

## Marian Jerzy KORCZYŃSKI<sup>1</sup>, Zygmunt Lech WARSZA<sup>2</sup>

<sup>1</sup> POLITECHNIKA ŁÓDZKA, KATEDRA PRZYRZĄDÓW PÓLPRZEWODNIKOWYCH I OPTOELEKTRONICZNYCH, Wólczańska 211/215, 90-924 Łódź

<sup>2</sup> POLSKIE TOWARZYSTWO METROLOGICZNE, ul. Szmaragdowych Żuków 32, 05-540 Zalesie Górne

# Podniesiona cosinusoida jako rozkład gęstości prawdopodobieństwa - właściwości i przykłady zastosowań

Dr inż. Marian Jerzy KORCZYŃSKI

Ukończył Wydział Elektryczny Politechniki Łódzkiej w 1973 r., doktorat w 1981. Adiunkt od 1981r. Zainteresowania naukowe i dydaktyczne: systemy pomiarowe, cyfrowe przetwarzanie sygnałów, niepewność pomiaru, metody matematyczne i techniki informatyczne w metrologii. Autor i współautor 99 publikacji, 3 książek w języku angielskim, kilku patentów i szeregu opracowań naukowych oraz badawczych i konstrukcyjnych dla przemysłu.



e-mail: jerzykor@p.lodz.pl

Doc. (em.) dr inż. Zygmunt Lech WARSZA

Ukończył Miernictwo Elektryczne w Politechnice Warszawskiej 1959, doktorat 1967, docent 1970. Praca: 1958-63 (i 1994-95) Instytut Elektrotechniki, 1960-70 Politechnika Warszawska; od 1970 Wydział Transportu Politechniki Świętokrzyskiej (dziekan 1970-76), Ośrodek Aparatury Pomiarowej IMGW 1978 – 82, Zakład Automatyzacji i Techniki Pomiarowej Instytutu Chemii Przemysłowej 1983-91. Doradca Ministra Edukacji 1992 – 94. Do 2002 r. wykładał metrologię i diagnostykę techniczną w Politechnice Radomskiej. Prezes Polskiego Towarzystwa Metrologicznego.



e-mail: zlw@op.pl

### Streszczenie

Omówiono niekonwencjonalny rozkład gęstości prawdopodobieństwa (PDF) w postaci jednego okresu cosinusoidy przesuniętej w górę i o polu równym 1 jako alternatywę rozkładu Normalnego (funkcji Gaussa). Wykazano, że w przedziale  $\pm 2,5$  odchylenia standardowego cosinusoida przesunięta o jej amplitudę  $A$  - funkcja  $2A\cos^2(\cdot)$ , nie odbiega od rozkładu Normalnego więcej niż o  $\pm 2,1\%$ . Dla rzeczywistych wyników pomiarów o ograniczonym zakresie rozrzutu uzyskuje się mniejszą niepewność typu A niż według międzynarodowego Przewodnika GUM. Rozważania teoretyczne i symulacje poparto przykładem z praktyki metrologicznej. Rozkład  $\text{COS}^2$  można z powodzeniem stosować do szybkiego szacowania niepewności pomiarów, w tym do automatyzacji tych obliczeń oraz w statystyce.

**Słowa kluczowe:** funkcja gęstości prawdopodobieństwa  $\text{COS}^2$ , alternatywa rozkładu Normalnego.

## Shifted up cosine as probability density function - properties and application examples

### Abstract

Unconventional probability density distribution function (PDF) of the form of the one period of cosine function shifted up and of its area under curve equal of 1 is proposed as an alternative to Normal distribution, i.e. Gauss function. It is presented that if a cosine function is shifted up by its amplitude  $A$ , such function ( $2A\cos^2(\cdot)$ ), can be applied as approximation of the central part of Normal PDF ( $\pm 2,5$  of its standard deviation) with the accuracy not lower than 2,1%. In reality the distribution of measurements is always of limited range and uncertainty type A obtained by  $\text{COS}^2$  PDF is smaller than recommended by international Guide GUM [1]. Analysed data from experiment and simulated data confirmed that new proposed unconventional distribution has an advantage of a lowering uncertainty interval by comparison to Gaussian distribution at the same level of confidence, and calculations are simpler and faster.  $\text{COS}^2$  distribution can be successfully applied for the fast uncertainty evaluation of measurements, for its automation and in statistics.

**Keywords:**  $\text{COS}^2$  probability density function, PDF, replacement of Normal distribution.

## 1. Wstęp

Do opisu rozkładu gęstości prawdopodobieństwa (PDF) zbioru wyników obserwacji pomiarowych zwykle stosuje się dwuparametrową wykładniczą funkcję Gaussa nazywaną rozkładem Normalnym. Rozkład ten przebiega w nieograniczonym zakresie wartości wielkości mierzonej  $\pm\infty$  i jest modelem teoretycznym, który występuje tylko przy nieskończonej liczbie czynników losowych niezależnie oddziałujących na obiekt badany wraz z torem pomiarowym. Nie zachodzi to jednak w praktyce ani w eksperymentach pomiarowych, ani w opisach statystycznych rozrzutu mierzonych właściwości obiektów i procesów technicznych.

Przy losowym oddziaływaniu skończonej liczby czynników, rozstęp, czyli przedział rozrzutu wartości wyników obserwacji pomiarowych, jest zawsze ograniczony. Pojawiają się więc niedogodności w stosowaniu rozkładu Normalnego, gdyż:

- rozkład Normalny opisuje dość skomplikowaną wykładniczą funkcja Gaussa i korzysta się z tabelaryzowania jej wartości,
- niepewność wyniku pomiarów wielkości mierzonej jest zawsze zawyżana wskutek nieograniczonego przebiegu funkcji Gaussa i stosowania rozkładu Studenta przy małej liczbie danych,
- nie można oszacować skończonej szerokości przedziału, w którym wynik pomiaru ma prawdopodobieństwo równe 1.

W wielu pomiarach użytkowych wystarcza ocena ich niepewności z dokładnością do 20% i niedogodności te nie są istotne. Eliminacja ich wpływu nabiera natomiast znaczenia przy kalibracji wzorców oraz w badaniach właściwości surowców, środowiska, urządzeń i wyrobów służących decyzjom o ich kwalifikacji i cenie, w kontroli jakości, w handlu, diagnostyce itp. Tych trudności nie rozwiązuje w wystarczająco prosty sposób rozkład pseudo-Normalny o obciążonych końcach i polu pod krzywą, znormalizowanym do 1, ze względu na skomplikowaną postać opisu. Stosuje się więc też inne modele rozkładów dla danych eksperymentalnych, które zawsze występują w ograniczonym zakresie.

W zaleceniach międzynarodowego Przewodnika o angielskim akronimie GUM [1] rozkład Normalny służy do wyznaczania składowej niepewności pomiarów szacowanej metodą statystyczną typu A. Prowadzone są prace międzynarodowe nad udoskonaleniem i rozszerzeniem zakresu stosowania metod wyznaczania niepewności objętych Przewodnikiem GUM. Ich rezultatem są kolejne Suplementy do tego Przewodnika, np. [2].

Proces wyznaczania wypadkowej, tzw. rozszerzonej niepewności wyniku pomiarów obejmuje splatanie rozkładów niepewności składowych. Obok dość uciążliwej metody analitycznej ostatnio stosuje się też metodę Monte Carlo opisaną w Suplemencie 1 [2]. Wymaga ona wiele setek tysięcy operacji i nawet przy szybkich obliczeniach komputerowych jest zbyt powolna dla obliczeń w czasie rzeczywistym. Korczyński i Hetman [4] zaproponowali zastosowanie metody szybkiej transformaty Fouriera FFT. Obejmuje ona bądź generację wartości funkcji rozkładów składowych, bądź zapamiętywanie tabel ich wartości. Są też trudności w splataniu rozkładów dyskretnych zawierających funkcje delta Diraca.

W badaniach procesów przemysłowych i w eksploatacji przydatne było by zautomatyzowane przetwarzanie sygnałów pomiarowych, wbudowane w systemy przyrządów i czujniki, szczególnie przeznaczone do pracy ciągłej. Umożliwiłoby ono na bieżąco bądź wyznaczanie składowych regularnych i statystycznych sygnału wartości mierzonej (mierzand), bądź dla wartości o określonym przebiegu - wyznaczanie niepewności jej pomiarów [3]. Do tego celu trudno jest zastosować obie powyższe metody, gdyż metoda Monte Carlo ma czas obliczeń zbyt długi dla bieżącej kontroli procesów i sterowania, a implementacja metody FFT w prostszych urządzeniach pomiarowych nie zawsze jest możliwa.

W oparciu o tę analizę drugi autor (ZLW) sformułował dwie tezy robocze jako zadania dla opisanych tu badań.

- Informacja o szerokości przedziału, w którym występują wyniki pomiarów może pozwolić na lepsze oszacowanie składowych niepewności pomiarowych typu A i B niż według zaleceń Przewodnika GUM [1, 2]. Uzyskać można większą dokładność wartości mierzandru dla tej samej próbki danych.
- Należy zbadać zastosowanie pojedynczego okresu cosinusoidy podniesionej o amplitudę, lub o inną stałą wartość, jako prostego modelu rozkładu PDF o ograniczonym zakresie ze względu na kształt zbliżony do środkowej części funkcji Gaussa.

Dla sprawdzenia tych tez konieczne było opracowanie podstaw teoretycznych wraz ze szczegółowym zbadaniem właściwości tego niekonwencjonalnego modelu PDF. Wstępne wyniki badań opisano w [5]. Tuż po ich ukończeniu natrafiono w dość dawnej literaturze (1961r.), że Green i Rabb [9] proponowali już jedną z postaci funkcji  $\cos^2(\cdot)$  do opisu rozkładu wyników badań w psychometrii. Nie wykorzystywali oni jednak żadnego kryterium do doboru optymalnych parametrów tej funkcji i zalecali by cosinusoidę dopasowywać wizualnie na oscyloskopie do rozkładu eksperymentalnego. Zbadaliśmy, że przyjęta przez nich arbitralnie postać funkcji  $\cos^2(\cdot)$  odbiegała dość znacznie (do około 14%) od funkcji Gaussa. Nie spotkano też w późniejszej literaturze żadnego śladu stosowania tej funkcji w technice pomiarowej.

## 2. Podstawowe właściwości rozkładu +COS

Rozpatrzmy model funkcji gęstości rozkładu prawdopodobieństwa PDF w postaci jednego okresu funkcji cosinus o amplitudzie  $A$ , okresie  $2X$  i przesuniętej o  $B$  w dodatnim kierunku osi  $y$ :

$$f(x) = B + A \cos \pi \frac{x}{X} \quad \text{dla } (-1 \leq \frac{x}{X} \leq 1) \quad (1)$$

gdzie:  $x$  – wartość bieżąca wyniku obserwacji,

$X$  – pół zakresu rozpięcia równe 0,5 okresu cosinusoidy,

$A, B$  – amplituda cosinusoidy i jej podniesienie.

Jako rozkład PDF funkcja  $f(x)$  ma sens fizyczny dla  $f(x) > 0$  i w ograniczonym przedziale, np. jednego okresu  $\pm(X \leq 0,5X_T)$ . W ogólnym przypadku przy  $B \geq 0$  rozkład ten zaproponowaliśmy nazwać podniesioną cosinusoidą i oznaczać symbolem +COS [5].

Funkcja według (1) ma trzy niezależne parametry ( $A, B, X$ ), wyznaczalne z następujących warunków:

- pole pod krzywą pomiędzy krańcami  $\pm X$  wynosi  $S=1$ , lub ma inną wartość  $S < 1$ , np. jak dla rozkładu Gaussa w tym przedziale,
- zadany jest przedział  $X$  lub punkty, przez które ma przechodzić funkcja +COS, , bądź ma ona być styczna na krańcach do osi  $x$ .
- wyznacza się minimum różnicy pomiędzy danymi a krzywą według określonego kryterium statystycznego, np. średniokwadratowego, minimum sumy modułów, Kołgomorowa-Smirnowa, Czebyszewa,  $\chi^2$ , lub innego kryterium.

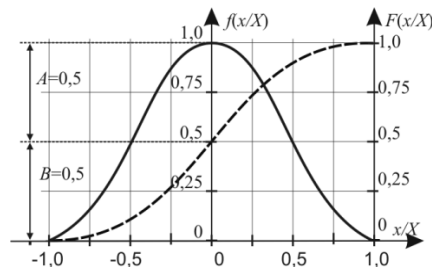
W [5-7] rozpatrzono tylko takie funkcje  $B + A \cos(\pi x/X)$ , które na końcach ich zakresu  $\pm X$  są styczne bądź do osi  $x$  (tj.  $B=A$ ), bądź do prostej równoległej do niej powyżej tej osi. Wstępna analiza i symulacje wykazały, że funkcje  $B + A \cos(\cdot)$  o zakresie mniejszym niż okres, będą bardziej odbiegały od krzywej Gaussa, niż funkcje styczne. Dla podniesionej cosinusoidy o okresie  $2X$  pole  $S$  pod krzywą równa się  $S=B \cdot 2X$ . Z wartości pola  $S=1$  wynika  $X=1/2B$  i tylko dwa parametry  $A$  i  $B$  (lub  $A$  i  $X$ ) są niezależne, tj.:

$$f(x) = B + A \cos(2\pi x B) \quad \text{dla } -1 \leq 2x B \leq 1 \quad (2)$$

W [6, 7] wyznaczono dystrybuantę oraz odchylenie standardowe rozkładu +COS, które wynosi

$$\sigma_{+\cos} = X \sqrt{\frac{1}{3} - \frac{4}{\pi^2}} A X = \frac{1}{2B} \sqrt{\frac{1}{3} - \frac{2}{\pi^2}} \frac{A}{B} \quad (2a)$$

Rozwiązanie jest możliwe dla stosunku  $A/B \leq (1/6) \pi^2 \approx 1,78$ .



Rys. 1. Przebieg gęstości prawdopodobieństwa  $f(x/X)$  i dystrybuanty  $F(x/X)$

dla rozkładu +COS, o  $A=B$  i wartości średniej danych równej zero  
Fig. 1. Probability density distribution function  $f(x/X)$  and distribution  $F(x/X)$  of +COS for  $A=B$  and data mean value equal zero

W ogólnym przypadku podniesienia  $B > A$  kształt funkcji jest zbliżony do dwustronnie obciętego rozkładu Normalnego i podobnie kłopotliwy w stosowaniu. Dlatego preferuje się szczególny przypadek rozkładu +COS dla  $A=B$  i styczności do osi  $x$  w punktach krańcowych  $x = \pm X$ , jak na rys. 1.

## 3. Cosinusoida podniesiona o amplitudę

Rozpatrzmy bliżej tę szczególną postać rozkładu +COS z rys. 1 o podniesieniu  $B$  równym amplitudzie  $A$ , i gdy jego funkcja jest styczna do osi  $x$  dla  $x = \pm X$ . Wówczas

$$f(x) = A \left( 1 + \cos \pi \frac{x}{X} \right), \quad \text{dla } A=B \quad (3)$$

Jeśli przedział całkowania rozciąga się pomiędzy punktami styczności  $\pm X$  tej funkcji z osią  $x$ , to dla pola  $S=1$  otrzymuje się następujące wartości całek jej składników z (3):  $A \cdot 2X = 1$  i  $2 \sin(x = \pm X) = 0$ . Tak więc tylko jeden parametr,  $A$  lub  $X$ , jest wtedy niezależny. Stąd

$$A = 0,5 / X \quad \text{lub} \quad X = 1 / (2A) \quad (4)$$

Po elementarnych przekształceniach z (3) i (4) otrzymuje się

$$f(x) = A(1 + \cos 2\pi x A) \equiv 2A \cos^2(\pi x A) \quad (5)$$

Z (5) wynika, że dla  $A=B$  funkcja (3) jest  $\cos^2(\cdot)$  o amplitudzie  $2A$  i mniejszym o połowę argumentem.

Ten szczególny przypadek rozkładu +COS zaproponowaliśmy nazywać rozkładem  $\text{COS}^2$ . Jego parametry  $A$  i  $X$  są powiązane według (3) i wystarczy znaleźć tylko jeden z nich. Podobnie jak rozkład Gaussa jest to rozkład dwuparametrowy. Określa go wartość średnia i parametr charakteryzujący rozrzut np.  $X$  (połowa rozstępu) lub amplituda  $A$ .

Rozkład skumulowany CPDF, czyli **dystrybuantę** rozkładu otrzymuje się z całki  $f(x)$  jako pole pod krzywą w funkcji  $x$ . Dla rozkładu  $\text{COS}^2$ , tj. gdy  $A=B$ ,  $X=1/(2A)$ , opisuje ją przedstawiona na rys. 1 dość prosta funkcja

$$F(x) = \frac{1}{2} \left( \frac{x}{X} + 1 \right) + \frac{1}{2\pi} \sin \pi \frac{x}{X} \Big|_{-X \leq x \leq X} \quad (6)$$

W tabeli 1 podano wartości dystrybuanty  $F(x)$  o przebiegu jak na rys. 1, wyznaczone z (6) dla 21 wartości argumentu  $x/X$ .

Tab. 1. Wartości dystrybuanty rozkładu COS<sup>2</sup>  
Tab. 1. COS<sup>2</sup> distribution values

$x/X$	-1	-0,9	-0,8	-0,7	-0,6	-0,5	-0,4	-0,3	-0,2	-0,1	0
$F(x)$	0	0,001	0,006	0,021	0,049	0,091	0,149	0,221	0,307	0,401	0,5
$x/X$	1	0,9	0,8	0,7	0,6	0,5	0,4	0,3	0,2	0,1	0
$F(x)$	1	0,999	0,994	0,979	0,951	0,909	0,851	0,780	0,694	0,599	0,5

Odchylenie standardowe dla rozkładów COS<sup>2</sup> (rys. 1 i 2)

$$\sigma = \sqrt{\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x) dx} = \sqrt{\int_{-X}^{+X} x^2 A \cos^2(\pi x A) dx} \quad (7)$$

Po rozwiązaniu, lub z (2a) dla  $A=B$  otrzymuje się prosty wzór:

$$\sigma_{+cos} = X \sqrt{\frac{1}{3} - \frac{2}{\pi^2}} = \frac{1}{2A} 0,3615 \quad (8)$$

Jeżeli znana jest wartość  $X$  lub  $A$ , to z (8) można bezpośrednio wyznaczyć powiązaną z nimi wartość  $\sigma_{+cos}$ , lub na odwrót.

Na przykład jeżeli  $\sigma_{+cos} = 1$ , to  $A=0,1808$  i  $X=2,766$ , lub też, gdy dany jest zakres  $X$ , np.  $X=2,5$  to z (8)  $\sigma_{+cos} = 0,9060$ .

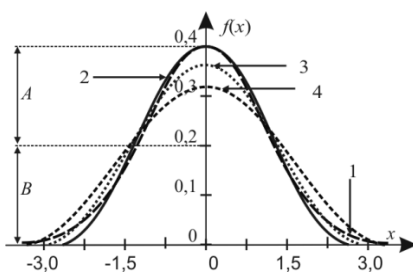
Współczynniki  $k_{PC}$ , dla poziomu ufności **niepewności rozszerzonej** rozkładu COS<sup>2</sup> o prawdopodobieństwie  $P$  i liczby obserwacji  $n > 10$ , podano w Tab. 2. Dla  $n \leq 10$  należy stosować nieco wyższe wartości tych współczynników, zbliżone jak przy rozkładzie Studenta-Gosseta.

Tab. 2. Współczynniki  $k_{PC}$  rozkładu COS<sup>2</sup> dla niepewności rozszerzonych  
Tab. 2. Coefficients  $k_{PC}$  of COS<sup>2</sup> distribution for expanded uncertainty

$P$ (%)	50	68,3	90	95	99	99,7	100
$k_{PC}(x/X)$	0,265	0,385	0,596	0,683	0,816	0,878	1

### 4. Porównanie rozkładów Normalnego i COS<sup>2</sup>

Rozkład + COS i jego szczególna postać COS<sup>2</sup> jest rozkładem niegaussowskim o ograniczonym rozstępie, czyli zakresie rozrzutu wyników pomiarowych. Kilka przypadków rozkładu COS<sup>2</sup> podano na rys 2 wraz ze znormalizowanym rozkładem Normalnym N(0,1) - krzywa 1, czyli o odchyleniu standardowym  $\sigma = 1$ .



Rys. 2. Funkcje gęstości prawdopodobieństwa (PDF):  
1 – znormalizowany rozkład Gaussa, N(0,1) oraz trzy rozkłady COS<sup>2</sup> o równaniu  $f(x) = A \cos^2 \pi Ax$ , styczne do osi  $x$  i o polu 1, tj.:  
2 – krzywa przechodząca przez wierzchołek funkcji Gaussa,  
3 – o standardowym odchyleniu  $\sigma_{+cos} = 1$ ,  
4 – propozycja Greena [8]  $f_{GR}(x) = A/1/2\pi$

Fig. 2. Probability density functions PDF:  
1 – N(0,1) Normal distribution (Gauss) and three distributions COS<sup>2</sup>, given by equation  $f(x) = A \cos^2 \pi Ax$ , tangent to axis  $x$  and covering area of 1,  
2 – the curve crossing across top of function Gauss,  
3 – curve of which standard deviation equals 1,  $\sigma_{+cos} = 1$ , and  
4 – Green suggestion [8]  $f_{GR}(x)$  of which  $A=1/2\pi$

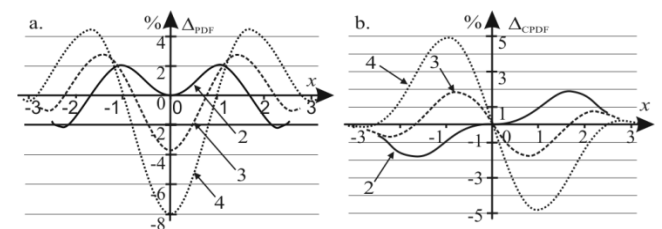
Dla krzywej nr 2 stycznej do wierzchołka rozkładu N(0,1)

$$A = \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} = 0,19947 \quad \text{ i } \quad X = \sqrt{2\pi} \approx 2,5$$

Wartości  $A$  można wyznaczyć też dla założonych zakresów  $2X_{opt}$ , równych lub mniejszych od okresu  $2X$  funkcji (4) przy przybliżeniu funkcji  $\cos^2$  do histogramu danych eksperymentalnych w różny sposób, np.: według kryterium minimum sumy kwadratów różnic lub modułów różnic (metody MNK i MNM), przybliżaniu do krzywej otrzymanej po uporządkowaniu obserwacji według ich wartości, bądź też do ich PDF lub CPDF. Z symulacji wynikało, że wszystkie tak otrzymane funkcje optymalne  $\cos^2$  przecinają oś  $y$  na wysokości mniejszej niż wierzchołek rozkładu Gaussa dobranego dla tych samych danych [5-7].

Abby porównać przebieg rozkładu COS<sup>2</sup> z funkcją Gaussa dokonano ich wzajemnej aproksymacji opisanej szczegółowo w [5-7]. Znalaziono parametry kilku wariantów rozkładu +COS minimalizując różnice pomiędzy obu krzywymi w zadanym arbitralnie przedziale spełniającym warunek  $X_{opt} \leq X_T$  na osi  $x$  (lub odpowiadającym mu przedziale na osi  $y$ ), np. dla odchylenia standardowego funkcji Gaussa  $\pm 2\sigma$ ,  $\pm 2,5\sigma$ . Dla znormalizowanego rozkładu Gaussa o  $\sigma=1$  były to przedziały  $\pm 2$ ,  $\pm 2,5$ . Wykorzystano metodę dwuparametrową MKM znajdując  $A$  i  $B$  dla minimum kwadratu różnicy pomiędzy krzywymi, lub też jeden z tych parametrów, np.  $A$ , wybrany tak, by krzywa przechodziła przez zadany punkt, np. wierzchołek rozkładu Gaussa, bądź by były jednakowe odchylenia standardowe  $\sigma$  obu funkcji. **Dokładność przybliżenia** określono z różnic pomiędzy PDF lub dystrybuantami CPDF obu rozkładów przez odchylenie średnie standardowe oraz maks. i min ( $\pm$ ) lokalnych odchylenia.

Różnice  $\Delta_{PDF}$  i  $\Delta_{CPDF}$  trzech funkcji COS<sup>2</sup> z rys. 2 i znormalizowanego rozkładu Gaussa N(0,1) podano na rys. 3a, b.



Rys. 3. a) Różnice  $\Delta_{PDF}$  rozkładów COS<sup>2</sup> nr 2, 3, 4 z rys 2 i rozkładu Normalnego N(0,1), tj. o  $\sigma = 1$ ;  
b) Różnice  $\Delta_{CPDF}$  skumulowanych rozkładów COS<sup>2</sup> nr 2, 3, 4 i Normalnego N(0,1)

Fig. 3. a) Differences of  $\Delta_{PDF}$  for COS<sup>2</sup> no 2, 3, 4 of Fig 2 vs. Normal N(0,1);  
b) Differences of  $\Delta_{CPDF}$  cumulative distributions COS<sup>2</sup> no 2, 3, 4 vs. N(0,1)

Różnice  $\Delta_{PDF}$  rozkładu COS<sup>2</sup> w postaci krzywej 2, jak również  $\Delta_{CPDF}$  jej dystrybuanty nie przekraczają  $\pm 2,1\%$ . Natomiast  $\Delta_{PDF}$  krzywej 3 rozkładu COS<sup>2</sup> o tym samym odchyleniu standardowym  $\sigma = 1$ , zmienia się w nieco większym zakresie ( $-3,7\%$ ,  $+2,8\%$ ), ale nawet tę niedokładność można zaakceptować w większości przypadków szacowania niepewności typu A. Na rys. 3a,b podano też dla porównania parametry charakteryzujące funkcję  $f_{GR}(x)$  zaproponowaną przez Greena i opisaną w [8]. Krzywa ta ma  $A=1/(2\pi)$  i odchylenie standardowe  $\sigma_{+cos} \approx 1,14$ . Różnice  $\Delta_{PDF}$  i  $\Delta_{CPDF}$  - krzywe 4 na rys. 3a,b pomiędzy  $f_{GR}(x)$  i znormalizowaną funkcją Gaussa są znacznie większe niż dla funkcji COS<sup>2</sup> nr 3 przechodzącej przez wierzchołek rozkładu Normalnego i dochodzą do  $+4,5\%$  i  $-8,1\%$ . Są to wartości nie do zaakceptowania dla większości pomiarów w pracach naukowych i badaniach technicznych.

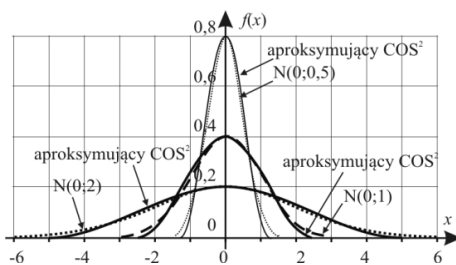
Najlepsza jest zbieżność  $\approx \pm 0,01$  z rozkładem Gaussa dla rozkładu +COS o podniesieniu  $B > A$  i przy optymalnie dobranych dwu parametrach  $A$  i  $B$  [5-7]. Różnice są dwukrotnie mniejsze niż dla najlepszego COS<sup>2</sup>. Jednak przebieg takiego rozkładu, podobny do obciętych krzywych Gaussa, jest niewygodny w użyciu.

Każdy inny rozkład Normalny, tj. o dowolnym odchyleniu standardowym  $\sigma_i$ , może być również aproksymowany przez odpowiedni rozkład  $\text{COS}^2$  o  $A_i=B_i$  i  $X_i=1/(2A_i)$  według takich przypadków jak w kolumnach 2 - 6 Tab. 3. Z zależności (8) wynika:

$$A_i \sigma_i = A \quad i \quad X_i \sigma = X \sigma_i \quad (9)$$

Trzy PDF funkcji  $\text{COS}^2$  aproksymujących funkcje Gaussa o odchyleniach standardowych  $\sigma_i=(0,5; 1; 2)$  podano na rysunku 4.

Do wyznaczeniu rozszerzonej niepewności pomiarów trzeba dokonywać splotu rozkładów opisujących poszczególne składowe niepewności wypadkowej, czyli ich konwolucji, gdyż tylko splot samych funkcji Gaussa zachowuje ten sam kształt i niepewność rozszerzoną można wyznaczyć na podstawie wypadkowego odchylenia standardowego. Odchylenie standardowe SD splotu dwu nieskorelowanych rozkładów wynosi



Rys. 4. Rozkłady Normalne o zerowej wartości średniej,  $\sigma=(1/2, 1, 2)$  i odpowiadające im rozkłady  $\text{COS}^2$  wyznaczone metodą najmniejszych kwadratów

Fig. 4. Normal distribution functions of mean value equal zero and  $\sigma=(1/2, 1, 2)$  and relevant the best fitting  $\text{COS}^2$  distributions obtained by MSM method

$$\sigma_* = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2} \quad (10)$$

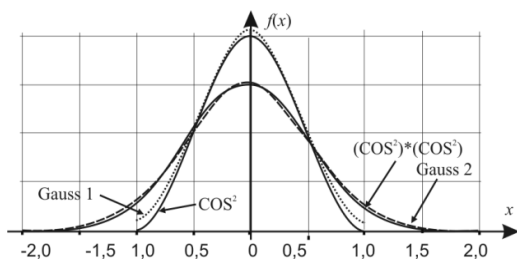
gdzie:  $\sigma_*$ ,  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$  – odchylenia standardowe.

Dla splotu dwu rozkładów  $\text{COS}^2$  otrzymuje się

$$\sigma_{2+(\text{COS})^*} = \sqrt{\sigma_{\text{COS}^2 1}^2 + \sigma_{\text{COS}^2 2}^2} = 0.3615 \sqrt{X_{\text{COS}^2 1}^2 + X_{\text{COS}^2 2}^2} \quad (11)$$

Jako przykład na rys. 5 przedstawiono splot dwu jednakowych rozkładów  $\text{COS}^2$ , czyli funkcji  $f(x)=A(1+\cos 2\pi xA)$  o parametrach:  $-X \leq x \leq +X$ ,  $A = B = 0,2$ ,  $X = 2,5$ ,  $\sigma_{\text{COS}^2} = 0,904$ ,  $\sigma = 0,997$ , kurtosis<sup>1</sup>  $E = 2,4$  (taki jak dla PDF trójkątnego).

Taki splot ma zakres  $4X=10$ , SD:  $\sigma_{2(\text{COS}^2)^*} = 1,28$ , Kurtosis (eksces)  $E=2,71$  i odchylenie standardowe  $\sigma_{\text{Best Gauss}} = 1,33$ .

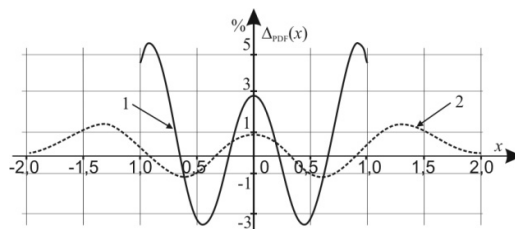


Rys. 5. Rozkłady PDF: 1 -  $\text{COS}^2$  i 3 - splotu dwu jednakowych funkcji  $\text{COS}^2$ ; 2 - i 4 - PDF-y najbardziej zbliżonych do nich rozkładów Gaussa

Fig. 5. PDF-s of: 1 -  $\text{COS}^2$  and 3convolution of two the same  $\text{COS}^2$ ; and curves 2- and 4 - the best fitting Gauss distributions (dotted line)

<sup>1</sup> Kurtosis  $E$  (eksces) jest stosunkiem momentu centralnego 4-go rzędu i standardowego odchylenia rozkładu i ocenia smukłość względem rozkładu Normalnego o  $E=3$ .

Splot dwu funkcji  $\text{COS}^2$  jest zbliżony do rozkładu Normalnego jeszcze bardziej niż pojedyncza funkcja  $\text{COS}^2$ . Z rys 6 wynika, że odchylenie standardowe różnicy tego splotu i odpowiadającego mu rozkładu Normalnego jest dwukrotnie mniejsze niż dla pojedynczego  $\text{COS}^2$ , tj. odpowiednio  $\Delta_{PDF} = (0,11; 0,22) \%$ .



Rys. 6. Różnice  $\Delta_{PDF}$  rozkładów Gaussa i  $\text{COS}^2$  (1) oraz ich splotów (2)  
Fig. 6.  $\Delta_{PDF}$  differences of Gauss and  $\text{COS}^2$  (1), and their convolutions (2)

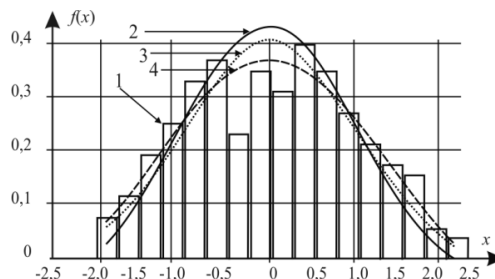
### Przykład 1. Oszacowanie niepewności próbki według rozkładów Normalnego i $\text{COS}^2$

Z wygenerowanej cyfrowo populacji pobrano losowo próbkę o  $n=200$  nieskorelowanych wartościach  $x_i$  symulujących niezależne od siebie statystycznie obserwacje pomiarowe. Przy zastosowaniu dwu modeli PDF, rozkładu Normalnego i  $\text{COS}^2$ , wyznaczono wynik pomiaru w postaci wartości mierzand i jej niepewności rozszerzonej  $U(k_p)$  o określonym prawdopodobieństwie  $P$  dla przypadku, gdy niepewność  $u_B$  jest pomijalna.

Splot rozkładu  $\text{COS}^2$  z różnymi innymi PDF daje wyniki bardzo zbliżone do splotu funkcji Gaussa z tymi samymi PDF. Najlepszym estymatorem dla obu modeli rozkładów jest wartość średnia  $\bar{x}$  próbki. Jej niepewności, standardowa i rozszerzone, będą różne dla obu rozkładów. Przy pomijalnej niepewności składowej  $u_B$  wyznacza się je statystycznie i tylko na podstawie danych eksperymentalnych. Dla rozkładu Gaussa zastosuje się zalecenia Przewodnika GUM o szacowaniu niepewności  $u_B$ , zaś dla rozkładu  $\text{COS}^2$  – opisane powyżej zależności (4), (7) - (9) i wykorzystają się wartości funkcji z Tabel 1 i 2. Oba te modele można zastosować do wyznaczania niepewności pomiaru, gdyż na poziomie istotności  $\alpha=0,05$  spełniają test Kołmogorowa jak i  $\chi^2$ .

Na rys. 7 przedstawiono:

1. histogram o  $j=17$  przedziałach o wysokościach  $h_j$  jako stosunkach liczb zawartych w nich odchylen od wartości średniej próbki do liczby  $n$  wszystkich danych  $n_i$ ,
2. funkcję Gaussa o odchyleniu standardowym próbki  $S(x_i)=0,978$
3. funkcję  $\text{COS}^2$  o półzakresie  $X_0=2,31$  jako odległości pomiędzy wartością średnią  $\bar{x} = 0$  i najdalszym od niej wynikiem  $x_{iMAX}$
4. funkcję  $\text{COS}^2$  o  $X_2=2,71$  wyznaczonym według (9) ze standardowego odchylenia próbki  $S(x_i)$



Rys. 7. Rozkłady dla analizowanego przykładu próbki symulującej dane pomiarowe: 1- histogram o 17 przedziałach wysokości  $h_j$ , 2 - jej PDF Gaussa i dwa PDF-y  $\text{COS}^2$ : 3 - o półzakresie  $X_0$  do najdalszej obserwacji  $x_n$ , 4 - o zakresie  $2X_2$  dla SD próbki

Fig. 7. Distributions of analyzed sample of simulated data: 1- Histogram of 17 bins of  $h_j$ , 2 - their Gauss PDF and two PDFs  $\text{COS}^2$ : 3 - of half range  $X_0$  to the most distant observation  $x_n$ , 4 - of half range  $2X_2$  for SD of sample

Odległość pomiędzy krańcowymi odchyleniami  $x_{iMAX} - x_{iMIN}$ , próbki wynosi 4,22.

Dla wartości średniej  $\bar{x}$  próbki w Tabeli 3 podano jej niepewności rozszerzone  $U$  (przy  $u_B \ll u_A$ ) o kilku poziomach ufności  $k_P$  (prawdopodobieństwach  $P=k_P$ ) dla rozkładów Gaussa i  $COS^2$ .

Stopień przybliżenia każdego z rozkładów do danych próbki oceniono popularnym testem zgodności  $\chi^2$ . Dla próbki o  $n=200$  pomiarach i histogramu o 17 przedziałach otrzymuje się:

$$\chi^2 = 200 \sum_{j=1}^{17} \frac{(h_j - p_j)^2}{p_j} \quad (12)$$

Wysokości  $h_j$  przedziałów histogramu są ułamekami  $n_j/n$  zawartych w nich danych eksperymentalnych i danych próbki.

Przy półzakresie  $X_0=2,11$ , równym odstępowi od wartości średniej do dalszego z krańców histogramu, test  $\chi^2$  dla  $COS^2$  był negatywny i aby go spełnić półzakres rozszerzono do  $X_1=2,31$ .

Jeszcze lepszy wynik tego testu dla  $COS^2$  niż dla Gaussa uzyskano dla większego półzakresu  $X_2=2,71$ , który odpowiada odchyleniu standardowym próbki  $S(x_i)=0,978$ . Dla trzech rozpatrywanych rozkładów wyznaczono również różnice wysokości  $h_{x_j}$  przedziałów histogramu i prawdopodobieństw dla środkowych ich punktów  $x_j$  oraz odchylenia standardowe tych różnic, podane jako  $u_A(U)$  w ostatnim wierszu Tabeli 3.

Tab. 3. Niepewności rozszerzone  $U$  o poziomach ufności  $k_P$  dla wartości średniej próbki

Tab. 3. Expanded uncertainties  $U$  of confidence levels  $k_P$  for mean value of the sample

Poziom ufności $P$	$COS^2(0, X_i)$			$N(0, \sigma)$
	współczynnik rozszerzenia $k_{PC}$	$X_1=2,31$	$X_2=2,71$	$S(x_i)=0,978$
	niepewność rozszerzona $\pm U$			
0,500	0,265	0,043	0,051	0,047
0,683	0,385	0,063	0,074	0,069 ( $u_A$ )
0,900	0,596	0,097	0,114	0,114
0,950	0,683	0,112	0,131	0,136
0,990	0,816	0,133	0,156	0,178
0,997	0,878	0,143	0,168	0,205
1	1	0,163	0,192	$\infty$
Kryterium $\chi^2$	$\chi^2_{14,0,05} = 23,7$	19,5	6,05	7,98
$u_A(U) = \sqrt{\sum (f(x_j) - h_j)^2 / (n-1)}$		0,071	0,012	0,016

Wynikiem pomiaru jest wartość średnia próbki  $\bar{x}$  wraz z oceną jej dokładności przez niepewność rozszerzoną  $U$  o wymaganym prawdopodobieństwie  $P$ , tj.:

$$x = \bar{x} \pm U$$

gdzie:  $U$  - niepewność rozszerzona o prawdopodobieństwie  $P=k_P$ .

Przy założeniu pomijalnej niepewności typu B, otrzymano: **według modelu Gaussa** dla  $P = 0,997$  :

$$x = \bar{x} \pm k_{PG} \frac{S(x_i)}{\sqrt{n}} = \bar{x} \pm 0,205$$

**według modelu  $COS^2$**  dla  $P = 0,997$  :

$$x = \bar{x} \pm k_{PC} \frac{X_1}{\sqrt{n}} = \bar{x} \pm 0,143 \quad \text{lub} \quad x = \bar{x} \pm k_{PC} \frac{X_2}{\sqrt{n}} = \bar{x} \pm 0,192$$

Oba warianty rozkładu  $COS^2$  są lepszymi modelami dla rozkładu danych eksperymentalnych rozpatrywanej próbki niż rozkład Gaussa. Np. niepewność rozszerzona o poziomie prawdopodobieństwa 0,997 dla modelu Gaussa jest o 43,4 % większa niż dla  $COS^2$  o półzakresie  $X_1$ , lub o 22% - przy półzakresie  $X_2$ . Ponadto

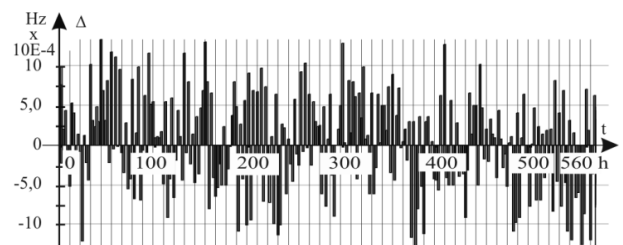
dla modeli  $COS^2$  można podać przedział, wewnątrz którego wartość średnia  $\bar{x}$  znajduje się z prawdopodobieństwem 1. Jest on równy zakresowi  $2X_i$  tego rozkładu. Dla tego przykładu wynosi on  $\pm(2,36$  lub  $2,78) u_A$  według modelu Gaussa.

Test  $\chi^2$  jest niezbyt korzystny dla rozkładów o ograniczonym zakresie PDF i stopniowo narastających brzegach, tj. takich jak trapez i  $COS^2$ . Gęstości prawdopodobieństwa  $p_i$  punktów bliższych ich krańcom są małe, a ich składniki w teście  $\chi^2$  według (12), wskutek dużych współczynników wagi  $1/p_i$ , zbyt dominujące. Lepiej jest stosować inne kryteria do oceny rozbieżności modelu rozkładu i danych eksperymentalnych, np. test Kołmogorowa-Smirnowa.

**Przykład 2. Ocena dokładności synchronizacji częstotliwości w telekomunikacji**

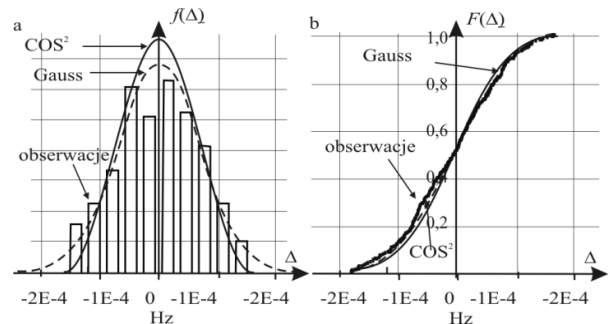
Przykład ten pokazuje przypadek spotkany już w praktyce metrologicznej, gdy rozkład  $COS^2$  lepiej odwzorowywał rzeczywiste obserwacje pomiarowe niż rozkład Normalny. Są to wyniki badań stabilności częstotliwości generatora wzorcowego dużej częstotliwości stosowanego w telekomunikacji.

Transmisja sygnałów cyfrowych w sieci telekomunikacji wymaga bardzo dokładnych zegarów. Przykład dotyczy pomiarów kalibracji wzorca czasu w urządzeniu telekomunikacyjnym zapewniającym ich synchronizację. Badaniom stabilności podlegały zegary kwarcowe, wzorcem był pierwotny wzorec czasu z oscylatorem cezowym zapewniającym dokładność 5·E-12. Pomiary wykonywano w odstępach co 2 godziny. Odchyłki od wartości średniej 2,048 MHz przedstawiono na rys. 8. Z 281 obserwacji wykluczono dwie, gdyż były obciążone błędem nadmiernym, pozostałe 279 poddano dalszej obróbce. W zebranych wynikach obserwacji nie wykryto żadnych wpływów periodycznych lub aperiodycznych i nie stwierdzono też autokorelacji wyników.



Rys. 8. Błędy pozorne synchronizacji częstotliwości generatorów w funkcji czasu  
Fig. 8. Apparent errors of generators frequency vs. time

Na rys. 9a przedstawiono histogram oraz aproksymujące go dwa modele funkcji gęstości prawdopodobieństwa: konwencjonalny- funkcja Gaussa i funkcja  $COS^2$ .



Rys. 9. a) Histogram błędów pozornych oraz odpowiadający im model Gaussa i  $COS^2$  wyznaczone metodą najmniejszych kwadratów  
b) Skumulowany histogram błędów pozornych oraz odpowiadający im model Gaussa i  $COS^2$

Fig. 9. a) Histogram of apparent errors and relevant Gaussian and  $COS^2$  models calculated based on minimal square error method  
b) Cumulative histogram of apparent errors of Gauss and  $COS^2$  models

Na rys. 9b zaprezentowano odpowiadające tym modelom skumulowane funkcje gęstości prawdopodobieństwa. Oba te modele można zastosować do wyznaczania niepewności pomiaru, gdyż na poziomie istotności  $\alpha=0,05$  spełniają test Kołmogorowa jak i  $\chi^2$ .

W tabeli 4 zestawiono wartości niepewności  $U_{\text{COS}^2}$  i  $U_{\text{Gauss}}$  obliczone przy zastosowaniu modelu  $\text{COS}^2$  i Gaussa, wraz z ich współczynnikami rozszerzenia dla poziomów ufności  $p$  w pierwszej kolumnie. Procentową różnicę pomiędzy niepewnościami według modelu  $\text{COS}^2$  w stosunku do modelu Gaussa, odniesioną do  $U_{\text{COS}^2}$  podano w kolumnie 6. Stosując moduł rozpięcia jako zakres cosinusoidy otrzymano węższy przedział niepewności. Różnica jest wyraźniejsza przy wyższych poziomach ufności i została obliczona na podstawie zależności:

$$\Delta = \frac{U_{\text{Gauss}} - U_{\text{COS}^2}}{U_{\text{COS}^2}} 100 \quad [\%]$$

Tab. 4. Porównanie niepewności rozszerzonej częstotliwości generatora wzorcowego przy stosowaniu modelu Gaussa i  $\text{COS}^2$

Tab. 4. Uncertainty comparison of standard generator frequency obtained for Gaussian and  $\text{COS}^2$  models

$p$	$k_{p\text{COS}^2}$	$U_{\text{COS}^2}$ , Hz	$k_{p\text{Gauss}}$	$U_{\text{Gauss}}$ , Hz	$\Delta$ , %
0,5	0,265	2,08E-06	0,675	2,38E-06	15
0,683	0,385	3,02E-06	1	3,53E-06	17
0,9	0,596	4,67E-06	1,65	5,80E-06	24
0,95	0,683	5,35E-06	1,96	6,92E-06	29
0,99	0,816	6,40E-06	2,58	9,09E-06	41
0,997	0,878	6,88E-06	2,97	1,05E-05	52
1	1	7,84E-06			

## 5. Wnioski i podsumowanie

Ograniczony zakres rozrzutu wartości danych otrzymywanych w badaniach eksperymentalnych i statystyce stosowanej uzasadnia opisywanie ich modelami odpowiednio dobranych rozkładów niegaussowskich. Można wówczas dokładniej oszacować składową statystyczną niepewności wyniku wartości mierzonej niż metodą statystyczną typu A według Przewodnika GUM [1]. W pracy, podano wyniki badań zastosowania niekonwencjonalnego modelu rozkładu gęstości prawdopodobieństwa (PDF) w postaci jednego okresu podniesionej cosinusoidy, oznaczonej jako rozkład +COS. Oto wnioski:

- Najprostszą postacią rozkładu +COS uzyskuje się w przypadku szczególnym, gdy podniesienie cosinusoidy równa się jej amplitudzie, czyli dla funkcji  $\cos^2(\cdot)$ . Granicznymi wartościami rozstępu rozkładu są wówczas punkty styczności jej sąsiednich minimumów z osią  $x$ . Ta postać rozkładu, oznaczona symbolem  $\text{COS}^2$ , pozwala uniknąć niedogodności opisu danych rzeczywistych przez wykładniczą funkcję Gaussa przebiegającą w nieskończonym przedziale wartości  $\pm \infty$ .
- Z badań symulacyjnych wynika, że dla rozkładu  $\text{COS}^2$  można tak zoptymalizować jego zakres  $2X$  (czyli rozstęp rozkładu) i związaną z nim jednoznacznie amplitudę  $A$  cosinusoidy, że różnica z rozkładem Normalnym w przedziale  $\pm 2,5\sigma$  nie przekroczy  $\pm 2,1\%$ . Dla mniejszych przedziałów dokładność przybliżania obu rozkładów jest nawet nieco większa [5-7].
- Dla cosinusoidy podniesionej o nieco więcej niż jej amplituda, tj. o  $B > A$ , przybliżenie jest jeszcze dwukrotnie dokładniejsze, ale taka funkcja, podobnie jak obcięty na krańcach rozkład Normalny, ma pionowe odcinki ograniczające i jej opis analityczny jest zbyt skomplikowany.
- Sploty rozkładów  $\text{COS}^2$  i Normalnego z innymi rozkładami są podobne, a zależności - dość proste.
- Wykorzystanie modelu  $\text{COS}^2$  w obliczeniach niepewności jest łatwe. Dwa parametry: wartość średnią i rozstęp, dobiera się odpowiednio do danych eksperymentalnych. Nie wymagane jest nawet tworzenie histogramu oraz wyznaczanie odchylenia standardowego ze wszystkich pomiarów wzorem o postaci

pierwiastka, jak dla rozkładu Gaussa. Można też nie stosować komputera i rozbudowanych tablic.

- Proces szacowania niepewności rozszerzonej przebiega następująco: należy określić wstępnie zakres  $2X_i$  funkcji  $\text{COS}^2$ , nieco szerszy niż według krańcowych wartości rozrzutu pomiarów i sprawdzić czy przy tej wartości  $X_i$  spełnione jest wybrane kryterium dla różnic rozkładu  $\text{COS}^2$  i danych eksperymentalnych. Jeśli tak, to następnie, mnożąc wartość  $X_i$  poprzez odpowiedni współczynnik z Tabel 2 lub 4 uzyskuje się wartość niepewności rozszerzonej o zadanym prawdopodobieństwie, w tym też równym 1 dla  $2X_i$ , gdyż przedziały o określonym prawdopodobieństwie są powiązane stałymi współczynnikami z okresem funkcji  $\cos^2(\cdot)$ .
- Przydatność rozkładu  $\text{COS}^2$  w praktyce zilustrowano Przykładem 1 wyznaczenia niepewności dla symulowanej próbki danych zaczerpniętych z populacji losowej. Uzyskano dokładniejsze oszacowanie niepewności typu A niż według zaleceń przewodnika GUM opartych na funkcji Gaussa.
- W Przykładzie 2 zaczerpniętym z praktyki metrologicznej otrzymano, że rozkład  $\text{COS}^2$  lepiej odwzorowuje rzeczywiste obserwacje pomiarowe niż rozkład Normalny. Były to wyniki badań stabilności częstotliwości generatora wzorcowego o wysokiej częstotliwości, stosowanego w telekomunikacji.
- Przyjęty w przykładzie 2 model  $\text{COS}^2$  spełniał zarówno test Kołmogorowa-Smirnowa jak i  $\chi^2$  lepiej niż rozkład Normalny. Można więc było stosować go do szacowania niepewności wyniku pomiarów. Otrzymano dla  $P=0,95$  o kilkanaście % mniejszą niepewność rozszerzoną niż typu A według GUM opartą na funkcji Gaussa. Uzyskany węższy przedział niepewności, tym bardziej różni się od przedziału według modelu Gaussa, im wyższy jest poziom ufności. Istnieje też przedział o prawdopodobieństwie 1.
- Rozkład  $\text{COS}^2$  jest łatwiejszy do wyznaczania niż Normalny. Można go zastosować też w programalnych inteligentnych przyrządach i przetwornikach do pomiaru chwilowych wartości rozszerzając ich funkcje o automatyzację wyznaczania na bieżąco wartości średniej lub innego estymatora mezurandu, jego trendu, i parametrów rozrzutu wyników wraz z ciągłą oceną niepewności oraz odpowiednią formą prezentacji [3].

## 6. Literatura

- [1] Guide to the expression of uncertainty in measurement (GUM) OIML 1993. Polskie tłumaczenie J. Jaworskiego: Wyrażanie Niepewności Pomiaru. Przewodnik, Główny Urząd Miar, Alfavero 1999 i 2002.
- [2] Supplement 1 Propagation of distributions using a Monte Carlo method. OIML G1-101 Ed. 2007.
- [3] Korczyński M.J., Warszawa Z.L.: A New Instrument Enriched by Type A Uncertainty Evaluation. Proc. of 16th IMEKO TC4 International Symposium in Florence, 22-24 Sept. 2008, paper 1181.
- [4] Korczyński M. J., Cox M., Harris P.: Convolution and uncertainty evaluation. In: Advanced mathematical and computational tools in metrology, VII Vol. 2006; ISBN 981-256-674, p. 188-195.
- [5] Warszawa Z. L., Korczyński M. J.: Podniesiona cosinusoida jako model rozkładu gęstości prawdopodobieństwa. Materiały konferencji: Podstawowe Problemy Metrologii PPM'09, Sucha Beskidzka, Maj 2009, Polska Akademia Nauk, oddział w Katowicach, Prace Komisji Metrologii, seria Konferencje nr 14, str. 116-121.
- [6] Warszawa Z. L., Korczyński M. J., Galovska M.: Shifted up cosine function as model of probability distribution. Proceedings of IMEKO World Congress Fundamental and Applied Metrology. September 6-11, 2009, Lisbon, Portugal, paper no 530, p. 2417-22.
- [7] Warszawa Z. L., Korczyński M. J.: Shifted up cosine function as unconventional model of probability distribution. Journal of Automation, Mobile Robotics & Intelligent Systems (JAMRIS) vol. 4, N° 1 2010, p. 49-55.
- [8] Raab D. H., Green E. H.: A cosine approximation to the normal distribution, Psychometrika vol.26, no 4, 1961, p. 447-50.