Paweł FOTOWICZ
GŁÓWNY URZĄD MIAR
ul. Elektoralna 2, 00-139 Warszawa

Alternatywne metodyki obliczania niepewności pomiaru

Dr inż. Paweł FOTOWICZ

Do 1999 roku pracował w Instytucie Metrologii i Systemów Pomiarowych PW, a od 1999 roku pracuje w Głównym Urzędzie Miar. Specjalizuje się w zagadnieniach teoretycznych metrologii, związanych z opracowaniem wyniku pomiaru, teorii błędu i niepewności pomiaru oraz terminologii metrologicznej. Prowadzi kursy szkoleniowe dotyczące praktyki obliczania niepewności pomiaru oraz wykłady dotyczącej tej problematyki. Jest autorem ponad stu publikacji w metrologicznych czasopismach krajowych i zagranicznych.

e-mail: uncert@gum.gov.pl

Streszczenie

Przedstawiono dwie alternatywne metodyki obliczania niepewności pomiaru stosowane współcześnie w metrologii. Pierwsza z nich opiera się na zaleceniach Przewodnika i zawartym tam prawie propagacji niepewności. Druga opiera się na prawdopodobieństwie warunkowym wynikającym z zastosowania twierdzenia Bayesa. Obie metodyki prowadzą do różnych wyników, bowiem wykorzystują inne podstawy obliczeniowe. Pierwsza opiera się na splocie rozkładów wielkości wejściowych, a druga na ich iloczynie. Pierwsza chętnie stosowana jest przy ocenie wyników określonego pomiaru, a druga przy opracowaniu wyników porównań.

Słowa kluczowe: niepewność pomiaru, prawdopodobieństwo warunkowe.

Alternative methodologies for calculating the measurement uncertainty

Abstract

The alternative methodologies for calculating the measurement uncertainty used in modern metrology are presented. The first method is based on recommendation of the Guide and the law of uncertainty propagation. The second method is based on conditional probability and application of the Bayes theorem. Those methodologies leads to different results because of using different basis of calculations. The calculation of the first method is connected with convolution of input quantity distributions but the calculation of the second method is connected with multiplication of input quantity distributions. The coverage interval calculated with the GUM method is larger than the coverage interval calculated with the Bayesian method. In the first method the estimate of the measurand is an arithmetic average of observations, but in the second method the estimate is a weighted average, modified by the standard uncertainty attributed to the specified result of observation. The Bayesian method is willingly utilized at inter-laboratory comparisons, but the GUM method is commonly used in evaluation of any other result of measurement.

Keywords: measurement uncertainty, conditional probability.

1. Wprowadzenie

W dziedzinie opracowania wyniku pomiaru współczesną metrologię zdominowała metodyka, którą można nazwać „niepewnościową”. Metodyka ta znalazła wyraz w klasycznym już międzynarodowym dokumencie, wydanym w ostatniej dekadzie ubiegłego wieku, zwanym powszechnie Przewodnikiem [1]. Podejście powyższe polega na zastosowaniu, przy opracowaniu wyniku pomiaru, prawa propagacji niepewności. Równolegle z tą metodyką, przez wielu autorów [2-13], rozwijany jest alternatywny sposób opracowania danych pomiarowych, zwany metodyką „bayesianowską”. Podejście to opiera się na twierdzeniu Thomasa Bayesa o prawdopodobieństwie warunkowym. Polega na opracowaniu wyniku pomiaru na podstawie wcześniejszej wiedzy na jego temat, zanim zostały otrzymane konkretne dane pomiarowe. Dane te służą jedynie do korekty wyniku opracowanego na podstawie informacji pierwotnej dotyczącej określonego pomiaru. Metodyka ta może budzić wśród metrologów pewne kontrowersje, nie mniej warto przyjrzeć się jej bliżej, aby porównać wyniki tego samego pomiaru uzyskane obiema metodami. Jako przykład obliczeniowy wybrano opracowanie wyniku pomiaru średnicy wałka przy użyciu wywzorcowanego mikrometru. Jest to typowy pomiar bezpośredni wykonywany przy użyciu powszechnie dostępnego przyrządu pomiarowego.

W celu rozróżnienia sposobów obliczania niepewności obiema metodykami, przy oznaczeniach odpowiednich parametrów związanych z jej wyrażaniem, zastosowano indeks „a” dla metody niepewnościowej i indeks „b” dla metody bayesianowskiej.

2. Metoda niepewnościowa

W pomiarze bezpośrednim mamy do czynienia z dwoma rodzajami oddziaływań: przypadkowym i systematycznym. Oba traktowane są probabilistycznie. Niepewność pierwszego z nich wyznacza się metodą typu A, na drodze analizy statystycznej serii obserwacji, a niepewność drugiego metodą typu B, na drodze innej niż analiza statystyczna, na podstawie dostępnych źródeł informacji o błędzie systematycznym, np. ze świadectwa wzorcowania. W metodzie niepewnościowej obie informacje traktuje się jako niezależne, a niepewność standardową złożoną wyznacza się z zależności

$$u_{\mathrm{a}} = \sqrt{u_{\mathrm{Aa}}^2 + u_{\mathrm{Ba}}^2} \tag{1}$$

Do oceny niepewności standardowej typu A używa się statystyki nazywanej odchyleniem standardowym eksperymentalnym średniej

$$u_{\mathrm{Aa}} = s(\overline{q}) = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(q_k - \overline{q})^2}{n(n-1)}} \tag{2}$$

gdzie q_k to wartości obserwacji, a n to ich liczba. Niepewność standardową typu B można wyznaczyć na podstawie informacji zawartej w świadectwie wzorcowania na postawie

$$u_{\mathrm{Ba}} = \frac{U}{k} \tag{3}$$

gdzie U to niepewność rozszerzona, a k to współczynnik rozszerzenia, podawane zawsze w świadectwie wzorcowania każdego przyrządu pomiarowego. Wynik pomiaru przedstawiany jest w postaci estymaty wielkości mierzonej, jako wartość średnia serii obserwacji i niepewności rozszerzonej, jako iloczyn współczynnika rozszerzenia i złożonej niepewności standardowej. W metodyce tej zakłada się, ze rozkładem wielkości mierzonej jest w przybliżeniu rozkład normalny, stąd na ogół współczynnik rozszerzenia dla poziomu ufności około 95% przyjmuje się jako $k = 2$. Wynik pomiaru można zapisać zatem

$$y = y_{\mathrm{a}} \pm 2 \cdot u_{\mathrm{a}} = y_{\mathrm{a}} \pm U_{\mathrm{a}} \tag{4}$$

gdzie $y_{\mathrm{a}} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} q_k$.

3. Metoda bayesianowska

Metodyka ta opiera się na twierdzeniu Thomasa Bayesa o prawdopodobieństwie warunkowym. Twierdzenie to mówi o tym, jakie jest prawdopodobieństwo zdarzenia A pod warunkiem zaistnienia innego zdarzenia B

$$p(A|B)=\frac{p(B|A)p(A)}{p(B)}=\frac{p(B|A)p(A)}{\int p(B|A)p(A)\,\mathrm{d}A} \tag{5}$$

Twierdzenia powyższe można zapisać w postaci funkcji gęstości prawdopodobieństwa

$$g(\eta|e)=\frac{g(e|\eta)g(\eta)}{\int g(e|\eta)g(\eta)\,\mathrm{d}\eta} \tag{6}$$

gdzie: $g(\eta)$ – funkcja gęstości prawdopodobieństwa związanego ze zdarzeniem A (danych eksperymentalnych), $g(e|\eta)$ – funkcja gęstości prawdopodobieństwa związanego ze zdarzeniem $B|A$ (po wyeliminowaniu błędu systematycznego pomiaru e).

Metrologicznie użyteczny jest zapis, mówiący o tym jaki jest zbiór możliwych wartości dla wielkości mierzonej pod warunkiem, że znamy błąd systematyczny pomiaru e i tym samym wartość poprawną y_p

$$g(\eta|e)=K\cdot l(\eta;y_p)\cdot g(\eta) \tag{7}$$

gdzie:

$$K=\frac{1}{\int g(e|\eta)g(\eta)\,\mathrm{d}\eta}$$ – wartość stała,

$$l(\eta;y_p)=g(e|\eta)$$ – funkcja wiarygodności.

Funkcja wiarygodności oznacza prawdopodobieństwo, że wartość zaobserwowana wolna jest od błędu systematycznego. Wartością oczekiwaną takiej funkcji jest wartość poprawna wielkości mierzonej, a odchyleniem standardowym niepewność związana z jej wyznaczeniem. Przyjmuje się założenie o rozkładzie normalnym dla funkcji gęstości prawdopodobieństwa [14]

$$g(\eta)=\frac{1}{u_{Ab}\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{(\eta-y_a)^2}{2u_{Ab}^2}\right) \tag{8}$$

$$l(\eta;y_e)=\frac{1}{u_{Bb}\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{(\eta-y_p)^2}{2u_{Bb}^2}\right) \tag{9}$$

Zachodzi proporcjonalność

$$g(\eta|e)\propto\exp\left[-\frac{(\eta-y_a)^2}{2u_{Ab}^2}-\frac{(\eta-y_p)^2}{2u_{Bb}^2}\right] \tag{10}$$

co po przekształceniach prowadzi do

$$g(\eta|e)\propto\exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{u_{Ab}^2}+\frac{1}{u_{Bb}^2}\right)\eta^2-\left(\frac{y_a}{u_{Ab}^2}+\frac{y_p}{u_{Bb}^2}\right)\eta\right]=\exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{u_b^2}\right)\eta^2-\left(\frac{y_b}{u_b^2}\right)\eta\right] \tag{11}$$

stąd

$$\frac{y_b}{u_b^2}=\frac{y_a}{u_{Ab}^2}+\frac{y_p}{u_{Bb}^2} \tag{12}$$

$$\frac{1}{u_b^2}=\frac{1}{u_{Ab}^2}+\frac{1}{u_{Bb}^2} \tag{13}$$

gdzie $y_p = y_a - e$ jest estymatą wielkości pozbawioną błędu systematycznego, u_{Ab} jest niepewnością standardową wyznaczaną metodą typu A, a $u_{Bb} = u_{Ba}$ jest niepewnością standardową wyznaczaną metodą typu B.

Do obliczania niepewności typu A używa się statystyki bayesianowskiej w postaci

$$u_{Ab}=\sqrt{\frac{n-1}{n-3}}s(\overline{q}) \tag{14}$$

Należy pamiętać, że zastosowanie powyższej formuły możliwe jest tylko dla $n > 3$. Wynik pomiaru zapisuje się w postaci estymaty wielkości, wynikającej z przekształcenia (12), danej zależnością

$$y_b=y_a\left(\frac{u_{Bb}^2}{u_{Ab}^2+u_{Bb}^2}\right)+y_p\left(\frac{u_{Ab}^2}{u_{Ab}^2+u_{Bb}^2}\right) \tag{15}$$

oraz wynikowej niepewności standardowej, powstającej z przekształcenia (13)

$$u_b=\sqrt{\frac{u_{Ab}^2u_{Bb}^2}{u_{Ab}^2+u_{Bb}^2}} \tag{16}$$

W metodyce tej zakłada się, ze rozkładem wielkości mierzonej jest rozkład normalny, stąd na ogół współczynnik rozszerzenia dla poziomu ufności około 95% przyjmuje się jako $k = 2$, a wynik pomiaru można zapisać w postaci

$$y=y_b\pm 2\cdot u_b=y_b\pm U_b \tag{17}$$

4. Pomiar średnicy mikrometrem

Wykonano pomiar średnicy wałka wywzorcowanym mikrometrem. Wyniki zapisano w tabeli 1. Podano w niej również wartość średnią serii obserwacji i odchylenie standardowe eksperymentalne tej średniej.

Tab. 1. Wyniki pomiaru średnicy wałka
Tab. 1. Roller diameter measurement results

wyniki pomiaru	14,793 mm 14,791 mm 14,786 mm 14,789 mm 14,791 mm 14,796 mm
wartość średnia	14,791 mm
odchylenie standardowe eksperymentalne średniej	0,0014 mm

Świadectwo wzorcowania mikrometru podaje, że błąd wskazań w całym zakresie pomiarowym wynosił e = 3 µm, wyznaczony z niepewnością rozszerzoną U = 2 µm, przy poziomie ufności około 95% i współczynniku rozszerzenia $k = 2$. Stąd można obliczyć niepewność standardową: u_B = 1 µm.

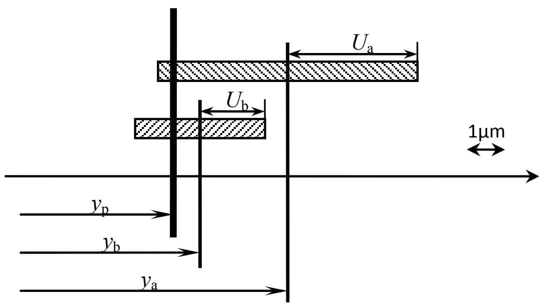
Stosując do opracowania wyniku pomiaru metodykę niepewnościową należy wyznaczyć złożoną niepewność standardową, posługując się zależnością (1), która oddaje wartość u_a = 1,7 μm. Wynik pomiaru obliczony tą metodyką, na podstawie zależności (4), wynosi

$$d = (14{,}7910 \pm 0{,}0034)\ \text{mm} = [14{,}7876;\ 14{,}7944]\ \text{mm}$$

Stosując do opracowania wyniku pomiaru metodykę bayesianowską należy wyznaczyć estymatę wielkości na podstawie zależności (15), która oddaje wartość y_b = 14,7887 mm, oraz wynikową niepewność standardową, posługując się zależnością (16), która oddaje wartość u_b = 0,87 μm. Wynik pomiaru obliczony tą metodyką, na podstawie zależności (17), wynosi

$$d = (14{,}7887 \pm 0{,}0017)\ \text{mm} = [14{,}7870;\ 14{,}7905]\ \text{mm}$$

Przedziały ufności dla wartości wielkości mierzonej wyznaczonej przy użyciu obu metodyk obejmują wartość poprawną wielkości mierzonej, która wynosi y_p = 14,7880 mm. Przy czym metodyka bayesianowska wyznacza dwukrotnie węższy przedział ufności niż metodyka niepewnościowa, znacznie lepiej centrując go wokół wartości poprawnej (rys. 1).



Rys. 1. Graficzne przestawienie wyniku pomiaru
Fig. 1. Graphical presentation of measurement result

5. Podsumowanie

Przedstawione rozważania miały na celu pokazanie alternatywnych metodyk opracowania wyniku pomiaru stosowanych we współczesnej metrologii. Metodyka bayesianowska, choć nie nowa, raczej rzadko jest stosowana przy opracowaniu wyniku prostego pomiaru bezpośredniego. Wymaga większej rozwagi i pewniejszej informacji o błędzie systematycznym przyrządu pomiarowego, gdyż otrzymywany przedział ufności jest na ogół węższy niż dla każdej z funkcji gęstości współtworzących rozkład wynikowy. Wynika to z zastosowania w obliczeniach iloczynu funkcji gęstości prawdopodobieństwa, w odróżnieniu od metodyki niepewnościowej, gdzie te same funkcje podlegają operacji splotu matematycznego, w wyniku którego zawsze otrzymujemy szerszy przedział ufności niż dla każdej funkcji oddzielnie. Pewnym natomiast podobieństwem obu metodyk jest przyjęcie założenia o normalności rozkładów dla funkcji gęstości prawdopodobieństwa. Należy dodać, że jest to praktyczny, najprostszy przypadek stosowania obu metodyk, ponieważ w zaawansowanej analizie naukowej funkcje gęstości mogą mieć przypisane inne rozkłady niż rozkład Gaussa. Wynikowy rozkład normalny w metodyce niepewnościowej stosuje się tylko w sytuacji, gdy do obliczeń odchylenia standardowego wykorzystujemy prawo propagacji niepewności. W metodyce bayesianowskiej można do ceny niepewności, na podstawie wiedzy wcześniejszej o pomiarze, wykorzystać informację o warunkach środowiskowych, w których ma być przeprowadzony pomiar, oraz o innych czynnikach wpływających na wielkość mierzoną. Nie mniej, gdy wiemy, że pomiar wykonany będzie w warunkach podobnych do warunków wzorcowania, to informacja ta zawarta jest w niepewności podanej w świadectwie wzorcowania. Dane doświadczalne w niewielki sposób tylko modyfikują niepewność wynikową. Estymata wielkości jest zawsze bliższa wartości poprawnej, im większy jest rozrzut danych eksperymentalnych. Można to zinterpretować w ten sposób, iż większy rozrzut danych pomiarowych to mniejsza ich wiarygodność, a zatem mają mniejszy wpływ na wartość estymaty. Metodyka niepewnościowa jest czuła na ten rozrzut, a wartość poprawna wielkości mierzonej nie ma wpływu na wartość estymaty, którą zawsze jest wartość średnia serii obserwacji, z których każda obciążona jest oddziaływaniem systematycznym. Metodyka niepewnościowa jest chętniej stosowana do opracowania wyniku pomiaru, ze względu na szeroki przedział ufności budowany wokół wartości średniej. Daje większe poczucie bezpieczeństwa, że wynik obejmie wartość prawdziwą wielkości mierzonej. Rozwiązania płynące z zastosowania metodyki bayesianowskiej natomiast chętniej wykorzystywane są przy opracowaniu wyników porównań międzylaboratoryjnych.

6. Literatura

[1] Guide to the Expression of Uncertainty in Measurement. ISO 1995.

[2] Weise K., Woger W.: A Bayesian theory of measurement uncertainty. Measurement Science and Technology, vol. 4 (1993), s. 1-11.

[3] Lira I., Kyriazis G.: Bayesian inference from measurement information. Metrologia, vol. 36 (1999), s. 163-169.

[4] Lira I., Wöger W.: Bayesian evaluation of the standard uncertainty and coverage probability in a simple measurement model. Measurement Science and Technology, vol. 12 (2001), s. 1172-1179.

[5] Kacker R., Jones A.: On use of Bayesian statistics to make the Guide to the Expression of Uncertainty in Measurement consistent. Metrologia, vol. 40 (2003), s. 235-248.

[6] Kacker R.: Bayesian alternative to the ISO-GUM's use of the Welch–Satterthwaite formula. Metrologia, vol. 43 (2006), s. 1-11.

[7] Lira I.: Bayesian evaluation of comparison data. Metrologia, vol. 43 (2006), s. S231-S234.

[8] Lira I., Wöger W.: Comparison between the conventional and Bayesian approaches to evaluate measurement data. Metrologia, vol. 43 (2006), s. S249-S259.

[9] Emery A., Valenti E., Bardot D.: Using Bayesian inference for parameter estimation when the system response and experimental conditions are measured with error and some variables are considered as nuisance variables. Measurement Science and Technology, vol. 18 (2007), s. 19-29.

[10] Kyriazis G.: Comparison of GUM Supplement 1 and Bayesian analysis using a simple linear calibration model. Metrologia, vol. 45 (2008), s. L9-L11.

[11] Elster C., Toman B.: Bayesian uncertainty analysis under prior ignorance of the measurand versus analysis using the Supplement 1 to the Guide: a comparison. Metrologia, vol. 46 (2009), s. 261-266.

[12] Calonico D., Levi F., Lorini L., Mana G.: Bayesian inference of a negative quantity from positive measurement results. Metrologia, vol. 46 (2009), s. 267-271.

[13] Lira I., Grientschnig D.: Bayesian assessment of uncertainty in metrology: a tutorial. Metrologia, vol. 47 (2010), s. R1-R14.

[14] Lira I.: Evaluating the Measurement Uncertainty. Institute of Physics Publishing 2002.

otrzymano / received: 25.08.2010
przyjęto do druku / accepted: 01.10.2010 *artykuł recenzowany*