

Mykhaylo DOROZHOVETS

POLITECHNIKA RZESZOWSKA, KATEDRA METROLOGII I SYSTEMÓW DIAGNOSTYCZNYCH, ul. W. Pola 2, 35 – 959 RZESZÓW
POLITECHNIKA LWOWSKA, KATEDRA TECHNOLOGII INFORMACYJNO-POMIAROWYCH, ul. St. Bander 12, 79-013 Lviv, Ukraina

Badania metody opracowania losowych obserwacji na podstawie równoległego ich porównania z zestawem obserwacji referencyjnych

Prof. dr hab. inż. Mykhaylo DOROZHOVETS

Jest absolwentem (1975) Katedry Techniki Informatyki-Pomiarowej Politechniki Lwowskiej, w 2001 r. obronił pracę habilitacyjną. Obecnie jest zatrudniony na stanowisku profesora zwyczajnego w Katedrze Metrologii i Systemów Diagnostycznych Politechniki Rzeszowskiej. W pracy naukowo-badawczej zajmuje się analizą i oceną niepewności wyników pomiarów, zagadnieniami pomiarów tomograficznych oraz problemami przetwarzania sygnałów pomiarowych. Opublikował ponad 240 prac naukowych z nich 6 podręczników.



e-mail: michdor@prz.edu.pl

Streszczenie

W artykule zbadano metodę statystycznego opracowania losowych nieskorelowanych obserwacji o nieznanym a priori rozkładzie prawdopodobieństwa (RP). Metoda polega na równoległym porównaniu uporządkowanych obserwacji z zestawem obserwacji referencyjnych, którymi są wartości przeciętne losowych statystyk pozycyjnych odpowiadających wybranym RP. Przedstawione są wyniki badań metodą Monte-Carlo skuteczności zaproponowanych algorytmów obliczania wyniku pomiaru. Metoda zapewnia mniejszą standardową niepewność wyniku pomiaru w porównaniu z niepewnością wartości średniej.

Słowa kluczowe: opracowanie, obserwacje, obserwacja referencyjne, statystyki pozycyjne.

Investigations of the method for processing the random observations based on their parallel comparison with a set of the reference observations

Abstract

In the paper the method for statistical processing of random uncorrelated observations of unknown a priori probability density distribution (PDD) of the population is investigated. The method is based on parallel comparison by the weighted least squares method ((1), Fig. 2) of the sorted input observations with the collection of the so-called reference observations (Fig. 1) which are the expected values of order statistics, that correspond to the specified PDD. The results of comparison are the estimators of the location μ (measurement result) and width σ parameters (1) of the input observations. The analysis of the residual sums of squares (RSS) (5, Fig. 3) deviations of the input from the all set reference observations is used for determining the best measurement result. The measurement result according to algorithm A1 is based on determination of the minimum value of all RSS (6, Fig. 3), (7) and according to the algorithm A2 the result is calculated as the weighted mean from all results (8), (9). In this case the weight coefficients are proportional to the inverse values of appropriate RSS. The efficiency of both algorithms is investigated by the Monte-Carlo method. It has been stated that algorithm A1 provides the best (after standard deviation) measurement result if the input observations are obtained from population whose PDD is also used for forming the reference observations (Figs. 4, 5). If the input observations are obtained from population whose PDD is not used for forming the reference observations, then algorithm A2 provides the best results. And both algorithms ensure better measurement results in comparison with the average value (Figs. 4, 5).

Keywords: processing, observations, reference, order statistics, reference samples, measurement result.

1. Wstęp

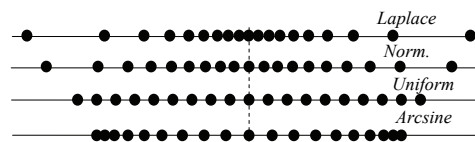
Najlepsze (pod względem minimalnej wartości standardowej niepewności typu A) estymatory wyników pomiaru, obliczonych

na podstawie opracowania serii nieskorelowanych obserwacji x_1, x_2, \dots, x_n (n jest liczebnością zarejestrowanych obserwacji), w dużym stopniu zależne są od rozkładu prawdopodobieństwa populacji $p(x)$. Na przykład, w razie normalnego RPP najlepszym estymatorem jest wartość średnia, dla RPP w postaci rozkładu Laplace'a lepszym estymatorem jest mediana, a w razie jednostajnego RPP - środek rozstępu próby.

Metoda opracowania nieskorelowanych obserwacji, w której bezpośrednio wykorzystuje się informacje o rozkładzie $p(x)$, jest przedstawiona w [1, 2, 3, 4]. Metoda bazuje na wartościach przeciętnych $E(s_{n,k})$ statystyk pozycyjnych $s_{k,n}$ ($k=1,2,\dots,n$), które są zależne tylko od rozkładu $p(x)$ [5]. Zestaw wartości przeciętnych statystyk pozycyjnych dla kilku wybranych rozkładów $p(x)$ przy $n=19$ przedstawiony jest na rys. 1.

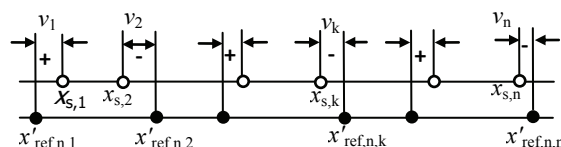
Wartości przeciętne statystyk pozycyjnych można nazwać wartościami referencyjnymi $E(s_{n,k}) = x'_{ref,n,k}$, ponieważ one w idealny sposób odpowiadają rozkładowi $p(x)$.

Zasada wyznaczania najlepszych estymatorów położenia μ i szerokości σ próby badanej (niekoniecznie są to wartość przeciętna i standardowe odchylenie) w tej metodzie polega na wstępnym uporządkowaniu obserwacji $x_{s,1}, x_{s,2}, \dots, x_{s,n}$ i następnym minimalizacji sumy kwadratów odchyłek $v_k = \mu + E[s_{n,k}] \cdot \sigma - x_{s,k} = x'_{ref,n,k} - x_{s,k}$ (rys. 2) (gdzie $x'_{ref,n,k} = \mu + x_{ref,n,k} \cdot \sigma$).



Ys. 1. Przykładowe zestawy wartości przeciętnych statystyk pozycyjnych - obserwacji referencyjnych ($n=19$)

Fig. 1. Exemplary sets of the expected values of order statistics - reference observations ($n=19$)



Ys. 2. Zasada wyznaczania parametrów μ i σ w metodzie bazowanej na statystykach pozycyjnych

Fig. 2. Principle of determination of parameters: location μ and width σ using the order statistics method

Ponieważ statystyki pozycyjne są skorelowane ze sobą (uporządkowane nieskorelowane obserwacje stają się skorelowanymi), dlatego podczas wyznaczania parametrów μ i σ wykorzystuje się metodę ważonych najmniejszych kwadratów, która w zapisie macierzowym ma postać [3, 4]:

$$(\hat{\mu}, \hat{\sigma})^T = (\mathbf{A}^T \cdot \mathbf{W} \cdot \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T \cdot \mathbf{W} \cdot \mathbf{X}_s = \mathbf{REC} \cdot \mathbf{X}_s, \quad (1)$$

gdzie: \mathbf{X}_s - jest wektorem uporządkowanych obserwacji;
 $\mathbf{A}^T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ x_{ref,n,1} & x_{ref,n,2} & \dots & x_{ref,n,n} \end{pmatrix}$; $\mathbf{W} = [\text{Cov}]^{-1}$ - jest macierzą wagową, będącą odwrotnością macierzy kowariancji Cov statystyk pozycyjnych [3, 4]; $\text{REC} = (\mathbf{A}^T \cdot \mathbf{W} \cdot \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T \cdot \mathbf{W}$ - jest tak zwaną macierzą rekonstrukcyjną.

W [3] udowodniono, że w tej metodzie dla wariancji $\text{var}(\hat{\mu})$ i wariancji średniej $\text{var}(\bar{x})$ zachodzi nierówność

$$\text{var}(\hat{\mu}) \leq \frac{\sigma^2}{n} = \text{var}(\bar{x}), \quad (2)$$

przy czym równość zachodzi jeśli $\hat{\mu} = \bar{x}$, co ma miejsce przy rozkładzie normalnym. Z (2) wynika, że jeśli $p(x)$ odbiega od rozkładu normalnego, metoda bazująca na statystykach pozycyjnych zapewnia mniejszą wariancję $\text{var}(\hat{\mu})$ w porównaniu z wariancją wartości średniej.

W wielu przypadkach RPP a priori nie jest znany, często jest rezultatem splotu kilku prostszych modeli a nawet może być niestabilny i dla ustalania RPP niezbędne są badania szeregow obserwacji o dużej liczbie obserwacji z zastosowaniem różnych testów zgodności. Jeśli liczba obserwacji w zarejestrowanej próbie jest zbyt mała (do kilku dziesięciu), wtedy może być wykorzystana ogólna zasada metrologii: największą dokładność wyniku pomiaru uzyskuje się w metodzie bezpośredniego porównania wielkości mierzonej ze wzorcem. Otóż, jeśli istnieją tak zwane obserwacje „referencyjne”, które w idealny sposób odpowiadają pewnym rozkładom prawdopodobieństwa $p_1(x)$, $p_2(x)$, ..., $p_j(x)$, ..., wtedy można zastosować metodę bezpośredniego porównania obserwacji próby empirycznej z „obserwacjami” prób „referencyjnych” [6-9].

Dla zadanego rozkładu prawdopodobieństwa $p_j(x)$ macierz REC_j w (1) jest macierzą 2 wierszową:

$$\text{REC}_j = \begin{pmatrix} g_{1,j} & g_{2,j} & \dots & g_{[(n+1)/2],j} & \dots & g_{2,j} & g_{1,j} \\ -\gamma_{1,j} & -\gamma_{2,j} & \dots & 0 & \dots & \gamma_{2,j} & \gamma_{1,j} \end{pmatrix}. \quad (3)$$

Dla symetrycznych rozkładów prawdopodobieństwa elementy $g_{k,j}$ pierwszego wiersza w (3) charakteryzują się symetrią parzystą, natomiast elementy drugiego wiersza $\gamma_{k,j}$ charakteryzują się symetrią nieparzystą. Wartości tych współczynników są zależne tylko od modelu $p_j(x)$ i dlatego można je obliczyć wcześniej przed opracowaniem wyników. Stąd w rzeczywistości poszukiwane parametry $\hat{\mu}_j$ i $\hat{\sigma}_j$ są obliczane w bardzo prosty sposób: jako wartości średnie ważone uporządkowanych obserwacji:

$$\hat{\mu}_j = \sum_{k=1}^n g_{k,j} x_{s,k}, \quad \hat{\sigma}_j = \sum_{k=1}^n \gamma_{k,j} x_{s,k}. \quad (4)$$

Według zależności (3) każdej gęstości prawdopodobieństwa $p_1(x)$, $p_2(x)$, ..., $p_j(x)$, ... odpowiadają różne wartości współczynników $g_{k,j}$ oraz $\gamma_{k,j}$, dlatego dla tych samych zarejestrowanych obserwacji (wektora \mathbf{X}_s) po obliczeniu według zależności (4) otrzymujemy różne wartości poszukiwanych parametrów $\hat{\mu}_j$ i $\hat{\sigma}_j$.

Przy czym każdy para $(\hat{\mu}_j, \hat{\sigma}_j)$ w najlepszy sposób (według kryterium najmniejszej sumy ważonych kwadratów) odpowiadają wybranemu rozkładowi prawdopodobieństwa $p_j(x)$. W takim razie powstaje zagadnienie wyboru „najlepszych” wartości parametrów $\hat{\mu}$ i $\hat{\sigma}$ spośród zestawu obliczonych wartości $\hat{\mu}_1, \hat{\mu}_2, \dots, \hat{\mu}_j, \dots$ oraz $\hat{\sigma}_1, \hat{\sigma}_2, \dots, \hat{\sigma}_j, \dots$

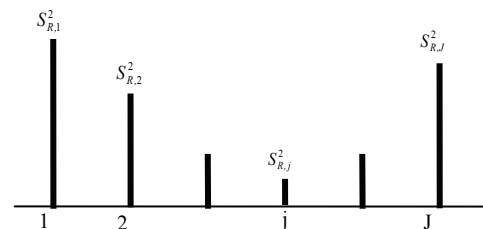
2. Algorytmy obliczania wyniku pomiaru na podstawie analizy wartości sum kwadratów odchyłeń resztkowych

Dostępna informacja do wyznaczania najlepszych wartości $\hat{\mu}$ i $\hat{\sigma}$ mieści się w wartościach sum kwadratów odchyłeń resztkowych (SKR). Te wartości obliczane są na podstawie wyznaczonych „najlepszych” wartości parametrów $\hat{\mu}_j$ i $\hat{\sigma}_j$ badanych obserwacji w wyniku ich porównania z obserwacjami odpowiednich prób referencyjnych. Nieobciążone estymatory SKR obliczane są według standardowej procedury:

$$S_{R,j}^2 = \frac{(\mathbf{X}_s - \mathbf{A}_j(\hat{\mu}_j, \hat{\sigma}_j))^T \cdot \mathbf{W}_j \cdot (\mathbf{X}_s - \mathbf{A}_j(\hat{\mu}_j, \hat{\sigma}_j))^T}{n-2} = \mathbf{X}_s^T \mathbf{Q}_j \mathbf{X}_s, \quad (5)$$

gdzie $(\mathbf{W}_j \cdot (\mathbf{I} - \mathbf{A}_j \text{REC}_j)) / (n-2) = \mathbf{Q}_j$ - jest macierzą wagową (zależy tylko od $p_j(x)$); \mathbf{I} - jest macierzą jednostkową o wymiarze $n \times n$.

Ze wzoru (5) widać, że przy tych samych obserwacjach wejściowych (wektor \mathbf{X}_s) dla każdej innej próby referencyjnej (modelu $p_j(x)$) wartości $S_{R,j}^2$ będą różne. Spowodowane jest to dwoma podstawowymi przyczynami. Pierwsza przyczyna jest związana z występowaniem losowych odchyłeń uporządkowanych obserwacji wokół ich wartości przeciętnej (referencyjnych) (składowa $S_{j,los}^2$). Jeżeli w zestawie wykorzystywanych prób referencyjnych brakuje próby referencyjnej w pełnej mierze adekwatnej do rzeczywistego RPP obserwacji, wtedy powstają odchylenia systematyczne uporządkowanych obserwacji od wartości referencyjnych (składowa $S_{j,syst}^2$).



Rys. 3. Resztkowe sumy kwadratów odchyłeń obserwacji wejściowych od referencyjnych

Fig. 3. Residual sums of squares deviations between the input and reference observations

W praktyce na podstawie jednej zarejestrowanej realizacji obserwacji nie ma możliwości w uzasadniony sposób rozróżnić te składowe, dlatego może być obliczona tylko ich wartość sumaryczna: $S_{R,j}^2 = S_{j,los}^2 + S_{j,syst}^2$. Wynika stąd, że nie istnieje jednoznaczny sposób wyznaczania najlepszego wyniku pomiaru na podstawie analizy wartości $S_{R,j}^2$. Wykorzystanie dodatkowej informacji a priori pozwala na wybór odpowiedniego algorytmu wyznaczania wyniku.

Jeżeli wśród referencyjnych prób jest próba, która odpowiada rozkładowi populacji $p_j(x)$, z której zostały pobrane obserwacje badane, wtedy w jednej $S_{R,j}^2$ z zestawu sum kwadratów odchyłeń resztkowych składową systematyczną $S_{j,syst}^2$ można pominąć. Stąd wartości $\hat{\mu}$ i $\hat{\sigma}$ wyznaczane są jako:

$$\hat{\mu} = \hat{\mu}_j, \quad \hat{\sigma} = \hat{\sigma}_j, \quad (6)$$

gdzie

$$j = \text{numer} \left\{ \underset{1 \leq j \leq J}{\text{MIN}} \left(S_{R,1}^2, \dots, S_{R,j}^2, \dots, S_{R,J}^2 \right) \right\}. \quad (7)$$

Jeżeli rzeczywisty rozkład prawdopodobieństwa $p(x)$ obserwacji odbiega od założonych modeli $p_1(x), p_2(x), \dots, p_i(x), \dots$, wtedy składowej $S_{j,\text{sys}}^2$ nie można pominąć w żadnej $S_{R,j}^2$. Jeden z możliwych sposobów obliczania $\hat{\mu}$ i $\hat{\sigma}$ polega na uwzględnieniu stopni dopasowania próby badanej do wszystkich prób referencyjnych. Wtedy wartości wyniku pomiaru można wyznaczyć w postaci sumy ważonych estymatorów $\hat{\mu}_j$ i $\hat{\sigma}_j$:

$$\hat{\mu} = \sum_{j=1}^J \zeta_j \hat{\mu}_j; \quad \hat{\sigma} = \sum_{j=1}^J \zeta_j \hat{\sigma}_j, \quad (8)$$

gdzie wartości współczynników wagowych ζ_j są odwrotnie proporcjonalne do wartości S_j^2

$$\zeta_j = \frac{\xi_j}{\sum_{j=1}^J \xi_j} = \frac{1}{S_{R,j}^2} \bigg/ \sum_{j=1}^J \left(\frac{1}{S_{R,j}^2} \right). \quad (9)$$

Algorytm obliczania wyniku pomiaru opisywany wzorami (6) i (7) nazwano algorytmem A1, a algorytm opisywany wzorami (8) i (9) algorytmem A2.

3. Wyniki badań symulacyjnych

Ponieważ rozkład statystyk pozycyjnych tylko asymptotycznie jest normalnym (przy $n \rightarrow \infty$), a przy stosunkowo małej liczebności próby istotnie odbiega od normalnego i w dużym stopniu zależy tak od numeru statystyki pozycyjnej, jak i od samego rozkładu $p(x)$, to prosta i przejrzysta analiza teoretyczna rozkładów $\hat{\mu}$ i $\hat{\sigma}$ w ogólnym przypadku praktycznie nie jest możliwa. Dlatego na pierwszym etapie badania skuteczności obydwu algorytmów (A1 i A2) zostało przeprowadzone metodą Monte-Carlo. Do obliczania prób referencyjnych oraz związanych z nimi macierzy **REC** (3) i **Q** (5) wykorzystano 9 modeli RPP. 7 modeli bazują na uogólnionym wykładniczym modelu rzędu k [10]:

$$p(x, k) = \frac{k}{2\Gamma(1/k) \cdot \eta} \exp \left(- \left| \frac{x - \mu}{\eta} \right|^k \right) \quad (10)$$

gdzie $\eta = \sqrt{\Gamma(1/k)/\Gamma(3/k)} \cdot \sigma$, $\Gamma(\cdot)$ - jest funkcją gamma.

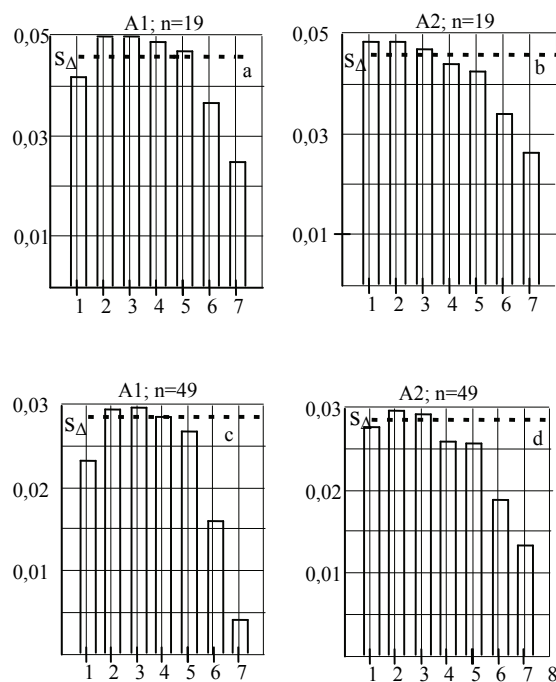
Parametrem kształtu rozkładów prawdopodobieństwa jest kontrkurtoza $\kappa = \sigma^2 / \sqrt{\mu_4}$ [8], która dla rozkładu (10) równa się:

$\kappa = \Gamma(3/k) / \sqrt{\Gamma(1/k) \cdot \Gamma(5/k)}$. Badania przeprowadzone przy 7 wartościach $k=0,5$ ($\kappa=0,199$); $k=1$ ($\kappa=0,408$); $k=1,5$ ($\kappa=0,516$); $k=2$ ($\kappa=0,577$); $k=4$ ($\kappa=0,676$); $k=10$ ($\kappa=0,729$), $k=\infty$ ($\kappa=0,745$). Korzyść modelu rozkładu (10) polega na tym, że przy zmianie parametru (rzędu) k transformuje się on w dobrze znane rozkłady: przy $k=1$ jest to rozkład Laplace'a, przy $k=2$ jest to rozkład normalny, a przy $k \rightarrow \infty$ rozkład dąży do jednostajnego. Innymi dwoma modelami RPP były arcsinusoidalny ($\kappa=0,816$) oraz rozkład okresowego impulsowego przebiegu ze zboczeniami o wykładniczym kształcie ($\kappa=0,853$).

Obserwacje (próby badane) wygenerowano z populacji o 7 rozkładach: Laplace'a, normalnym, trójkątnym, jednostajnym i arcsinusoidalnym oraz jako suma niezależnych obserwacji pobranych z 2-ch populacji z rozkładami normalnym i jednostajnym oraz

dwóch jednostajnych przy stosunku ich szerokości 1:2. Liczba obserwacji wynosiła: $n = 9, 14, 19, 29, 39, 49$. Przyjmowano różne wartości parametrów μ i σ , jednak przedstawione niżej wyniki badań dotyczą wartości $\mu_0=5,000$ oraz $\sigma=0,200$. Liczba symulacji w metodzie Monte Carlo wynosiła $M=10^5$.

Jakość obliczonych według obydwu algorytmów wyników pomiaru $\hat{x}_{i,l}^{(n)} = \hat{\mu}_{i,l}^{(n)}$ zbadano na podstawie wyznaczonych wartości błędów: $\Delta_{i,l}^{(n)} = \hat{x}_{i,l}^{(n)} - \mu_0$. W rezultacie analizy statystycznej błędów wyznaczono ich podstawowe charakterystyki: wartości średnie $\bar{\Delta}$ i standardowe odchylenia s_{Δ} . Liczbowe zależności wyznaczonych standardowych odchyżeń s_{Δ} błędów, obliczonych według algorytmów A1 i A2 dla liczebności obserwacji $n=19$ i $n=49$, są przedstawione na rys. 4. W celu porównania linią kreskowaną są przedstawione wartości teoretyczne standardowego odchylenia $s_{\bar{x}} = \sigma / \sqrt{n}$ wartości średniej (rys. 4).



Rys. 4. Standardowe odchylenia wyników pomiaru; w poziomie – numery modeli $p(x)$: 1-Laplace'a, 2-normalny, 3-splot normalnego i jednostajnego, 4-trójkątny, 5-splot 2-ch różnych jednostajnych, 6-jednostajny i 7-arcsinusoidalny; linia kreskowana – dla $S_{\bar{x}}$

Fig. 4. Standard deviations of the measurement results; in horizontal - number of model of $p(x)$: 1-Laplace, 2-normal, 3-convol. of normal and uniform, 4-triangle, 5-convol. of 2 different uniform, 6-uniform and 7-arcsine; dash line – for $S_{\bar{x}}$

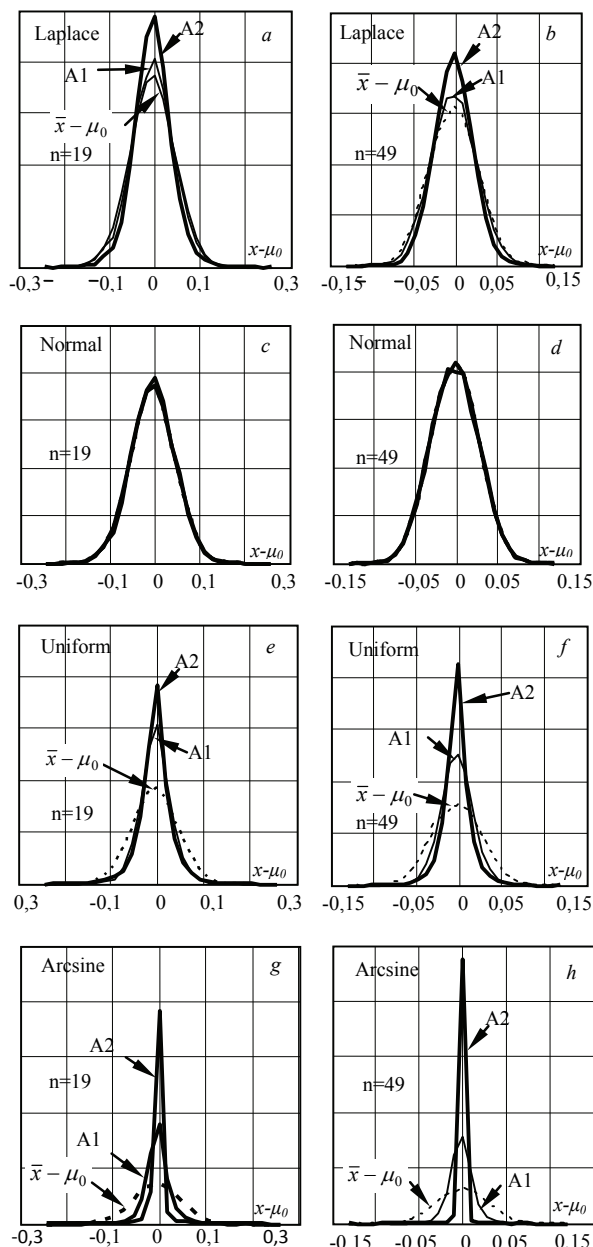
Zbudowano także histogramy tych błędów (rys. 5) wraz z histogramami błędów wyników, obliczonych na podstawie wartości średnich (linia kreskowana).

Na podstawie analizy zależności standardowych odchyżeń wyników ustalono, że skuteczność metody jest zauważalną już przy liczbie obserwacji około $n > 10 \dots 15$ i zwiększa się ze zwiększeniem liczby obserwacji.

Obydwa algorytmy zapewniają mniejsze standardowe odchylenie wyniku pomiaru (μ) w porównaniu ze standardowym odchyleniem wartości średniej przy opracowaniu obserwacji pobranych z populacji z rozkładami różniącymi się od normalnego (rys. 4).

Jeśli obserwacje zostały pobrane z RPP, dla której istnieje macierz rekonstrukcyjna (3), wtedy algorytm A1 zapewnia mniejszą wariancję (niepewność) wyniku pomiaru w porównaniu z wariancją wyniku według algorytmu A2. Stosuje się to rozkładów „skrajnych” (według wartości kontrkurtozy): Laplace'a (na rys. 4

– poz. 1, rys. 5a, b), jednostajnego (na rys. 4 – poz. 6, rys. 5e, f) i arcsinusoidalnego (na rys. 4 – poz. 7, rys. 5g, h).



Rys. 5. Histogramy błędów wyznaczania parametru położenia
Fig. 5. Histograms of errors of determining the location parameter

Natomiast, jeśli próba badana została pobrana z RPP, dla której brakuje macierzy rekonstrukcyjnej (3), wtedy algorytm A2 zapewnia na ogół nieco mniejszą wariancję (niepewność) w porównaniu z wariancją wyniku według algorytmu A1. Stosuje się to rozkładów „środkowych”: splotu normalnego i jednostajnego (na rys. 4 – poz. 3) trójkątnego (na rys. 4 – poz. 4), oraz splotu dwóch jednostajnych przy stosunku ich szerokości 1:2 (na rys. 4 – poz. 5).

W przypadku, kiedy obserwacje próby badanej pobrane są z populacji o rozkładzie normalnym (na rys. 4 – poz. 2, rys. 5c, d) oraz zbliżonych do niego (na rys. 4 – poz. 3, 4) obydwie metody zapewniają w dużym stopniu zbliżone standardowe odchylenia (niepewności) wyników bliskie do standardowego odchylenia wartości średniej.

4. Podsumowanie

1. Przy braku znajomości gęstości rozkładu prawdopodobieństwa populacji, z której zostały pobrane losowe nieskorelowane obserwacji (przy liczbie $n > 10 \dots 15$) metoda opracowania, bazująca na ich porównaniu z obserwacjami referencyjnymi, zapewnia wyznaczenie wyniku pomiaru ze standardowym odchyleniem mniejszym w porównaniu do odchylenia standardowego wartości średniej. Skuteczność metody zwiększa się ze zwiększeniem odchylenia rozkładu populacji od rozkładu normalnego.
2. Jeśli obserwacje zostały pobrane z populacji, dla rozkładu prawdopodobieństwa której istnieje macierz rekonstrukcyjna, wtedy mniejszą wariancję (niepewność) wyniku pomiaru zapewnia algorytm bazujący na minimalnej wartości sumy kwadratów odchylen resztkowych wejściowych. Natomiast drugi algorytm, bazujący na średniej wagowej z estymowanych wartości, jest lepszy, jeśli wśród macierzy rekonstrukcyjnych nie ma takiej, która odpowiada rozkładowi prawdopodobieństwa populacji, z której są pobrane i zarejestrowane obserwacje.
3. Prowadzone są dalsze badania w kierunku szczegółowej analizy właściwości obliczanych wartości $\hat{\mu}$ i $\hat{\sigma}$ oraz oceny ich niepewności.

5. Literatura

- [1] Lloyd E.H. Least-squares estimation on location and scale parameters using order statistics. *Biometrika*, 39 (1952).88.
- [2] Downton F. A note of ordered least-squares estimation. *Biometrika*, 40 (1953). 457.
- [3] M. G. Kendall and A. Stuart. *The Advanced Theory of Statistics*, Vol. 2. Charles Griffin and Co Ltd, London, 3 edition, 1973.
- [4] *Handbook of Applicable Mathematics*. Vol. VI: Statistics. Edited by E. Lloyd and W. Ledermann, John Wiley & Sons, Chichester -New York-Brisbane-Singapore, 1984.
- [5] Fisz M. *Probability Theory and Mathematical Statistics*. John Wiley & Sons, London, 1963.
- [6] Dorzhovets M. Metoda opracowania wyników obserwacji bazująca na ich porównaniu z próbami referencyjnymi. *Pomiary. Automatyka. Kontrola*. 55 (2009), nr.9, 754-757.
- [7] Dorzhovets M., Kochan O. Estimation of the best measurement result and its standard uncertainty by input observations processing using the method of reference samples based on order statistics. *Proc. of the 5-th IEEE International Workshop on Intelligent Data Acquisition and Advanced Computing Systems: Technology and Applications*. 21-23 September 2009, Rende (Cosenza), Italy. 351-354.
- [8] Dorzhovets M. Investigation of the Test Samples Method, Used for the Evaluation of Measurement Result and its Uncertainty. *Proc. of Int. Conf. on Precision Measurement*. TU Ilmenau. 08-12 Sept. 2008. 91-92.
- [9] Dorzhovets M. Metoda opracowania wyników obserwacji bazująca na wykorzystaniu prób referencyjnych. *Mat. Konf. PPM-2009*. Sucha Beskidzka 10-13.05. 2009, 104-107.
- [10] Novitski P.V., Zograf I.A. Estimation of measurement result errors. Leningrad, Energoizdat, 1985. 248. (Ros.)