t))]$ :  $U, Y$ -plant input and output for exact model of plant,  $U^{**}, Y^{**}$ - plant input and output if plant transfer function is  $[(s+1)/(s^3+2s^2+1.5s+1)]^2$  while its inaccurate model is given by (7) and transmittance of PI controller is  $(4+s^{-1})$

#### 4. Wnioski

1. Odpowiedzi obiektów liniowych i nieliniowych można skalować zmiennym współczynnikiem  $A(t)$ , gdy wejście obiektu  $U$  da się formować zgodnie z (6), w oparciu o sygnały generowane z użyciem skalowanego czasowo modelu zmiennych stanu obiektu działającego w czasie rzeczywistym. Pozwala to sterować obiektem w ramach zmodyfikowanej struktury MFC, poprzez uzależnienie skali czasu modelu, a tym samym jego wyjścia  $y$  i wyjścia obiektu  $Y$ , od sygnału błędu  $e$ , przy czym często wystarczy przyjąć  $A(t) = Ke(t)$ . W pożądanym stanie  $e(t) = A(t) = 0$  wyjścia modelu i obiektu nie zmieniają się.
2. Implementacja koncepcji sterowania wymaga, by dla obiektu  $n$ -tego rzędu pośrednio lub bezpośrednio określić  $(n-1)$  pochodnych  $A(t)$ . Niekiedy trzeba tak generować  $y_o$  i  $u$ , by dostępne były ich pochodne. Ewentualna konieczność dostępu do pochodnych  $u$ ,  $y_o$  nie jest istotnym utrudnieniem, bo obliczenia  $U$  dla znanych  $y_o(t)$  wykonywane są w oparciu o modele matematyczne. Jeśli układ według rys.4 miałby nadążać za nieznanym „z góry” sygnałem zadaniem  $y_o(t)$ , wtedy sygnał  $y_o(t)$  można „lekką” uśrednić, przepuszczając go przez „szybki” w stosunku do dynamiki obiektu filtr, a jego pochodne określić w oparciu o zmienne stanu filtra.
3. W procesie regulacji zmiany wyjścia  $Y(A(t))$  są przewidywalne, bo określa je odpowiedź odniesienia  $H=Y(t)$ , jeśli podstawić w niej  $t=T$  (punkt odwzorowujący wyjście porusza się po odpowiedzi odniesienia w tempie i kierunku dyktowanym przez  $A(t)$ ). Pozwala to radykalnie uprościć analizę stabilności układu. Kwestie jakości nadążania  $y$  (i tym samym  $Y$ ) za sygnałami  $y_o(t)$  można względnie prosto rozwiązać poprzez dobór  $u$  i funkcji  $q$  (rys.4). Pozwala to uniknąć przeregulowań, a także minimali-

zować czas regulacji. Da się też w pełni korzystać z zalet struktury MFC.

4. Obliczony z użyciem modelu sygnał wejściowy obiektu  $U$  musi w praktyce spełniać warunki wynikające z ograniczeń fizycznych, zwykle dotyczą one maksymalnych wartości wejścia i jego pochodnych. Operację  $q$  realizuje się wyłącznie „obliczeniowo”, dlatego można ją łatwo modyfikować dostosowując  $U$  do ograniczeń dla konkretnego obiektu.

#### 5. Literatura

- [1] Durnaś M., Grzywacz B.: Application of idea of time-scaling to synthesis of linear and nonlinear control systems. Proc. of 7th Int. Conf. Methods and Models in Automation and Robotics, Międzyzdroje, 2001, Poland, pp. 284-290.
- [2] Grzywacz B.: Koncepcja skalowania czasowego odpowiedzi liniowych i nieliniowych układów MIMO. PAK nr 1/2008, str. 26-29.
- [3] Grzywacz B.: Skalowanie czasowe układów ciągłych z wykorzystaniem ich dyskretnych modeli. PAK, nr 5/2009, str. 301-304.
- [4] Durnaś M., Grzywacz B.: Zastosowanie zmiennej skali czasu w układach regulacji. Elektronika, nr 1/2007, str. 19-23.
- [5] Bartosiewicz Z., Pawłuszewicz E.: Realizations of Nonlinear Control Systems on Time Scales. IEEE Transactions on Automatic Control, 53/2008.
- [6] Bartosiewicz Z.: <http://katmat.pb.bialystok.pl/mat/barz/publ.html>. Wersje elektroniczne publikacji Z. Bartosiewicza i Zespołu.
- [7] Lewin L.: Metody stosowania maszyn analogowych. WNT, Warszawa 1969.

otrzymano / received: 18.05.2010

przyjęto do druku / accepted: 01.10.2010

artykuł recenzowany

## INFORMACJE

### Seminarium Automatyków w Politechnice Białostockiej

W dniu 20. 10 2010 roku odbyło się na Wydziale Elektrycznym Politechniki Białostockiej Seminarium Automatyków, na którym została zaprezentowana sylwetka i dorobek prof. dr. hab. inż. Mikołaja Busłowicza, profesora zwyczajnego Politechniki Białostockiej. Inspiracją do zorganizowania Seminarium, była 60 rocznica urodzin Profesora. Z tej okazji koledzy - automatycy z całego kraju oraz Jego wychowankowie przygotowali szereg artykułów naukowych, które zostały opublikowane w tegorocznym numerze 5 miesięcznika PAK. Tematyka tych artykułów dotyczyła aktualnych problemów automatyki, nad którymi prowadzone są prace, w tym przy udziale i współpracy z Profesorem.

Seminarium prowadził dziekan Wydziału Elektrycznego Politechniki Białostockiej dr hab. inż. Mirosław Świercz, prof. Pol. Białostockiej, a otworzył JM. Rektor Politechniki Białostockiej prof. dr hab. inż. Tadeusz Citko, który scharakteryzował dokonania naukowe, dydaktyczne i organizacyjne Jubilat. Referaty naukowe wprowadzające do dyskusji wygłosili:

- prof. dr hab. inż. Wojciech Mitkowski, który omówił podstawy teoretyczne zastosowań chaosu w wybranych układach liniowych, z uwzględnieniem osiągnięć krakowskiej szkoły równań różniczkowych i zastosowań w medycynie. Przypomniął wkład profesora M. Busłowicza w rozwój teorii stabilizacji układu drabinkowego LC, polegający na wykazaniu, że taki układ można stabilizować/destabilizować za pomocą opóźnień. Wykład był wzbogacony celnymi sformułowaniami najwybitniejszego polskiego matematyka, Hugo Steinhausa.

- prof. dr hab. inż. Tadeusz Kaczorek, który przedstawił problematykę stabilności układów dodatnich z opóźnieniami. Omówił uogólnienie twierdzenia Busłowicza na dodatnie układy ciągłe. Uogólnienie polega na wykazaniu, że jeżeli trajektoria układu o dodatnim sprzężeniu zwrotnym nie wychodzi ze stożka, to układ o nieujemnych współczynnikach macierzy jest stabilny. To uogólnienie daje łatwe narzędzie sprawdzania stabilności układów dodatnich z opóźnieniami.

- dr Andrzej Ruszewski, wychowanek Profesora M. Busłowicza, który omówił problem doboru wartości parametrów regulatora ułamkowego rzędu. Przedstawił metody wyznaczania obszarów stabilności rozpatrywanego regulatora na płaszczyźnie parametrów. Podał także proste zależności analityczne pozwalające wyznaczyć wartości parametrów regulatora, dla których rozpatrywany układ regulacji charakteryzuje się zadanymi wartościami zapasów stabilności modułu i fazy.

W dyskusji wskazano m.in. na możliwości dalszych uogólnień omawianych modeli.

W Seminarium wziął udział redaktor naczelny PAK, prof. dr hab. inż. Tadeusz Skubis, który złożył Jubilatowi serdeczne życzenia i przekazał list gratulacyjny od redakcji miesięcznika PAK. Profesor Busłowicz jest związany z miesięcznikiem PAK przez swoje publikacje, liczne recenzje prac wpływających do redakcji oraz udział w pracach Rady Programowej miesięcznika PAK.