

Andrzej KAWALEC, Marek MAGDZIAK

POLITECHNIKA RZESZOWSKA, WYDZIAŁ BUDOWY MASZYN I LOTNICTWA, KATEDRA TECHNIK WYTWARZANIA I AUTOMATYZACJI,  
ul. W. Pola 2, 35-959 Rzeszów

## Porównanie wybranych metod optymalizacji na przykładzie zadania pomiarowego we współrzędnościowej technice pomiarowej

Dr hab. inż. Andrzej KAWALEC

Pracownik naukowo-dydaktyczny Katedry Techniki Wytwarzania i Automatykacji Wydziału Budowy Maszyn i Lotnictwa Politechniki Rzeszowskiej. Wcześniej zatrudniony przez 8 lat w przemyśle lotniczym. Zainteresowania naukowe dotyczą metod numerycznych mechaniki ciał stałych, metod kształtowania metali lekkich, w szczególności stosowanych w technologiach lotniczych, konstruowania i wytwarzania napędów lotniczych, a także współrzędnościowej techniki pomiarowej.



e-mail: ak@prz.edu.pl

Mgr inż. Marek MAGDZIAK

Asystent w Katedrze Techniki Wytwarzania i Automatykacji Wydziału Budowy Maszyn i Lotnictwa Politechniki Rzeszowskiej. W swojej pracy naukowo-dydaktycznej zajmuje się zagadnieniami związanymi z wykorzystaniem metod CAD/CAM/CAI w projektowaniu i wytwarzaniu produktów. Specjalizuje się we współrzędnościowej technice pomiarowej.



e-mail: marekm@prz.edu.pl

### Streszczenie

W artykule przedstawiono porównanie wybranych metod optymalizacji na przykładzie zadania pomiarowego we współrzędnościowej technice pomiarowej, które polega na obliczeniu współrzędnych punktu środka i wartości promienia okręgu dopasowanego metodą najmniejszych kwadratów do grupy punktów pomiarowych. Zastosowanie metody najmniejszych kwadratów wynika z rodzaju wykorzystanego elementu skojarzonego we współrzędnościowej technice pomiarowej. Punkty pomiarowe są wynikiem pomiaru na obrabiarkę sterowaną numerycznie wyposażonej w głowicę pomiarową.

**Słowa kluczowe:** współrzędnościowa technika pomiarowa, pomiar na obrabiarkę.

### Comparison of selected methods of optimization on the example of some measurement task in coordinate measurement technique

#### Abstract

The comparison of selected methods of optimization on the example of some measurement task in coordinate measurement technique is presented in the paper. The task consists of the computation of coordinates of the center and radius of a circle approximating some set of measured points using least squares method. The application of the method follows an approach used in conventional analysis of an associated element in coordinate measurement technique. In the paper both the numerical and experimental investigations were conducted. At the stage of simulation, within the three fundamental conjugate gradients methods (Fletcher-Reeves, Polak-Ribière-Polyak and Hestenes-Stiefel), the best results were obtained using the Polak-Ribière-Polyak method based on the number of iterations made. The aim of experimental investigations was the comparison of the measurement uncertainty components resulting from the repeatability of applied measurement hardware, in the case of using the coordinate measuring machine VISTA and CNC machine tool DMU 80 P duoBLOCK equipped with SINUMERIK 840D control system and MP700 measuring probe. Investigations were performed basing on measurements of the standard ring for different numbers of measurement points. The measured feature was the diameter of applied standard ring. The Polak-Ribière-Polyak optimization method was chosen for the analysis of measurement data. Measurements made for various numbers of measurement points allowed to determine the minimum limiting number of points. Big dispersion of obtained results appeared for the number of points below the limit. For the number of points above the limit the determination of diameter becomes inefficient.

**Keywords:** coordinate measurement technique, on machine measurement.

### 1. Wstęp

Jako zadanie dla procesu optymalizacji wybrano proces obliczania współrzędnych punktu środka i wartości promienia okręgu dopasowanego metodą najmniejszych kwadratów (metodą Gaussa)

do grupy punktów pomiarowych, które są wynikiem pomiaru na obrabiarkę sterowaną numerycznie (CNC) z wykorzystaniem głowicy pomiarowej bezpośrednio w warunkach produkcyjnych.

W celu wyboru najlepszej, spośród wybranych, metody optymalizacji dla wybranego zadania pomiarowego przeprowadzono zarówno badania symulacyjne, jak i doświadczalne. Na etapie badań symulacyjnych punkty pomiarowe wygenerowano z określoną wartością odchylenia standardowego, tym samym symulując wyniki rzeczywistego pomiaru na obrabiarkę sterowaną numerycznie. Wybrano metodę najmniejszych kwadratów jako metodę obliczania elementu skojarzonego, ponieważ jest ona najczęściej wykorzystywaną metodą w praktyce przemysłowej w zakresie współrzędnościowej techniki pomiarowej.

Jako kryterium oceny metod optymalizacji wybrano porównanie wartości względnego zmniejszenia funkcji celu w stosunku do początkowej wartości funkcji celu dla poszczególnych metod optymalizacji. W przypadku zbliżonej wartości względnego zmniejszenia funkcji celu uwzględniono liczbę wykonanych iteracji podczas przeprowadzania obliczeń numerycznych.

W pracy porównano następujące metody optymalizacji [1, 2, 3]:

- Fletcher'a-Reeves'a;
- Polak'a-Ribière'a-Polyak'a;
- Hestenes'a-Stiefel'a;
- Fletcher'a-Reeves'a z tzw. restartem;
- Levenberg'a-Marquardt'a.

### 2. Dane wejściowe do procesu optymalizacji

Względne zmniejszenie funkcji celu jest to względna różnica między pierwszą i ostatnią wartością funkcji celu, która jest wynikiem procesu optymalizacji. Pierwsza wartość funkcji celu jest obliczana na podstawie tzw. danych wejściowych do procesu optymalizacji.

Danymi wejściowymi do procesu optymalizacji są przybliżone współrzędne punktu środka okręgu ( $x_c, y_c$ ) (równania 1-2), który jest dopasowany do grupy punktów pomiarowych. Przybliżone współrzędne punktu środka okręgu są obliczone jako średnia arytmetyczna na podstawie współrzędnych środków ciężkości wszystkich kombinacji trójkątów, których wierzchołki są trzema kolejnymi punktami pomiarowymi ( $x_i, y_i$ ), ( $x_j, y_j$ ) i ( $x_k, y_k$ ).

$$x_c = \frac{[(y_k - y_i)(y_k - y_j) + (x_k^2 - x_i^2)](y_j - y_i) + (x_i^2 - x_j^2)(y_k - y_i)}{2[(x_i - x_j)(y_k - y_j) + (x_k - x_j)(y_j - y_i)]} \quad (1)$$

$$y_c = \frac{y_i + y_j}{2} + \frac{x_i + x_j}{y_j + y_i} \left( x_c - \frac{x_i + x_j}{2} \right) \quad (2)$$

### 3. Funkcja celu

Funkcja celu  $J$  w procesie optymalizacji, dla wybranego zadania pomiarowego, wyrażona jest równaniem (3).

$$J = \sum_{i=1}^n (\rho_i - R)^2 \quad (3)$$

gdzie:  $\rho_i$  - odległość między punktem  $P_c$  środka obliczonego  $i$ -go okręgu a punktem pomiarowym  $P_i$ ,  $R$  - promień obliczonego okręgu.

Funkcja celu  $J$  będzie minimalizowana ze względu na  $R$  oraz  $x_c$  i  $y_c$ , gdzie  $x_c$  i  $y_c$  stanowią współrzędne środka  $P_c(x_c, y_c)$  poszukiwanego okręgu aproksymującego zadany zbiór punktów  $P_i(x_i, y_i)$ . Odległość  $\rho_i = \text{dist}(P_i, P_c)$  określona jest równaniem (4), natomiast estymator  $R$  wyrażony jest równaniem (5). W związku z tym funkcja celu  $J$  jest przedstawiona w postaci równania (6).

$$\rho_i = \sqrt{(x_i - x_c)^2 + (y_i - y_c)^2} \quad (4)$$

$$R = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \rho_i \quad (5)$$

$$J = \sum_{i=1}^n \rho_i^2 - \frac{1}{n} \left( \sum_{i=1}^n \rho_i \right)^2 \quad (6)$$

Zakładamy, że będąc w danym punkcie  $k$  poszukiwany jest punkt następny  $k+1$ , który będzie bliższy punktowi minimum w kierunku wektora  $[a, b]^T$ . Wtedy funkcja celu  $J$  ma postać równania (7), natomiast miara odległości  $\rho_i$  wyrażona jest równaniem (8).

$$J(\beta, a, b) = J(x_c + \beta a, y_c + \beta b) \quad (7)$$

$$\rho_i(\beta, a, b) = \sqrt{(x_c + \beta a - x_i)^2 + (y_c + \beta b - y_i)^2} \quad (8)$$

gdzie:  $\beta$  - długość kroku na danym etapie obliczeń.

Po uwzględnieniu równań (6) i (8) funkcja celu  $J$  może być wyrażona równaniem (9).

$$J(\beta, a, b) = \sum_{i=1}^n \rho_i^2(\beta, a, b) - \frac{1}{n} \left[ \sum_{i=1}^n \rho_i(\beta, a, b) \right]^2 \quad (9)$$

### 4. Funkcja Himmelblau

Poprawność wszystkich opracowanych algorytmów porównywanych metod optymalizacji zweryfikowano na podstawie funkcji Himmelblau (równanie 10, rys. 1) [4] oraz znanych wartości jej minimów lokalnych (równania 11).

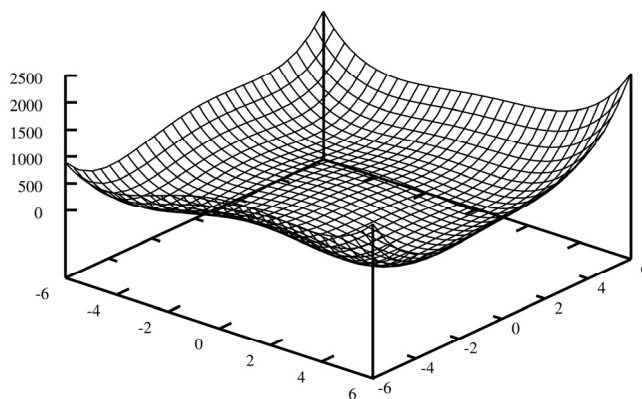
$$f(x, y) = (x^2 + y - 11)^2 + (x + y^2 - 7)^2 \quad (10)$$

$$\begin{aligned} f(3.0, 2.0) &= 0.0, \\ f(-2.805118, 3.131312) &= 0.0, \\ f(-3.779310, -3.283186) &= 0.0, \\ f(3.584428, -1.848126) &= 0.0 \end{aligned} \quad (11)$$

Sprawdzenie algorytmów wybranych metod optymalizacji przeprowadzono dla zadania poszukiwania minimów lokalnych funkcji Himmelblau przy założeniu następujących danych wej-

ściowych, pełniących rolę wartości początkowych w procesach minimalizacji:

$$\begin{aligned} &(3.0, -3.0), (4.0, 2.0), (6.0, 6.0), (6.0, -6.0), (-1.5, 3.0), \\ &(-6.0, 6.0), (-6.0, -6.0) \end{aligned}$$



Rys. 1. Funkcja Himmelblau  
Fig. 1. The Himmelblau function

Funkcję Himmelblau uznano za funkcję celu  $f(x, y) \equiv J(x, y)$ . Dla wybranych danych wejściowych do procesu optymalizacji otrzymano następujące wyniki (tab. 1-7).

Tab. 1. Wartości minimów lokalnych dla punktu startowego (3.0,-3.0)  
Tab. 1. The coordinates of computed local minima for the starting point (3.0,-3.0)

Metoda optymalizacji	X 3.0 mm	Y -3.0 mm
Fletcher-Reeves	3.58442834033	-1.84812652696
Polak-Ribière-Polyak	3.58442834033	-1.84812652698
Hestenes-Stiefel	3.58442834033	-1.84812652698
Levenberg-Marquardt	3.58442834033	-1.84812652696

Tab. 2. Wartości minimów lokalnych dla punktu startowego (4.0,2.0)  
Tab. 2. The coordinates of computed local minima for the starting point (4.0,2.0)

Metoda optymalizacji	X 4.0 mm	Y 2.0 mm
Fletcher-Reeves	3.0	2.0
Polak-Ribière-Polyak	3.0	2.0
Hestenes-Stiefel	3.0	2.0
Levenberg-Marquardt	3.0	2.0

Tab. 3. Wartości minimów lokalnych dla punktu startowego (6.0,6.0)  
Tab. 3. The coordinates of computed local minima for the starting point (6.0,6.0)

Metoda optymalizacji	X 6.0 mm	Y 6.0 mm
Fletcher-Reeves	3.0000001023	2.0000005287
Polak-Ribière-Polyak	3.0	2.0
Hestenes-Stiefel	3.0	2.0
Levenberg-Marquardt	3.0	2.0

Tab. 4. Wartości minimów lokalnych dla punktu startowego (6.0,-6.0)  
Tab. 4. The coordinates of computed local minima for the starting point (6.0,-6.0)

Metoda optymalizacji	X 6.0 mm	Y -6.0 mm
Fletcher-Reeves	3.58442839492	-1.84812656236
Polak-Ribière-Polyak	3.58442834033	-1.84812652696
Hestenes-Stiefel	3.58442834033	-1.84812652696
Levenberg-Marquardt	3.58442834033	-1.84812652696

Tab. 5. Wartości minimów lokalnych dla punktu startowego (-1.5,3.0)  
 Tab. 5. The coordinates of computed local minima for the starting point (-1.5,3.0)

Metoda optymalizacji	X	Y
	-1.5 mm	3.0 mm
Fletcher-Reeves	2.99999997298	1.99999999704
Polak-Ribiére-Polyak	3.0	2.0
Hestenes-Stiefel	3.0	2.0
Levenberg-Marquardt	-2.80511808695	3.13131251825

Tab. 6. Wartości minimów lokalnych dla punktu startowego (-6.0,6.0)  
 Tab. 6. The coordinates of computed local minima for the starting point (-6.0,6.0)

Metoda optymalizacji	X	Y
	-6.0 mm	6.0 mm
Fletcher-Reeves	-2.80511808695	3.13131251825
Polak-Ribiére-Polyak	-2.80511808695	3.13131251825
Hestenes-Stiefel	-2.80511808695	3.13131251825
Levenberg-Marquardt	-2.80511808695	3.13131251825

Tab. 7. Wartości minimów lokalnych dla punktu startowego (-6.0,-6.0)  
 Tab. 7. The coordinates of computed local minima for the starting point (-6.0,-6.0)

Metoda optymalizacji	X	Y
	-6.0 mm	-6.0 mm
Fletcher-Reeves	-3.77931025338	-3.28318599129
Polak-Ribiére-Polyak	-3.77931025338	-3.28318599129
Hestenes-Stiefel	-3.77931025338	-3.28318599129
Levenberg-Marquardt	-3.77931025338	-3.28318599129

## 5. Badania symulacyjne

Porównano pięć metod optymalizacji. Porównanie przeprowadzono na podstawie obliczeń współrzędnych środka i promienia okręgu dopasowanego metodą najmniejszych kwadratów do grupy punktów (punktów pomiarowych), które wygenerowano z określonym odchyleniem standardowym. Wykonano to w celu odzwierciedlenia rzeczywistych warunków pomiaru na obrabiarce sterowanej numerycznie. Przeprowadzono szereg symulacji dla różnych wartości promienia pierścienia wzorcowego ( $10 \pm 80$  mm), odchylenia standardowego ( $0.03 \pm 0.75$  mm) i różnej liczby punktów pomiarowych ( $5 \pm 65$ ). Pierwszym kryterium oceny przedstawionych metod optymalizacji było porównanie wartości względnego zmniejszenia funkcji celu (otrzymanych względem początkowych wartości funkcji celu dla danych wejściowych) dla poszczególnych metod optymalizacji. Przy tym kryterium metody gradientów sprzężonych (Fletcher'a-Reeves'a, Polak'a-Ribiére'a-Polyak'a, Hestenes'a-Stiefel'a oraz Fletcher'a-Reeves'a z tzw. restartem) oraz metoda Levenberg'a-Marquardt'a uzyskały te same wyniki. Weryfikację przeprowadzono także dla arbitralnie zadanych (w ogólnym przypadku różniących się od wartości obliczonych z wykorzystaniem metody trójkątów) współrzędnych punktów startowych do procesu optymalizacji. Także w tym przypadku nie zaobserwowano różnic w wartościach względnego zmniejszenia funkcji celu. Z trzech podstawowych metod gradientów sprzężonych (Fletcher'a-Reeves'a, Polak'a-Ribiére'a-Polyak'a i Hestenes'a-Stiefel'a), pod względem liczby wykonanych iteracji, najlepszy wynik uzyskała metoda Polak'a-Ribiére'a-Polyak'a.

W celu zmniejszenia czasu przeprowadzanych obliczeń wartości parametrów wejściowych (przybliżonych współrzędnych środka okręgu) dla procesu optymalizacji dla różnych konfiguracji wartości promienia okręgu, liczby punktów pomiarowych i wartości odchylenia standardowego w przypadku liczby punktów powyżej 15 zastosowano redukcję liczby punktów pomiarowych o połowę. Został usunięty co drugi punkt pomiarowy. W większości przypadków redukcja punktów pomiarowych spowodowała tylko nieznaczną różnicę w wartościach względnego zmniejszenia funkcji celu dla procesu optymalizacji z redukcją i bez redukcji liczby punktów pomiarowych. Należy to tłumaczyć nie dość

dokładnie obliczonymi wartościami parametrów wejściowych dla procesu optymalizacji w przypadku redukcji liczby punktów pomiarowych. Redukcja liczby punktów pomiarowych nie spowodowała natomiast różnicy w wartościach funkcji celu będących wynikami poszczególnych procesów optymalizacji. Zaobserwowano natomiast bardzo dużą różnicę w liczbie danych wejściowych dla procesu optymalizacji, co ma istotny wpływ na czas przeprowadzanych obliczeń. Ze względu na duży czas obliczeń porównanie procesu optymalizacji z redukcją i bez redukcji liczby punktów pomiarowych przeprowadzono tylko dla jednej wartości promienia okręgu równej 10 mm.

## 6. Oprogramowanie

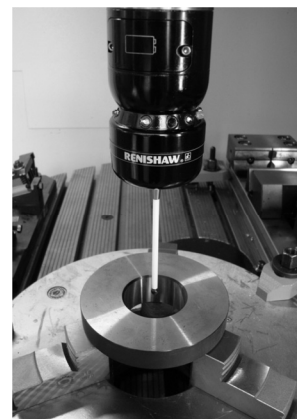
Badania symulacyjne zostały przeprowadzone z wykorzystaniem programów komputerowych napisanych w środowisku programistycznym Python [5]. Poszczególne programy komputerowe obejmują, oprócz wybranych do porównań metod optymalizacji, także obliczenia umożliwiające wyznaczenie wartości wielkości wejściowych dla procesu optymalizacji (przybliżonych współrzędnych środka i promienia okręgu dopasowanego do grupy punktów pomiarowych). Programy komputerowe dla poszczególnych metod optymalizacji zostały uwzględnione jako moduły w programie komputerowym o nazwie OPTIMALIZACJA OBLICZENIA ŚRODKA I PROMIENIA OKRĘGU.

## 7. Badania doświadczalne

Badania doświadczalne miały na celu porównanie składowych niepewności pomiaru, wynikających z powtarzalności zastosowanego sprzętu pomiarowego w przypadku pomiarów z wykorzystaniem współrzędnościowej maszyny pomiarowej (CMM - Coordinate Measuring Machine) typu VISTA ( $MPE_E = 2.4 + L/300 \mu\text{m}$ ,  $MPE_P = 2.2 \mu\text{m}$ ) oraz obrabiarki CNC DMU 80 P duoBLOCK wyposażonej w układ sterowania SINUMERIK 840D i głowicę pomiarową MP700 (OMM - On Machine Measurement).

Badania przeprowadzono na podstawie dziesięciokrotnego pomiaru pierścienia wzorcowego o średnicy 50,001 mm (rys. 2) dla różnej liczby punktów pomiarowych ( $4 \pm 75$ ).

Liczba powtarzanych pomiarów była ograniczona dużym obciążeniem wykorzystanej do badań obrabiarki CNC. Mierzoną cechą była średnica danego pierścienia wzorcowego. W celu obliczenia wartości średnicy jako metodę obliczania elementu skojarzonego zastosowano metodę Gaussa.



Rys. 2. Stanowisko badawcze (OMM)  
 Fig. 2. Experimental stand for on machine measurements (OMM)

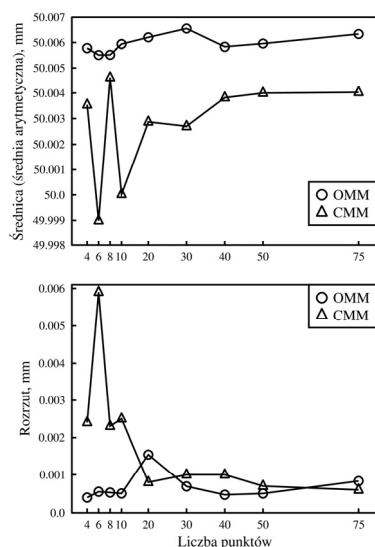
Jako metodę optymalizacji niezbędną do obliczenia elementu skojarzonego zastosowano metodę Polak'a-Ribiére'a-Polyak'a, wybraną na etapie badań symulacyjnych i na podstawie przeglądu literatury [1, 2, 3, 4] oraz opracowany program komputerowy. Otrzymano następujące wyniki (tab. 8 i 9, rys. 3).

Tab. 8. Wyniki pomiarów z wykorzystaniem współrzędnościowej maszyny pomiarowej  
Tab. 8. The results of measurements obtained using coordinate measuring machine

Liczba punktów pomiarowych								
4	6	8	10	20	30	40	50	75
Średnica, mm								
50.0025	49.9955	50.0032	49.9996	50.0026	50.0025	50.0033	50.0038	50.0037
50.0036	49.9972	50.0038	49.9997	50.0030	50.0024	50.0036	50.0041	50.0039
50.0049	49.9987	50.0044	49.9992	50.0031	50.0026	50.0036	50.0044	50.0039
50.0034	50.0002	50.0046	50.0003	50.0028	50.0032	50.0038	50.0037	50.0042
50.0034	50.0000	50.0047	50.0001	50.0031	50.0027	50.0038	50.0041	50.0042
50.0026	50.0006	50.0055	50.0017	50.0030	50.0032	50.0038	50.0038	50.0039
50.0039	49.9974	50.0050	50.0004	50.0029	50.0029	50.0038	50.0039	50.0041
50.0034	49.9984	50.0051	50.0005	50.0030	50.0022	50.0043	50.0040	50.0042
50.0038	50.0005	50.0053	49.9994	50.0029	50.0028	50.0039	50.0041	50.0039
50.0039	50.0014	50.0046	49.9993	50.0023	50.0025	50.0043	50.0041	50.0043
Wartość średniej arytmetycznej, mm								
50.0035	49.9990	50.0042	50.0000	50.0029	50.0027	50.0038	50.0040	50.0040
Rozstęp, mm								
0.0024	0.0059	0.0023	0.0025	0.0008	0.0010	0.0010	0.0007	0.0006
Odchylenie standardowe (niepewność standardowa), mm								
0.0007	0.0019	0.0007	0.0008	0.0002	0.0003	0.0003	0.0002	0.0002

Tab. 9. Wyniki pomiarów z wykorzystaniem przyjętej obrabiarki CNC  
Tab. 9. Results of measurements obtained using applied CNC machine tool

Liczba punktów pomiarowych								
4	6	8	10	20	30	40	50	75
Średnica, mm								
50.0059	50.0054	50.0054	50.0060	50.0050	50.0061	50.0059	50.0059	50.0058
50.0057	50.0054	50.0056	50.0058	50.0063	50.0067	50.0059	50.0061	50.0061
50.0060	50.0055	50.0058	50.0061	50.0065	50.0063	50.0059	50.0061	50.0059
50.0058	50.0056	50.0054	50.0059	50.0064	50.0068	50.0059	50.0060	50.0063
50.0060	50.0056	50.0055	50.0059	50.0060	50.0067	50.0059	50.0057	50.0065
50.0056	50.0055	50.0057	50.0060	50.0062	50.0066	50.0055	50.0057	50.0065
50.0056	50.0058	50.0055	50.0061	50.0064	50.0068	50.0056	50.0059	50.0067
50.0057	50.0053	50.0056	50.0061	50.0063	50.0064	50.0058	50.0058	50.0066
50.0059	50.0057	50.0055	50.0056	50.0063	50.0067	50.0059	50.0061	50.0065
50.0057	50.0054	50.0053	50.0058	50.0066	50.0065	50.0060	50.0062	50.0065
Wartość średniej arytmetycznej, mm								
50.0058	50.0055	50.0055	50.0059	50.0062	50.0066	50.0058	50.0060	50.0063
Rozstęp, mm								
0.0004	0.0006	0.0005	0.0005	0.0015	0.0007	0.0005	0.0005	0.0008
Odchylenie standardowe (niepewność standardowa), mm								
0.0001	0.0002	0.0002	0.0002	0.0004	0.0002	0.0001	0.0002	0.0003



Rys. 3. Wpływ liczby punktów pomiarowych na wartość średnicy i rozrzutu  
Fig. 3. The influence of the number of measured points on the magnitudes of computed diameter and dispersion

Do programowania procesu pomiaru na obrabiarce CNC wykorzystano oprogramowanie INSPECTION PLUS. Programy pomiarowe były generowane automatycznie na podstawie oddzielnego programu komputerowego napisanego w środowisku programistycznym Python.

Fragment kodu przykładowego programu pomiarowego przedstawiono poniżej.

```
G0G90G40G17
G505X0Y0
Z100
L9800
RENPF[8]=1
L9832
R26=-10
L9810
R1=7.2
R7=25.0005
L9821
R551=RENC[35]
R601=RENC[36]
LINIA11="<<R551<<" "<<R601
WRITE(ERROR, "WYNIKI0", LINIA11)
R1=14.4
R7=25.0005
L9821
R552=RENC[35]
R602=RENC[36]
LINIA12="<<R552<<" "<<R602
WRITE(ERROR, "WYNIKI0", LINIA12)
```

## 8. Wyniki z badań doświadczalnych

Na podstawie wyników badań doświadczalnych stwierdzono, że pomiar na obrabiarce DMU 80 P duoBLOCK cechuje się lepszą powtarzalnością niż pomiar na współrzędnościowej maszynie pomiarowej VISTA. Przeprowadzenie pomiarów dla różnej liczby punktów pomiarowych pozwoliło wyznaczyć graniczną liczbę punktów pomiarowych dla zadania pomiarowego polegającego na pomiarze średnicy danego pierścienia wzorcowego, poniżej której zaobserwowano znaczne rozrzuty wskazań, a powyżej której pomiar staje się nieefektywny z uwagi na dużą liczbę punktów pomiarowych, co z kolei wydłuża czas pomiaru. Wyznaczona graniczna liczba punktów pomiarowych to 20.

*Praca naukowa finansowana ze środków na naukę w latach 2009-2011 jako projekt badawczy.*

*Praca prezentowana w trakcie sesji plakatowej IX Międzynarodowej Konferencji Naukowej Współrzędnościowa Technika Pomiarowa (14-16 kwietnia 2010).*

## 9. Literatura

- [1] Bunday B. D.: Basic Optimisation Methods. Edward Arnold Publishers Ltd, 1984.
- [2] Findeisen W., Szymanowski J., Wierzbicki A.: Teoria i metody obliczeniowe optymalizacji. PWN, Warszawa, 1980.
- [3] Shi Z.-J., Shen J.: Convergence of the Polak-Ribière-Polyak conjugate gradient method. Nonlinear Analysis, 66(6), 1428-1441, 2007.
- [4] Reklaitis G. V., Ravindran A., Ragsdell K. M.: Engineering Optimization: Methods and Applications. J. Wiley & Sons, New York, 1983.
- [5] Lutz M.: Wprowadzenie. Python. Wydawnictwo HELION, Gliwice, 2009.

otrzymano / received: 21.05.2010

przyjęto do druku / accepted: 02.07.2010

artykuł recenzowany