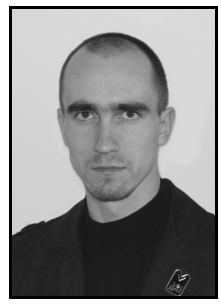
**Marek GLISZCZYŃSKI**, Alexandr ŢARIOV
ZACHODNIOPOMORSKI UNIWERSYTET TECHNOLOGICZNY WYDZIAŁ INFORMATYKI,
ul. Żołnierska 49, 71-126 Szczecin

# Aspekty algorytmiczne organizacji układu do mnożenia długich operandów

**Mgr inż. Marek GLISZCZYŃSKI**

W 2009 r. ukończył studia na Wydziale Informatyki Zachodniopomorskiego Uniwersytetu Technologicznego, gdzie obecnie jest doktorantem. Jego zainteresowania naukowe to algorytmy cyfrowego przetwarzania oraz transmisji sygnałów, sprzętowe wspomaganie oraz zrównoleglenie obliczeń, technologie mobilne, systemy i sieci komputerowe.



*e-mail: mgliszczynski@wi.ps.pl*

**Dr hab. inż. Alexandr ŢARIOV**

Ukończył studia na Wydziale Automatyki i Urządzeń Obliczeniowych Uniwersytetu Miernictwa w Sewastopolu, obronił pracę doktorską w 1984 r., habilitacyjną - w 2001 r. Jest kierownikiem katedry Architektury Komputerów i Telekomunikacji na Wydziale Informatyki Zachodniopomorskiego Uniwersytetu Technologicznego. Jego zainteresowania naukowe to algorytmy cyfrowego przetwarzania oraz transmisji sygnałów, sprzętowe wspomaganie oraz zrównoleglenie obliczeń.

*e-mail: atariov@wi.ps.pl*

**Streszczenie**

W pracy została zaprezentowana zracjonalizowana struktura algorytmiczna do obliczania iloczynu dwóch operandów *N*-elementowych ze zredukowaną liczbą układów mnożących i sumatorów dla dowolnej dużej wartości. Pozwala to przy implementacji zmniejszyć nakłady obliczeniowe lub zapotrzebowanie na zasoby sprzętowe oraz stworzyć dogodne warunki do efektywnej realizacji operacji mnożenia dużych liczb w dowolnym sprzętowo-programowym środowisku implementacyjnym.

**Słowa kluczowe**: algorytm, mnożenie, długie liczby, operacje macierzowe.

## Algorithmic aspects of long-digit multiplier organization

**Abstract**

In the paper the fast algorithm for two long, *N*-digits numbers multiplication with reduced number of multipliers and adders for any large value is presented. In the first paragraph a theoretical problem with known solutions is presented. While naïve *N*-bits numbers multiplication requires $N \times N$ fragmentary, one-bit multiplications, the Karatsuba approach using simple transformations (1-3) and recursion provides smaller complexity. There are also described other, faster algorithms of more complicated structure (Toom-3, Schönhage-Strassen). The algorithm presented in this paper is based on the Karatsuba method because of its simplicity. In the second paragraph there is given the synthesis of a matrix-based, tensor product algorithm for large operand multiplications with no recursion needed. All matrix constructions are predefined. Next, the graph-structural models of the algorithm with time/space flow of data for $N$=2 and $N$=4 are shown (Figs. 1, 2). At the end, estimation of the number of multipliers and adders according to the operands length, supported by Table 1, is discussed (11, 12). The advantages of the new algorithm are simple and clear matrices-based construction, easy implementation, no need of recursion, possibility of parallel execution and reduced number of multipliers. Next problem to consider is profitability of the proposed approach in multi-core hardware implementation depending on *N* value.

**Keywords**: fast algorithm, multiplication, long numbers, tensor product.

## 1. Wprowadzenie

Operacja mnożenia długich operandów jest podstawą rozmaitych algorytmów kryptograficznych [1].

Niekiedy właśnie w takich zastosowaniach zachodzi konieczność przeprowadzenia operacji mnożenia na liczbach długości kilkuset i więcej bitów, które fizycznie nie mogą być obsłużone przez współczesne układy mnożące bez wstępnego podziału. Ponadto bazowa operacja mnożenia dwóch liczb długości $N$ bitów wymaga $N^2$ cząstkowych, jednobitowych operacji mnożenia, co dla dużych $N$ powoduje kwadratowy wzrost operacji arytmetycznych. Stąd wynika potrzeba poszukiwania możliwości redukcji złożoności obliczeniowej operacji mnożenia długich liczb całkowitych. Dla ilustracji istnienia takiej możliwości rozważmy najpierw przykład mnożenia liczb dwucyfrowych.

Jeśli dwucyfrowe liczby $x$ i $y$ zdefiniujemy jak w równaniach (1):

$$x = x_1 b + x_0 \,,\; y = y_1 b + y_0 \,, \tag{1}$$

gdzie jest podstawą liczb $x$ i $y$, to operacja mnożenia tych sprowadza się do następującego wzoru:

$$xy = x_1 y_1 b^2 + \left(x_1 y_0 + x_0 y_1\right) b + x_0 y_0 \tag{2}$$

i, jak widać, wymaga wykonania 4 operacji mnożenia oraz 3 operacji dodawania odpowiednich cyfr.

Powstało wiele algorytmów spełniających te kryteria. Ze względu na prostotę i intuicyjność najpopularniejszym rozwiązaniem jest algorytm Karatsuby [7], według którego operacja mnożenia przedstawionych liczb $x$, $y$ wygląda następująco:

$$xy = x_1 y_1 b^2 + ((x_0 + x_1)(y_0 + y_1) - x_0 y_0 - - x_1 y_1) b + x_0 y_0 . \tag{3}$$

Sposób wykonania operacji mnożenia za pomocą wzoru (3) zapewnia zysk jednego mnożenia kosztem większej ilości dodawań i przekształceń w stosunku do „naiwnego" sposobu realizacji owej operacji za pomocą wzoru (2). Procedura realizacji mnożenia w algorytmie Karatsuby zakłada rekurencyjny podział liczby na dwie części aż do momentu operowania na pojedynczych cyfrach (bitach). Sposób ten zapewnia złożoność $O(n^{1,585})$ w stosunku do $O(n^2)$ metody naiwnej, ale ze względu na koszty wywołań rekurencyjnych nie stosuje się tego algorytmu dla liczb mniejszych niż kilkaset bitów [9].

Większy zysk można uzyskać wykorzystując jedną z modyfikacji algorytmu Karatsuby, np. metodę Tooma-Cooka [2, 5, 11], która zakłada podział na trzy lub więcej części, jednak mniejszą liczbę mnożeń okupuje znacznie większą komplikacją, co z kolei uniemożliwia stosowanie tego algorytmu dla mniejszych liczb. Wersja algorytmu z podziałem na $k = 3$ części (Toom-3) daje złożoność $O(n^{1,465})$ [4].

W przeciągu ostatnich lat za najlepszy pod względem złożoności obliczeniowej ze wszystkich znanych dotąd algorytmów był uznawany algorytm Schönhage-Strassena, stosowany jedynie do mnożenia bardzo długich liczb składających się z dziesiątków tysięcy bitów. Ten algorytm wykorzystuje do realizacji mnożenia szybką transformatę Fouriera [10].

Jeszcze w początkach pierwszych pięciu lat 21 stulecia wydawało się, że w zakresie metod mnożenia długich liczb całkowitych, większych nowości jakościowych nie należy się spodziewać. Niespodziewanie taką zmianą jakościową stało się wylansowanie w 2007 roku nowego algorytmu pozwalającego na dalszą redukcję złożoności obliczeniowej tego typu operacji [7].

Prezentowana w artykule struktura układu do mnożenia długich operandów opiera się jednak na podstawowej metodzie Karatsuby z podziałem liczb na .dwie części ze względu na prostotę tego rozwiązania. Głównym celem była taka modyfikacja, która pozwoliłaby na przeprowadzenie cząstkowych operacji mnożenia równolegle. Opisywana metoda reprezentowana jest za pomocą przekształceń macierzowo-wektorowych [13] i wprowadza podział działań na przekształcenia przed mnożeniami, operacje mnożenia oraz działania po mnożeniach. Ponadto proponowane podejście likwiduje prawie zupełnie konieczność stosowania rekurencji, co umożliwia predefiniowanie wszystkich macierzy przekształceń.

Z uwagi na konieczność podziału liczb na dwie części rekurencyjnie zakładamy długość liczb $N = 2^m$, chociaż po uprzednim uzupełnieniu liczb innej długości po lewej stronie zerami można stosować algorytm dla dowolnej długości liczb.

## 2. Synteza struktury algorytmu mnożenia długich liczb

Określimy najpierw znaczenie wykorzystanych w dalszej części artykułu symboli: $\mathbf{I}_N^{(\downarrow\alpha)}$ – macierz jednostkowa o wymiarze określonym za pomocą dolnego indeksu, natomiast indeks górny, (jeżeli jest) wskazuje liczbę pozycji cyklicznego przesunięcia wierszy macierzy w kierunku wskaźnika [6]; $\mathbf{0}_N$ - macierz zerowa *N*-tego rzędu; $\frac{\blacksquare}{\blacksquare}$, $\blacksquare|\blacksquare$ – symbole pionowej i poziomej konkatenacji dwóch lub więcej macierzy [12]; $\otimes$ – symbol iloczynu Kroneckera [3, 9].

W celu syntezy struktury algorytmicznej specjalizowanej jednostki procesorowej realizującej operację mnożenia długich operandów wprowadźmy kilka konstrukcji macierzowych:

- macierze definiujące przekształcenia na iteracjach poprzedzających mnożenia:

$$\mathbf{A}^{(k)}_{2^{m-k}\cdot 3^k\times 2^{m-k+1}\cdot 3^{k-1}} = \mathbf{I}_{3^{k-1}} \otimes \mathbf{T}_{3\times 2} \otimes \mathbf{I}_{2^{m-k}}; \tag{4}$$

- macierze definiujące przekształcenia na iteracjach następujących po mnożeniu:

$$\mathbf{B}^{(k)}_{3^m} = \mathbf{I}_{3^{k-1}} \otimes \mathbf{T}_3 \otimes \mathbf{I}_{3^{m-k}}, \tag{5}$$

gdzie $k = \overline{1,m}$, $\mathbf{T}_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$, $\mathbf{T}_{3\times 2} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$;

- macierz sumowania wyjść o tych samych współczynnikach (bazach liczby):

$$\begin{cases} \mathbf{P}^{(0)}_1 = 1 \\ \mathbf{P}^{(m)}_{(2^{m+1}-1)\times 3^m} = \overset{2}{\underset{i=0}{\blacksquare|\blacksquare}} (\mathbf{P}^{(m-1)}_{(2^m-1)\times 3^{m-1}} \frac{\blacksquare}{\blacksquare} \mathbf{0}_{2^m\times 3^{m-1}})^{(\downarrow(2i)^{m-1})}; \end{cases} \tag{6}$$

- opcjonalną macierz współczynników wagowych:

$$\mathbf{W}_{2N-1} = diag\left(b^{2N-2}, b^{2N-1}, \ldots, b^0\right), \tag{7}$$

gdzie $b$ jest podstawą mnożonych liczb.

Jeśli mnożone liczby $\mathbf{X}$ i $\mathbf{Y}$ zdefiniujemy, jako wektory, których elementami są kolejne cyfry tych liczb, to wynik mnożenia $\mathbf{Z}$ można zdefiniować następująco:

$$\begin{aligned} \mathbf{Z}_{(2N-1)\times 1} = \mathbf{W}_{2N-1}\mathbf{P}^{(m)}_{(2^{m+1}-1)\times 3^m}\ \mathbf{B}^{(1)}_{3^m}\mathbf{B}^{(2)}_{3^m}\cdots\mathbf{B}^{(m)}_{3^m} \times \\ \times \mathbf{S}_{3^m}\ \mathbf{A}^{(m)}_{3^m\times 2\cdot 3^{m-1}}\mathbf{A}^{(m-1)}_{2\cdot 3^{m-1}\times 2^2\cdot 3^{m-2}}\cdots\mathbf{A}^{(1)}_{2^{m-1}\cdot 3\times 2^m}\mathbf{X}_{N\times 1} \end{aligned}. \tag{8}$$

Macierz $\mathbf{S}_{3^m}$ jest diagonalną macierzą mnożeń:

$$\mathbf{S}_{3^m} = diag(\mathbf{A}^{(m)}_{3^m\times 2\cdot 3^{m-1}}\mathbf{A}^{(m-1)}_{2\cdot 3^{m-1}\times 2^2\cdot 3^{m-2}}\cdots\mathbf{A}^{(1)}_{2^{m-1}\cdot 3\times 2^m}\mathbf{Y}_{N\times 1}).$$

Macierz tą uzyskuje się identycznie do przekształceń wektora $\mathbf{X}_{N\times 1}$, jak to jest pokazane we wzorze (8) – wykorzystane te same macierze (4). Operacje na obu wektorach mogą być wykonywane równocześnie, a odpowiadające sobie wyniki częściowe mnożone symultanicznie, lub w kolejności pojawiania się (jeśli oba operandy są zmiennymi, nie trzeba koniecznie tworzyć macierzy, co jest pokazane na rysunku 2).

Jedynie wyznaczenie macierzy $\mathbf{P}$ wymaga zastosowania rekurencji, jednak jest to szybka operacja, a postać macierzy zależy jedynie od długości liczb i można wyprowadzić potrzebne macierze jeszcze przed właściwym mnożeniem. Głównym zadaniem tej macierzy jest redukcja długości wektora wynikowego i uproszczenie konstrukcji macierzy $\mathbf{W}$. Przykład macierzy $\mathbf{P}$ dla przypadku $N = 4$ przedstawiono poniżej (9).

$$\mathbf{P}^{(2)}_{7\times 9} = \left[\begin{array}{c|c|c} 1 & \mathbf{0}_{2\times 3} & \mathbf{0}_{4\times 3} \\ \hline 1 & 1 & \\ \hline & \mathbf{0}_{2\times 3} & 1 \end{array}\right] \tag{9}$$

Rozpatrzmy przykład struktury algorytmicznej układu w przypadku, gdy $N = 4$. Wówczas procedura (4) przybiera postać (10):

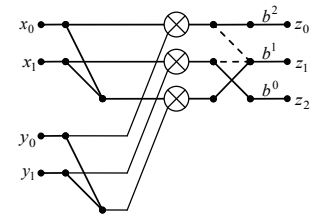
$$\mathbf{Z}_{7\times 1} = \mathbf{W}_7\mathbf{P}^{(2)}_{7\times 9}\ \mathbf{B}^{(1)}_9\mathbf{B}^{(2)}_9\ \mathbf{S}_9\ \mathbf{A}^{(2)}_{9\times 6}\mathbf{A}^{(1)}_{6\times 4}\ \mathbf{X}_{4\times 1}, \tag{10}$$

zaś poszczególne macierze:

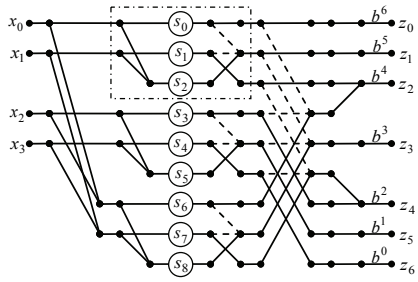
$$\begin{aligned} \mathbf{A}^{(1)}_{6\times 4} = \mathbf{T}_{3\times 2}\otimes\mathbf{I}_2,\ \mathbf{A}^{(2)}_{9\times 6} = \mathbf{I}_3\otimes\mathbf{T}_{3\times 2}, \\ \mathbf{B}^{(1)}_9 = \mathbf{T}_3\otimes\mathbf{I}_3,\ \mathbf{B}^{(2)}_9 = \mathbf{I}_3\otimes\mathbf{T}_3, \\ \mathbf{W}_7 = diag\left(b^6, b^5, b^4, b^3, b^2, b^1, b^0\right), \\ \mathbf{S}_9 = diag\left(y_0, y_1, y_0+y_1, y_2, y_3, y_2+y_3, \right. \\ \left. y_0+y_2, y_1+y_3, y_0+y_1+y_2+y_3\right). \end{aligned}$$

Przedstawiony algorytm zakłada podział liczb aż do pojedynczych cyfr, co powoduje, że elementy wektora wyjściowego $\mathbf{Z}$ mogą być liczbami dwucyfrowymi. Aby uzyskać wynik w postaci wektora pojedynczych cyfr należy wykonać operację przeniesienia. Można także wymnożyć wektor wyjściowy przez macierz współczynników $\mathbf{W}$, wówczas po zsumowaniu wszystkich wyjść otrzymamy wynik mnożenia w postaci pojedynczej liczby.

Rysunki 1 oraz 2 przedstawiają modele grafostrukturalne ilustrujące strukturę algorytmiczną układu procesorowego do wyznaczania iloczynu liczb zgodnie z opracowaną procedurą odpowiednio dla $N = 2$ i $N = 4$.




Rys. 1. Model grafostrukturalny dla przykładu *N*=2, z jednoczesnym wyznaczaniem mnożników (macierzy S)
Fig. 1. The graph-structural model for *N*=4 with parallel multipliers (S matrix) computation




Rys. 2. Model grafostrukturalny organizacji procesu obliczeniowego wyznaczania iloczynu liczb według procedury (8) dla przykładu $N$=4
Fig. 2. The graph-structural model of computation process organization for multiplication calculating corresponding to (4) for $N$=4

Liniami prostymi oznaczone są operacje transferu danych. W przypadku tych modeli skupienie linii prostych w odpowiednich punktach oznacza operację dodawania, przy czym przerywane linie oznaczają negację, natomiast linie rozchodzące się (rozgałęzienia) – zwykłe operacje dublowania danych. Kółkami na tych grafach są przedstawione operacje (bloki) mnożenia przez stałą w nich wpisaną (rys. 2) lub mnożenie stałych znajdujących się na wejściach (rys. 1).

Zaznaczony ramką fragment na rysunku 2 odpowiada modelowi dla mnożenia liczb długości $N = 2$ (rys. 1).

## 3. Oszacowanie liczby operacji cząstkowych mnożenia oraz operacji dodawania

Jak widać, zaproponowany w artykule algorytm pozwala zredukować łączną liczbę operacji mnożenia oraz dodawania względem metody „naiwnej". Dla rozważonego przykładu mamy 9 mnożeń zamiast 16 oraz 22 dodawania zamiast 9, przy czym operacja dodawania jest mniej kosztowna niż operacja mnożenia.

Dla dowolnego $N$ liczba mnożeń niezbędnych do realizacji algorytmu może być opisana za pomocą następującego wzoru:

$$\theta_{\times} = 3^m, \tag{10}$$

natomiast liczba dodawań jest określona jako:

$$\theta_{+} = 2m \cdot 3^{m-1} + \sum_{i=1}^{m} \left(2^i \cdot 3^{m-i}\right). \tag{11}$$

W tabeli 1 przedstawione są wyniki oszacowania liczby bloków arytmetycznych wymaganych przy implementacji opracowanego rozwiązania w porównaniu z implementacją metody „naiwnej".

Tab. 1. Oszacowanie liczby bloków arytmetycznych dla różnych długości liczb ($N$)
Tab. 1. Estimation of arithmetic operations for different $N$

| $N$ | Bloki mnożenia | | Bloki dodawania | |
|---|---|---|---|---|
| | naiwny | proponow. | naiwny | proponow. |
| **2** | 4 | 3 | 1 | 4 |
| **4** | 16 | 9 | 9 | 22 |
| **8** | 64 | 27 | 49 | 92 |
| **16** | 256 | 81 | 225 | 346 |
| **32** | 1024 | 243 | 961 | 1232 |
| **64** | 4096 | 729 | 3969 | 4246 |
| **128** | 16384 | 2187 | 16129 | 14324 |
| **256** | 65536 | 6561 | 65025 | 47602 |
| **512** | 262140 | 19683 | 261120 | 156440 |
| $\mathbf{2^{10}}$ | 1048600 | 59049 | 1046500 | 509710 |

Okazuje się, że mimo 3 sumatorów więcej dla pierwszego kroku obliczeń nadwyżka ta zaczyna maleć wraz ze wzrostem długości liczby i dla $N = 128$ jest już mniej sumatorów do wykonania dodawań cząstkowych niż przy implementacji metody naiwnej. Powodem tej tendencji spadkowej jest znaczna redukcja bloków mnożenia, więc dla dużych liczb rozpatrywanie wpływu stosunku kosztu sumatora względem bloku mnożenia dla różnych układów cyfrowych jest bezzasadne. Należy jednak zauważyć, że podana liczba sumatorów nie uwzględnia tych ostatnich, redukujących ilość wyjść (macierz $\mathbf{P}$), ponieważ nie jest to krok obowiązkowy i zależy on od implementacji.

## 4. Podsumowanie

W artykule opisano strukturę algorytmiczną układu procesorowego do liczenia iloczynów długich, $N$-elementowych operandów. Na „racjonalność" prezentowanego rozwiązania wpływ ma przede wszystkim znaczna redukcja liczby bloków, realizujących cząstkowe operacje mnożenia, ale także możliwość przeprowadzenia tych mnożeń równolegle, jeśli tylko platforma implementacyjna na to pozwala.

Mimo, iż podobne rozwiązania były proponowane [8], przedstawione rozwiązanie posiada kilka dodatkowych atutów, takich jak wyeliminowanie rekurencji, prostota bądź intuicyjność implementacji. Przewagi te wynikają z zastosowania sukcesywnie wybranego sposobu zrównoleglenia obliczeń na etapie syntezy struktury algorytmicznej układu oraz racjonalnego doboru konstrukcji macierzowych, opisujących przekształcenia danych na każdym etapie realizacji wektorowo-macierzowej procedury obliczeniowej.

W artykule dla przejrzystości zostały pokazany warianty syntezy struktur układów (modele grafostrukturalne) dla przykładów, gdy $N = 2$ oraz $N = 4$. Oczywiste jest, że w podobny sposób mogą być skonstruowane efektywne (posiadające mniej bloków mnożących oraz sumatorów) i równoległe struktury układów do mnożenia dowolnie długich liczb.

Kolejną rzeczą, nad jaką należałoby zastanowić się jest opłacalność sprzętowej realizacji proponowanego podejścia w zależności od długości operandów, lub też celowość implementacji metody, na bazie systemu wielordzeniowego, który w pełni by wykorzystał potencjał tego rozwiązania.

## 5. Literatura

[1] Biernat J., Arytmetyka Komputerów, Wydawnictwo Naukowe PWN, 1996.
[2] Bodrato M., Toward Optimal Toom-Cook Multiplication for Univariate and Multivariate Polynomials in Characteristic 2 and 0, WAIFI'07, Springer, 2007.
[3] Burrus C. S., Parks T. W., Potts J. F., DFT/FFT and Convolution Algorithms and Implementation, John Willey & Sons, 1985.
[4] Cesari G. and Maeder R., Performance analysis of the parallel Karatsuba multiplication algorithm for distributed memory architectures. J. Symb. Comput., 21(4-6):467–473, 1996.
[5] Cook S. A., On the minimum computation time of functions, Harvard University - PhD thesis, 1966.
[6] Dagman E.E., Kukharev. G.A., Szybkie dyskretne transformaty ortogonalne, Wydawnictwo Nauka, 1983.
[7] Fürer M., Faster integer multiplication, STOC '07: Proceedings of the thirty-ninth annual, ACM symposium on Theory of computing (New York, NY, USA), ACM, 2007, pp. 57-66.
[8] Karatsuba A., Ofman Y., Multiplication of Many-Digital Numbers by Automatic Computers. Doklady Akad. Nauk SSSR Vol. 145, 1962, pp. 293–294. Translation in Physics-Doklady 7, 1963, pp. 595–596.
[9] Liu C.-B., Huang C.-H., Design and Implementation of Long-Digit Karatsuba's Multiplication Algorithm Using Tensor Product Formulation, In The Ninth Workshop on Compiler Techniques for High Performance Computing, 2003, pp. 23-30.
[10] Schönhage A., Strassen V., Schnelle Multiplikation großer Zahlen, Computing 7, 1971, pp. 281–292.
[11] Toom A.L., The complexity of a scheme of functional elements simulating the multiplication of integers, Dokl. Akad. Nauk SSSR 150 (1963), 496{498, (in Russian). English translation in Soviet Mathematics 3, 714-716, 1963.
[12] Ţariov A., Modele algorytmiczne i struktury wysokowydajnych procesorów cyfrowej obróbki sygnałów, Szczecin, Informa, 2001.
[13] Ţariov A., Strategie racjonalizacji obliczeń przy wyznaczaniu iloczynów macierzowo-wektorowych. Metody Informatyki stosowanej, Nr 1, 2008, str. 147- 158.

*otrzymano / received: 13.05.2010*
*przyjęto do druku / accepted: 01.09.2010* *artykuł recenzowany*