

**Waldemar MORZUCH**

POLITECHNIKA WROCLAWSKA, WYDZIAŁOWY ZAKŁAD WYTRZYMAŁOŚCI MATERIAŁÓW PRZY WYDZIALE MECHANICZNYM  
ul. Smoluchowskiego 25, 50-370 Wrocław

## Pomiar sztywności skrętnej elementów maszyn przy zastosowaniu interferometrii holograficznej

Dr inż. Waldemar MORZUCH

Ukończył studia na Wydziale Mechanicznym Politechniki Wrocławskiej w 1976r. W roku 1980 uzyskał stopień doktora nauk technicznych na tym samym Wydziale. Obecnie jest adiunktem w Wydziałowym Zakładzie Wytrzymałości Materiałów przy Wydziale Mechanicznym Politechniki Wrocławskiej. Zainteresowania naukowe autora dotyczą zagadnień związanych z interferometrią holograficzną oraz zagadnień związanych ze statecznością dynamiczną układów mechanicznych.



e-mail: waldemar.morzuch@pwr.wroc.pl

### Streszczenie

W wielu konstrukcjach mechanicznych występują elementy poddane skręcaniu. Powyższe elementy powinny charakteryzować się odpowiednią wartością sztywności skrętnej. Sztywność ta może być określona na podstawie pomiaru kąta skręcenia pręta w funkcji momentu skręcającego. Szczegółne trudności występują w przypadku pręta o przekroju niekołowym. W powyższym artykule określono sztywność skrętną elementów maszyn. Oceny tej sztywności dokonano na podstawie pomiaru przemieszczeń pręta skręcanego o przekroju kwadratowym przy użyciu interferometrii holograficznej. Wyznaczono współczynnik sztywności skrętnej pręta zdefiniowany przez autora.

**Słowa kluczowe:** interferometria holograficzna, sztywność.

### Measurement of torsional rigidity of the machine elements with use of holographic interferometry

#### Abstract

Elements subjected to torsion in many mechanical construction are occurred. The elements should be characterized by adequate value of stiffness of torsional rigidity. This stiffness can be determined by the measurement of the rod torsion angle vs. torsion moment function. The particular difficulty appears when the rod section is non-circular. The estimation of the torsional rigidity of machine elements is presented in the paper. The rigidity estimation is based on the displacement measurement of the rod of square section subjected to torsion and bending. The measurements are made by the use of holographic interferometry. The scheme of test stand is shown in Fig. 1. The investigated object is presented in Fig. 2. Based on interferometry striae shown in Fig.3. the coefficient  $\beta$  according to the Saint Venant introduction is determined. In this paper there are presented two methods for determining this coefficient. In the first method the coefficient  $\beta$  based on measurement of angle of the rod is determined. In the second method the bending line of beam is assumed. Finally the equivalent of torsional rigidity  $K_z$  defined by the author is presented.

**Keywords:** holographic interferometry, rigidity.

## 1. Wprowadzenie

W wielu konstrukcjach mechanicznych można spotkać pręty skręcane jako elementy przenoszące znaczne obciążenia. Przykładem mogą być wały, wirniki oraz narzędzia stosowane w obróbce skrawaniem takie jak wiertła, rozwiertaki i inne. O prawidłowej pracy tych elementów w dużej mierze decyduje ich odpowiednia sztywność skrętna. Sztywność tę można ocenić mierząc kąt skręcenia w funkcji momentu skręcającego. Stosunkowo proste i znane zależności otrzymuje się przy skręcaniu prętów o przekroju kołowym. W przypadku skręcania prętów o przekroju niekołowym pojawiają się przemieszczenia wzdłuż osi, powstające w wyniku tzw. deplanacji czyli spaczenia. Przy projektowaniu narzędzi pracujących na skręcanie powstaje problem doboru od-

powiedniej sztywności skrętnej. W artykule zaproponowano ocenę sztywności elementów skręcanych metodą holograficznego pomiaru przemieszczeń na przykładzie skręcania pręta o przekroju kwadratowym.

Przedstawiony tok rozumowania można przenieść na pomiary skręcania prętów o dowolnych przekrojach poprzecznych.

W przypadku prętów o przekrojach kołowych kąt skręcenia  $\varphi$  opisany jest znanym wzorem:

$$\varphi = \frac{M_s \cdot l}{I_0 \cdot G}, \quad (1)$$

w którym:  $M_s$ - moment skręcający,  $l$  - długość pręta,  $G$  - moduł sprężystości poprzecznej materiału pręta,  $I_0$  - biegunowy moment bezwładności przekroju kołowego.

W 1855 r. de Saint-Venant otrzymał zależności opisujące rozkład naprężeń tnących i podał następujący wzór na kąt skręcenia w prętach o przekroju prostokątnym [1]:

$$\varphi = \frac{M_s \cdot l}{\beta a b^3 G}, \quad (2)$$

gdzie:  $a$  - dłuższy bok prostokąta,  $b$  - krótszy bok prostokąta,  $\beta$  - współczynnik, którego wartość jest zależna od stosunku boków prostokąta.

Współczynnik  $\beta$  wprowadzony przez de Saint-Venanta, przy stosunku boków dążącym do nieskończoności, dąży do granicy równej 0,333. Dla przekroju kwadratowego  $\beta=0,141$ .

Ze wzorów (1) i (2) wynika, że dla dowolnego przekroju pręta kąt skręcenia można opisać wzorem [1]:

$$\varphi = \frac{M_s \cdot l}{I_z \cdot G}, \quad (3)$$

w którym:  $I_z$  - zaproponowany przez autora zastępczy moment bezwładności przekroju skręcanego.

Wzory (1) i (2) można zapisać w postaci

$$\varphi = \frac{M_s \cdot l}{K_z}, \quad (4)$$

gdzie:  $K_z$  - wprowadzona przez autora zastępcza sztywność pręta na skręcanie opisana wzorem

$$K_z = G I_z \quad (5)$$

Dla przekroju kołowego  $K_z = G I_0$ , dla przekroju prostokątnego  $K_z = \beta a b^3 G$ .

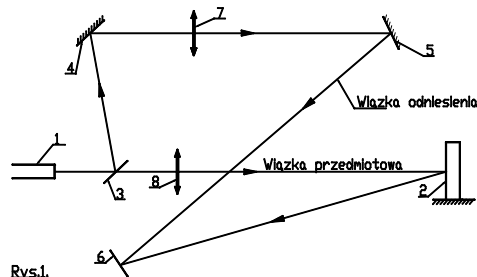
Z powyższych zależności wynika, że znajomość  $\varphi$ ,  $M_s$ ,  $l$  pozwoli na obliczenie zastępczej sztywności pręta na skręcanie  $K_z$ . Sztywność ta może służyć do oceny podatności elementów skręcanych o dowolnych przekrojach poprzecznych.

## 2. Sformułowanie celu pracy

Celem artykułu jest doświadczalne sprawdzenie zależności (2) metodą holograficznego pomiaru przemieszczeń. Badania przeprowadzono metodą skręcania pręta kwadratowego, wykonanego ze stali o długości  $l=203$  mm, o boku przekroju poprzecznego  $a=25$  mm. Duża dokładność metody holograficznej praktycznie uniemożliwia realizację samego skręcania i dlatego z góry założono obciążenie skręcająco-zginające.

### 3. Opis stanowiska badawczego

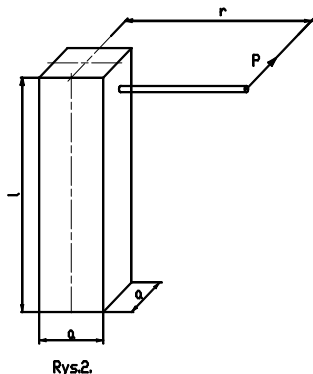
W pomiarach zastosowano stanowisko badawcze przedstawione na rys. 1, którego opis zamieszczono w [3]. Podstawowym elementem stanowiska badawczego jest laser ILA120 firmy CARL-ZEISS-JENA, który jest laserem argonowym, jonowym emitującym światło zielone o długości fali  $\lambda=514,5$  nm.



Rys. 1. Schemat stanowiska badawczego: 1 – laser, 2 – badany obiekt, 3 – płytka dzieląca światło, 4, 5 – zwierciadła, 6 – płytka holograficzna, 7, 8 – soczewki  
Fig. 1. Test stand: 1 – laser, 2 – investigated object, 3 – plate of light division, 4, 5 – mirrors, 6 – holographic plate, 7, 8 – lens

Układ optyczny składa się ze zwierciadeł 3, 4, 5, soczewek 7 i 8 oraz płyty holograficznej 6. Zadaniem tego układu jest wytworzenie wiązki światła laserowego i ich rejestracja.

Obiektem badań jest pręt kwadratowy skręcany i zginany siłą skupioną  $P$ , przedstawiony na rys. 2. Pręt umieszczono w szczękach imadła, przymocowanego śrubami do stołu holograficznego w postaci ciężkiej płyty żeliwnej.



Rys. 2. Badany pręt  
Fig. 2. Investigated rod

### 4. Pomiar przemieszczeń pręta skręcanego i zginanego

Przemieszczenia poprzeczne pręta mierzono za pomocą holograficznej metody dwukrotnej ekspozycji [2, 4, 5]. Metoda ta polega na wykonaniu dwóch naświetleń tej samej płyty holograficznej w dwóch różnych stanach badanego obiektu. Na hologramie zarejestrowane są wówczas dwie fale przedmiotowe, które rozchodziły się od powierzchni obiektu podczas trwania kolejnych naświetleń. Oświetlenie tak wykonanego hologramu wiązką odniesienia powoduje rozchodzenie się za hologramem dwóch zarejestrowanych fal. Fale te, interferując ze sobą, wytwarzają układ prążków zawierających informację o wzajemnej różnicy między zarejestrowanymi stanami.

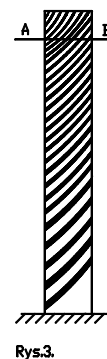
W rozważanym przypadku pierwsze naświetlenie występuje przy braku obciążenia, drugie natomiast po obciążeniu pręta zadaną siłą. Przemieszczenia poszczególnych punktów pręta wyznaczono z następującego wzoru:

$$y = \frac{\lambda}{2} n, \quad (6)$$

gdzie:  $n$  – numer kolejnego prążka, przy czym prążkowi przypisuje się numer o wartości równej zero, gdy występuje na tle punktów, o których wiadomo, że nie uległy przemieszczeniu,  $\lambda$  – długość fali światła spójnego, emitowanego przez laser, wynosząca 514,5 nm.

W przypadku utwierdzenia idealnego, prążek zerowy powinien leżeć na przecię w miejscu utwierdzenia, a kolejny prążek powinien mieć rząd równy jedności. W rzeczywistym przecię utwierdzenie doznaje przemieszczenia i obrotu. Z tego powodu rząd prążka, występującego na utwierdzeniu, jest różny od zerowego.

W dalszej analizie założono, że pierwszy widoczny prążek, leżący na przecię w pobliżu imadła, ma rząd o wartości  $n=1$ . Z zależności (6) wynika, że przy danym obciążeniu, prążki interferencyjne powinny mieć kształt linii ukośnych. Ich przebieg, przeniesiony z odpowiedniej fotografii, przedstawiono na rys. 3.



Rys. 3. Obraz prążków interferencyjnych  
Fig. 3. Image of interferometry striae

Na podstawie obrazu prążków interferencyjnych wyznaczono współczynnik  $\beta$  dwiema metodami:

1. Metoda pierwsza zakłada znajomość siły obciążającej  $P$  i polega na wyznaczeniu współczynnika  $\beta$  na podstawie pomiaru kąta skręcenia  $\varphi$ . Współczynnik ten można wyznaczyć z zależności podanej w [1]:

$$\beta = \frac{M_s \cdot l}{\varphi \alpha^4 \cdot G}, \quad (7)$$

w której  $M_s = P \cdot r$ .

W obliczeniach przyjęto  $P=8,8$  N,  $r=0,137$  m,  $l=0,203$  m,  $\alpha=0,025$  m,  $G=8,4 \cdot 10^4$  MPa.

W celu wyznaczenia kąta skręcenia  $\varphi$  narysowano pomocniczą linię na przecię w przekroju obciążonym siłą  $P$  (linia AB na rys. 3.) Na linii AB obrano odcinek, odpowiadający maksymalnej liczbie prążków. Kąt skręcenia wyznaczono z zależności:

$$\varphi = \frac{\Delta y}{\Delta x}, \quad (8)$$

w której:

$$\Delta y = n \frac{\lambda}{2}, \quad (9)$$

przy czym:  $\Delta x$  - odcinek na linii AB, na którym znajduje się  $n=5$  prążków.

Na podstawie pomiarów z fotografii otrzymano  $\Delta x=23,95$  mm.

Po podstawieniu tych danych do zależności (8) otrzymano kąt skręcenia  $\varphi=0,536 \cdot 10^{-4}$ , którego znajomość umożliwiła obliczenie współczynnika  $\beta$ . Z zależności (7) otrzymano  $\beta=0,142$ .

2. Druga metoda wyznaczenia współczynnika  $\beta$  polega na wykorzystaniu analitycznej postaci linii ugięcia pręta. Równanie osi ugiętej pręta utwierdzonego i obciążonego na końcu siłą skupioną  $P$  ma postać [1]:

$$y = \frac{Plx^2}{6EI} \left( 3 - \frac{x}{l} \right), \quad (10)$$

gdzie: współrzędna  $x$  oznacza odległość danego przekroju pręta od utwierdzenia,  $E$  – moduł sprężystości podłużnej materiału pręta,  $J$  – moment bezwładności przekroju poprzecznego pręta.

Po uwzględnieniu obrotu utwierdzenia, równanie (10) można przedstawić w postaci zmodyfikowanej:

$$y = \frac{Plx^2}{6EI} \left( 3 - \frac{x}{l} \right) + kx. \quad (11)$$

Jeżeli założymy, że współczynnik  $k$  jest niezależny od współrzędnej  $x$ , tzn. od numeru prążka, to współczynnik ten dla odpowiednich numerów prążków  $n$  i  $m$  wzdłuż osi pręta jest wyrażony następującymi wzorami:

$$k = \frac{y_m}{x_m} - \frac{Plx_m}{6EI} \left( 3 - \frac{x_m}{l} \right), \quad k = \frac{y_n}{x_n} - \frac{Plx_n}{6EI} \left( 3 - \frac{x_n}{l} \right) \quad (12)$$

Po porównaniu obu zależności, przedstawionych w (12) otrzymuje się:

$$\frac{Pl}{6EI} = \frac{\left( \frac{y_n}{x_n} - \frac{y_m}{x_m} \right) l}{(x_n - x_m)(3l - x_m - x_n)} = C. \quad (13)$$

Ze wzoru (13) wynika, że na podstawie pomiaru prążków można wyznaczyć stałą  $C$ , dzięki której można obliczyć wartość siły  $P$ . Umożliwia to wyznaczenie współczynnika  $\beta$ . Z zależności (7) otrzymuje się kolejno:

$$\beta = \frac{PrI}{\varphi a^4 G}, \quad (14)$$

gdzie, na podstawie (13):

$$P = \frac{6EIC}{l}, \quad (15)$$

czyli:

$$\beta = \frac{6EICr}{\varphi a^4 G}. \quad (16)$$

Po podstawieniu

$$I = \frac{a^4}{12} \quad \text{oraz} \quad G = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad (17)$$

otrzymuje się:

$$\beta = \frac{(1+\nu)Cr}{\varphi}, \quad (18)$$

gdzie:  $\nu$  - ułamek Poissona materiału pręta.

W celu wyznaczenia stałej  $C$  wzięto pod uwagę dwa prążki:  $n=20$  ( $x_n=208$  mm) oraz  $m=10$  ( $x_m=128$  mm) i wyznaczono ugięcie osi pręta. Po wyznaczeniu  $y_m$  i  $y_n$  z zależności

$$y_m = m \frac{\lambda}{2}, \quad y_n = n \frac{\lambda}{2},$$

otrzymano wartość stałej  $C$  równą  $C=4,3 \cdot 10^{-5} \text{ m}^{-1}$ .

Po przyjęciu ułamka Poissona  $\nu=0,28$  otrzymano, na podstawie zależności (18), wartość  $\beta=0,1406$ .

Jak widać obie metody dają bardzo zbliżone wartości współczynników  $\beta$ . Jest to doświadczalnym potwierdzeniem poprawności ścisłego obliczenia współczynnika dla przekroju kwadratowego przez Saint-Venanta ( $\beta_{\text{teor}}=0,141$ ).

Podatność prętów skręcanych można ocenić za pomocą pewnego parametru  $K_z$ , wprowadzonego przez autora w [3]. Postępując w ten sposób, kąt skręcenia pręta można wyznaczyć ze wzoru:

$$\varphi = \frac{M_s \cdot l}{K_z}, \quad (19)$$

gdzie  $K_z$  jest zastępczą sztywnością pręta na skręcanie, opisaną wzorem:

$$K_z = G \cdot I_z \quad (20)$$

Dla przekroju kołowego  $K_z=GI_0$ , dla przekroju prostokątnego  $K_z=\beta ab^3 G$ . Z powyższych zależności wynika, że znajomość  $\varphi$ ,  $M_s$ ,  $l$  pozwala na obliczenie zastępczej sztywności pręta na skręcanie  $K_z$ . Analogicznie, aby wyznaczyć sztywność pręta na skręcanie w celu wyznaczenia współczynnika  $\beta$ , należy wyznaczyć zastępczą sztywność pręta  $K_z$ . Według pierwszej metody otrzymuje się:

$$K_z = \frac{M_s l}{\varphi}. \quad (21)$$

W ten sposób otrzymano współczynnik  $K_z'$ .

$$K_z' = \frac{PrI}{\varphi} = \frac{8,3 \text{ N} \cdot 0,137 \text{ m} \cdot 0,203 \text{ m}}{0,536 \cdot 10^{-4}}, \quad (22)$$

$$K_z' = 4566 \text{ Nm}^2. \quad (23)$$

Podobnie, według drugiej metody, wyznacza się współczynnik  $K_z''$ .

$$K_z'' = \beta a^4 G = 0,1406 \cdot (0,025 \text{ m})^4 \cdot 8,5 \cdot 10^4 \text{ MPa}. \quad (24)$$

$$K_z'' = 4613 \text{ Nm}^2 \quad (25)$$

Otrzymane wyniki nie różnią się o więcej niż o 1%.

## 5. Podsumowanie

W pracy przedstawiono wyniki badań skręcania pręta o przekroju kwadratowym. Badania eksperymentalne polegały na holograficznym pomiarze przemieszczeń pręta, poddanego skręcaniu ze zginaniem. Pomiar ten umożliwił wyznaczenie kąta skręcenia pręta, a następnie współczynnika  $\beta$ , wprowadzonego przez Saint-Venanta. W analogiczny sposób wyznaczono sztywność zastępczą  $K_z$ , wprowadzoną przez autora. Postępując w podobny sposób można wyznaczyć analogiczne współczynniki dla prętów o innych przekrojach.

## 6. Literatura

- [1] Dyląg Z., Jakubowicz A., Orłoś Z.: Wytrzymałość materiałów. WNT, Warszawa 2003.
- [2] Jagoszewski E.: Holograficzne elementy optyczne. Politechnika Wrocławska, Wrocław 1995.
- [3] Morzuch W.: Holograficzny pomiar przemieszczeń rzeczywistych płyty umożliwiający określenie jej sztywności i sił wewnętrznych. Przegląd Mechaniczny nr 12/1989.
- [4] Orłoś Z.: Doświadczalna analiza odkształceń i naprężeń. PWN, Warszawa 1977.
- [5] Pluta M.: Holografia optyczna. PWN, Warszawa 1980.