

Monika RUTKOWSKA¹, Jadwiga LAL-JADZIAK¹, Sergiusz SIENKOWSKI²

¹UNIwersytet Mikołaja Kopernika, Instytut Fizyki, ul. Grudziądzka 5/7, 87-100 Toruń

²UNIwersytet Zielonogórski, Instytut Metrologii Elektrycznej, ul. Podgórna 50, 65-246 Zielona Góra

Ocena dokładności estymatorów funkcji korelacji wzajemnej wyznaczonych z zastosowaniem kwantowania deterministycznego i randomizowanego

Mgr inż. Monika RUTKOWSKA

Absolwentka fizyki technicznej na Wydziale Fizyki, Astronomii i Informatyki Stosowanej oraz matematyki na Wydziale Matematyki i Informatyki Uniwersytetu Mikołaja Kopernika w Toruniu. Obecnie doktorantka na Wydziale Fizyki, Astronomii i Informatyki Stosowanej UMK w Zakładzie Fizyki Technicznej i Zastosowań Fizyki.



e-mail: monika.rutkowska@fizyka.umk.pl

Dr hab. inż. Jadwiga LAL-JADZIAK

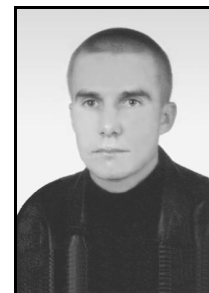
Profesor nadzw. Uniwersytetu Mikołaja Kopernika w Toruniu. Autorka ponad 50 publikacji, w tym 2 monografi, twórcza 3 patentów. Uprawiane aktualnie kierunki badań: technika korelacyjna, miernictwo sygnałów przypadkowych, estymacja charakterystyk sygnału na podstawie jego cyfrowej reprezentacji, randomizowane przetwarzanie a-c.



e-mail: jjadziak@fizyka.umk.pl

Mgr inż. Sergiusz SIENKOWSKI

Absolwent Wydziału Podstawowych Problemów Techniki Politechniki Zielonogórskiej (2001 r.) oraz Wydziału Elektrotechniki, Informatyki i Telekomunikacji Uniwersytetu Zielonogórskiego (2003 r.). Obecnie asystent w Instytucie Metrologii Elektrycznej Uniwersytetu Zielonogórskiego. Zajmuje się zagadnieniami związanymi z cyfrowym przetwarzaniem sygnałów i oceną niepewności pomiarów.



e-mail: s.sienkowski@ime.uz.zgora.pl

Streszczenie

Celem artykułu jest analiza wpływu różnych rodzajów kwantowania na dokładność wyznaczania funkcji korelacji wzajemnej sygnałów. Rozważono dwa sposoby kwantowania: kwantowanie deterministyczne oraz randomizowane. Dokonano porównania wyników otrzymanych w obu przypadkach. Badania symulacyjne przeprowadzono z zastosowaniem programu ImeCorr opracowanego w środowisku LabWindows. Badano dokładność estymatorów funkcji korelacji wzajemnej otrzymanych z użyciem przetwornika 3-, 8- i 12-bitowego dla argumentu równego zero.

Słowa kluczowe: estymator, funkcja korelacji wzajemnej, kwantowanie.

Evaluation of accuracy of cross-correlation function estimators obtained by using deterministic and randomized quantizing

Abstract

The influence of quantization on the cross-correlation function determination of signals is discussed. The relations for cross-correlation function and its digital estimators are given. A method for evaluating the estimator accuracy is presented. Different types of quantization are considered. The formulas describing the quantization ways and related illustrations are presented. In Figures 1, 2 and 3 deterministic, randomized and pseudo-randomized quantization are shown, respectively. To obtain the simulation results, the program ImeCorr prepared in LabWindows was applied. The 3-, 8- and 12-bits quantizers were taken into account. The research results were compared. In Table 1 the values of the relative bias and the relative standard error are shown. It was observed that for 3-bits quantizers the bias had similar values. For the 8- and 12-bits converters the bias is smaller for the randomized and pseudo-randomized quantizing than for the deterministic one. The randomized and pseudo-randomized quantization is a source of the larger standard error than the deterministic quantization. The standard error is smaller for the pseudo-randomized quantization than for the randomized one.

Keywords: estimator, cross-correlation function, quantization.

1. Wstęp

Dynamicznemu rozwojowi techniki pomiarowej towarzyszy opracowywanie nowych sposobów kwantowania sygnałów. Może to być zarówno kwantowanie deterministyczne, jak i randomizowane.

Celem niniejszej pracy jest analiza wpływu różnych sposobów kwantowania na dokładność wyznaczania funkcji korelacyjnych. Przeprowadzono badania symulacyjne umożliwiające analizę obciążenia i wariacji cyfrowych estymatorów tych funkcji. W symulacjach wykorzystano kwantowanie deterministyczne, randomizowane i pseudorandomizowane. Uwzględniono przetworniki o małej liczbie bitów, które m.in. znajdują zastosowanie w radioastronomii.

2. Podstawy teoretyczne

2.1. Funkcje korelacyjne

Funkcje korelacyjne są miarą podobieństwa dwóch sygnałów $x(t)$ i $y(t)$ (funkcja korelacji wzajemnej) lub tego samego sygnału $x(t)$ (funkcja autokorelacji). Funkcja korelacji wzajemnej $R_{xy}(\tau)$ ergodycznego procesu losowego jest wyrażona zależnością:

$$R_{xy}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T x(t)y(t+\tau)dt. \quad (1)$$

W technice pomiarowej używa się estymatorów tych funkcji. W celu otrzymania estymatora cyfrowego sygnał poddawany jest zarówno dyskretyzacji w dziedzinie czasu, jak i w dziedzinie wartości. W przypadku funkcji korelacji wzajemnej, dla sygnałów spróbkowanych i skwantowanych $x_q(i\Delta t)$ oraz $y_q(i\Delta t)$, estymator może przyjmować postać:

$$\tilde{R}_{xy}^q(k, M) = \frac{1}{M} \sum_{i=0}^{M-1} x_q(i\Delta t)y_q(i\Delta t + k\Delta t), \quad (2)$$

gdzie: Δt - okres próbkowania, M - liczba pobranych próbek, $k\Delta t$ - opóźnienie.

Estymatory funkcji korelacyjnych mogą być wyznaczone z zastosowaniem różnych sposobów kwantowania, o których wspomniano we wstępie.

2.2. Ocena dokładności estymatorów

Dokładność estymatora określana jest za pomocą wariancji, opisującej losową składową błędów oraz obciążenia, określającego systematyczną składową błędów [1, 2]:

$$\text{Var}[\tilde{R}_{xy}^q(k, M)] = E[\tilde{R}_{xy}^q(k, M)]^2 - E^2[\tilde{R}_{xy}^q(k, M)], \quad (3)$$

$$b[\tilde{R}_{xy}^q(k, M)] = E[\tilde{R}_{xy}^q(k, M)] - R_{xy}(k). \quad (4)$$

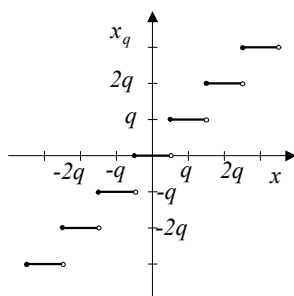
W praktyce stosuje się wartości względne przedstawione w rozdziale 3.2.

2.3. Kwantowanie deterministyczne

Kwantowanie jest operacją, która przetwarza sygnał próbkowany na sygnał o dyskretnych wartościach. Najczęściej przedziały kwantyzacji mają jednakową szerokość q , nazywaną kwantem lub krokiem kwantowania. Liczbę przedziałów kwantyzacji wybiera się z reguły jako naturalną potęgę liczby 2. Jeśli kwantowaniu poddana jest wielkość x , to wynikiem jest wielkość x_q , określona najczęściej wg wzoru:

$$x_q = q \cdot \text{ent}\left(\frac{x}{q} + \frac{1}{2}\right), \quad (5)$$

gdzie: q – elementarny przedział kwantowania, $\text{ent}(x)$ – operator wyznaczający część całkowitą. Podstawowa charakterystyka kwantowania deterministycznego jest pokazana na rysunku 1.



Rys. 1. Charakterystyka kwantowania równomiernego (typu zaokrąglającego)
Fig. 1. Characteristic of uniform quantizing (mid-tread type)

Ten rodzaj kwantowania związany jest z teorią kwantowania Widrowa. Widrow jest autorem twierdzeń dotyczących warunków, przy których ze statystyk wielkości skwantowanych można odtworzyć statystyki wielkości pierwotnych [3].

Zgodnie z teorią kwantowania Widrowa momenty odpowiedniego rzędu mogą być wyznaczone przez różniczkowanie funkcji charakterystycznej. Warunek dostateczny odtwarzalności dla kwantowania dotyczący ograniczonej dziedziny funkcji charakterystycznej nie jest spełniany przez sygnały rzeczywiste, dlatego przy wyznaczaniu momentów pojawiają się dodatkowe składowe [2 - 4].

W literaturze znana jest zależność określająca obciążenie estymatora funkcji korelacji wzajemnej otrzymane dla kwantowania deterministycznego [2, 3]:

$$b[\tilde{R}_{xy}^q(k)] = \frac{q_1}{2\pi} \sum_{i \neq 0}^{\infty} \frac{(-1)^i}{i} \frac{\partial \Phi_{xy}(v_1 - 2\pi i / q_1, v_2)}{\partial v_2} \Big|_{(v_1, v_2) = (0, 0)} + \frac{q_2}{2\pi} \sum_{l \neq 0}^{\infty} \frac{(-1)^l}{l} \frac{\partial \Phi_{xy}(v_1, v_2 - 2\pi l / q_2)}{\partial v_1} \Big|_{(v_1, v_2) = (0, 0)} - \frac{q_1 q_2}{4\pi^2} \sum_{i \neq 0}^{\infty} \sum_{l \neq 0}^{\infty} \frac{(-1)^{i+l}}{il} \Phi_{xy}\left(-\frac{2\pi}{q_1} i, -\frac{2\pi}{q_2} l\right) \quad (6)$$

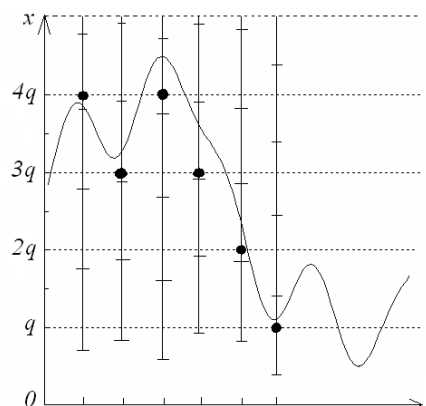
gdzie $\Phi_{xy}(v_1, v_2)$ jest łączną funkcją charakterystyczną sygnałów $x(t)$, $y(t)$, natomiast q_1 , q_2 - przedziałami kwantowania.

2.4. Kwantowanie randomizowane

Ten rodzaj kwantowania jest podobny do kwantowania z użyciem sygnału *ditherowego*. W procesie kwantowania z sygnałem *ditherowym* szum jest dodawany do sygnału wejściowego i poddawany kwantowaniu razem z sygnałem wejściowym, natomiast dla kwantowania randomizowanego zbiór poziomów, z którymi porównujemy sygnał wejściowy, jest poddawany jednocześnie takim samym losowym fluktuacjom. Wartości poziomów odniesienia fluktuują względem nominalnych w zakresie $\langle 0, q \rangle$. Wartość skwantowana jest wyrażona wzorem [5]:

$$x_q = q \cdot \text{ent}\left(\frac{x}{q} + 1 - \zeta_1\right), \quad (7)$$

gdzie ζ_1 jest liczbą losową z rozkładu jednostajnego na przedziale $(0, 1)$. Przykładowy schemat kwantowania randomizowanego jest pokazany na rysunku 2.



Rys. 2. Ilustracja kwantowania randomizowanego
Fig. 2. Illustration of randomized quantizing

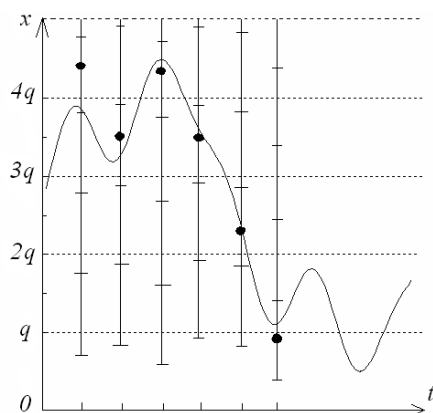
Oprócz kwantowania randomizowanego używa się tak zwanego kwantowania pseudorandomizowanego. W tym przypadku wartość chwilowa sygnału po skwantowaniu jest opisana wzorem [5, 6]:

$$x_q = \left(\zeta_2 - \frac{1}{2}\right)q + n_k q, \quad (8)$$

gdzie wartość ζ_2 jest liczbą pseudolosową z przedziału $(0, 1)$, n_k jest numerem poziomu odniesienia znajdującego się poniżej wartości chwilowej sygnału. Wzór (8) można przedstawić w postaci:

$$x_q = q \cdot \text{ent} \left(\frac{x}{q} + 1 - \zeta_2 \right) + \left(\zeta_2 - \frac{1}{2} \right) q. \quad (9)$$

Na rysunku 3 zilustrowano zasadę kwantowania pseudo-randomizowanego.



Rys. 3. Ilustracja kwantowania pseudorandomizowanego

Fig. 3. Illustration of pseudo-randomized quantizing

Korzystając z takiego sposobu kwantowania można otrzymać estymator funkcji korelacji wzajemnej postaci [5]:

$$\begin{aligned} \tilde{R}_{xy}^q(k, M) = & \frac{q_x q_y}{M} \sum_{i=1}^M \left[\left(\xi_{xi} - \frac{1}{2} \right) \left(\xi_{yik} - \frac{1}{2} \right) + \left(\xi_{xi} - \frac{1}{2} \right) n_{yik} \right] \\ & + \frac{q_x q_y}{M} \sum_{i=1}^M \left[\left(\xi_{yik} - \frac{1}{2} \right) n_{xi} + n_{xi} n_{yik} \right], \end{aligned} \quad (10)$$

gdzie ξ_{xi} oraz ξ_{yik} oznaczają liczby pseudolosowe z przedziału (0,1), natomiast n_{xi} oraz n_{yik} poziomy odniesienia odpowiednio dla sygnału $x(i\Delta t)$ oraz $y(i\Delta t + k\Delta t)$.

3. Badania symulacyjne

3.1. Program komputerowy

Badania symulacyjne przeprowadzono z zastosowaniem programu ImeCORR opracowanego w ramach współpracy Instytutu Fizyki Uniwersytetu Mikołaja Kopernika oraz Instytutu Metrologii Elektrycznej Uniwersytetu Zielonogórskiego. Program opracowano w środowisku LabWindows. Aplikacja umożliwia generowanie wybranych sygnałów, wyznaczenie funkcji korelacyjnych, symulowanie przetwarzania sygnałów w torze pomiarowym z przetwornikiem a/c z uwzględnieniem różnych algorytmów kwantowania oraz wyznaczanie błędów estymacji: obciążenia i wariancji estymatorów dla argumentu równego zero.

3.2. Wyniki badań

W celu zilustrowania prowadzonych rozważań użyto programu ImeCORR. Analizowano błędy wynikające z operacji kwantowania dla wartości $R_{xy}(0)$. Błędy występujące w rzeczywistym torze pomiarowym z przetwornikiem a/c nie były przedmiotem badań. Badania symulacyjne przeprowadzono dla sygnału sinusoidalnego. Do symulacji użyto dwóch identycznych sygnałów $x(t) = y(t)$ o amplitudzie 100 V i częstotliwości 100 Hz. Badania przeprowadzono dla trzech rodzajów kwantowania wykorzystując kolejno przetwornik 3-bitowy, 8-bitowy i 12-bitowy oraz $M=512$ próbek sygnału. Eksperyment powtórzono

100 000 razy i określono: średnią arytmetyczną z wyników jako ocenę $\tilde{R}_{xy}^q(0, M)$ wartości funkcji, ocenę $\tilde{d} = \tilde{b} / R_{xy}(0)$ względnego obciążenia oraz ocenę $\tilde{\rho} = \sqrt{\tilde{Var}} / R_{xy}(0)$ względnego błędu standardowego. Wyniki symulacji przedstawiono w tabeli 1.

Tab. 1. Wyniki symulacji dla różnych rodzajów kwantowania
Tab. 1. Simulation results for different types of quantizing

Rodzaj kwantowania			
	Deterministyczny	Randomizowany	Pseudo-randomizowany
$R_{xy}(0)$	5 000.00000	5 000.00000	5 000.00000
Przetwornik 3-bitowy			
$\tilde{R}_{xy}^q(0, M)$	5175.78125	5000.18551	5000.22955
\tilde{d}	-5.1e-01	-5.5e-01	-5.5e-01
$\tilde{\rho}$	0	8.2e-03	6.4e-03
Przetwornik 8-bitowy			
$\tilde{R}_{xy}^q(0, M)$	5000.00000	5000.00009	4999.99992
\tilde{d}	9.1e-04	-5.0e-07	-5.4e-07
$\tilde{\rho}$	0	2.8e-04	2.0e-04
Przetwornik 12-bitowy			
$\tilde{R}_{xy}^q(0, M)$	5000.09855	5000.00013	4999.99946
\tilde{d}	2.0e-05	2.7e-08	-1.1e-07
$\tilde{\rho}$	0	1.9e-05	1.3e-05

4. Wnioski

W artykule podjęto próbę oceny wpływu trzech sposobów kwantowania na obciążenie i błąd standardowy estymatorów funkcji korelacyjnych. W tym celu przeprowadzono badania symulacyjne.

Badania wykazały, że dla przetworników 3-bitowych dominuje obciążenie, które jest tego samego rzędu dla każdego rodzaju przetwarzania. Dla przetworników 8- i 12-bitowych randomizacja/pseudorandomizacja kwantowania powoduje zmniejszenie obciążenia o 2-3 rzędy wielkości w stosunku do przetwarzania deterministycznego. W każdym przypadku kwantowanie randomizowane oraz pseudorandomizowane powoduje wzrost błędu standardowego w stosunku do kwantowania deterministycznego.

Na podstawie przedstawionych wyników badań można stwierdzić, że błąd standardowy jest mniejszy dla kwantowania pseudo-randomizowanego niż kwantowania randomizowanego. Natomiast kwantowanie randomizowane wydaje się być bardziej efektywne od pseudorandomizowanego pod względem poziomu obciążenia estymatora.

Publikacja powstała w ramach Grantu Rektora UMK nr 507-F.

5. Literatura

- [1] Bendat J. S., Piersol A. G.: Engineering applications of correlation and spectral analysis, Wiley, New York 1993.
- [2] Lal-Jadziak J.: Accuracy in determination of correlation functions by digital methods, Metrology and Measurement Systems, 2001, Vol. 8, No 2, pp. 153-163.
- [3] Widrow B., Kollar I.: Quantization Noise, Cambridge University Press, 2008.
- [4] Domańska A.: Oddziaływanie na wiarygodność w systemach pomiarowych poprzez zastosowanie konwersji a-c z sygnałem ditherowym, Seria Rozprawy, nr 308, Wyd. Politechniki Poznańskiej, Poznań 1995.
- [5] DASP Application Note AN2, Randomized Quantization, September 2001.
- [6] Bilinskis I.: Digital alias free signal processing, Wiley, 2007.