

Agnieszka CEDROWSKA

POLITECHNIKA ŁÓDZKA, KATEDRA DYNAMIKI MASZYN, ul. Stefanowskiego 1/13, 90-924 Łódź

Analiza zachowania dynamicznego układu wstęgi papierniczej z wykorzystaniem pomiaru optycznego

Mgr inż. Agnieszka CEDROWSKA

Doktorantka na Wydziale Mechanicznym Politechniki Łódzkiej. W 2003 roku ukończyła studia magisterskie na specjalności Papiernictwo i Poligrafia. W pracy magisterskiej badała wpływ konstrukcji pudeł wykonanych z pięciowarstwowej tektury falistej na ich wytrzymałość na ściskanie. Obecnie zajmuje się identyfikacją, modelowaniem oraz badaniami doświadczalnymi układów płytowych stacjonarnych i przesuujących się osiowo. Badania dotyczą wpływu różnych parametrów na dynamikę układu i stateczność ruchu.



e-mail: agnieszka.cedrowska@p.lodz.pl

Streszczenie

W pracy przedstawiono wyniki analiz dynamicznych drgań płyty wykonanej z tektury falistej. Rezultaty obliczeń teoretycznych częstości drgań własnych płyty, w których wykorzystano model kompozytowy tektury, porównano z wynikami badań doświadczalnych. Do badań doświadczalnych opracowano metodę wyznaczania częstości własnych w oparciu o pomiar optyczny z wykorzystaniem kamery cyfrowej. Ze względu na własności fizyczne materiałów papierniczych, pomiar optyczny jest szczególnie użyteczny przy prowadzeniu badań dynamicznych. Pomiar z użyciem kamery do przebiegów szybkozmiennych pozwalają na wyznaczenie częstości i odpowiadających im postaci drgań z dużą dokładnością.

Słowa kluczowe: pomiar optyczny, badania dynamiczne, częstości drgań własnych układu.

Dynamic analysis of paper web with utilization of optical measurement**Abstract**

Theoretical and experimental results of dynamic analysis of rectangular plate made of corrugated board were presented in this paper. The composite model of corrugated board was applied to theoretical calculations. In order to determine physical parameters of cardboard, papers of wave from central layers were subjected to homogenization process. Due to the fact that corrugated board and paper have small bending stiffness, a method based on optical measurement of determination the natural frequencies of the plate was used in experimental investigations. Rectangular plate with two straight supported and two free edges was fixed to the vibrating table. Analysis of natural modes enables the observation of vibrations in the vicinity of resonance frequencies. Using optical measurement of fast motion the natural frequency of the plate and amplitudes of vibrations can be measured with high precision. Three films for three different frequencies near the resonance peak are performed to allocate the top of parabola. Optical measurement precisely records dynamic behaviour of the plate made of corrugated board. The introduced results of dynamic investigations show that composite model of corrugated board is not enough precise, especially for higher frequencies.

Keywords: optical measurement, dynamic analysis, natural frequencies.

1. Wprowadzenie

Możliwość przewidywania sztywności i wytrzymałości konstrukcji z papieru i tektury nabiera szczególnego znaczenia przy obecnych występujących tendencjach do minimalizacji zużycia surowca z jednoczesnym zachowaniem wymagań dotyczących właściwości wytrzymałościowych oraz tendencjami do wielokrotnego użycia opakowań. Większość opublikowanych dotąd badań, dotyczących sztywności i wytrzymałości opakowań z tektury falistej, koncentrowało się głównie na aproksymacji badań doświadczalnych. Opracowany w ostatnim czasie model obliczeniowy tektury falistej, traktowanej jako struktura kompozytowa, pozwala na szczegółową analizę zachowania się różnych obiektów

zbudowanych z tektury, obciążonych zarówno statycznie jak i dynamicznie [1].

W niniejszej pracy zostały przedstawione wyniki teoretycznych i doświadczalnych badań dynamicznych tektury falistej, traktowanej jako struktura kompozytowa. Obiektem badań była prostokątna płyta zbudowana z tektury falistej, mająca swobodne brzegi wzdłużne i prosto podparte brzegi poprzeczne. Analogiczne warunki brzegowe występują w spotykanych w praktyce przemysłowych układach przesuujących się osiowo wstęg papierniczych.

Teoretyczne badania dynamiczne, wykorzystujące model kompozytowy tektury falistej, polegały na wyznaczeniu najniższych częstości drgań własnych płyt zbudowanych z różnych rodzajów tektur. Do badań doświadczalnych, w celu wyznaczenia częstości drgań własnych, zostało zbudowane stoisko pomiarowe, które umieszczono na stole wibracyjnym. Do rejestracji drgań badanych płyt została zastosowana kamera cyfrowa. W pracy przedstawiono metodę pomiaru parametrów dynamicznego badanego układu na podstawie odpowiednio przetworzonych danych pomiarowych uzyskanych na drodze optycznej.

2. Model matematyczny płyty kompozytowej

Model matematyczny badanego układu został wyprowadzony w postaci modelu płytowego wielowarstwowej struktury kompozytowej [2]. Model matematyczny ma postać cząstkowego równania różniczkowego stanu równowagi dynamicznej:

$$D_{11} \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2(D_{12} + 2D_{66}) \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + D_{22} \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0 \quad (1)$$

gdzie: w – ugięcie płyty, D_{11} , D_{12} , D_{22} , D_{66} – sztywności płytowe, μ – masa jednostki powierzchni płyty.

Warunki brzegowe, opisujące swobodne brzegi wzdłużne (kierunek x - MD) i prosto podparte brzegi poprzeczne (kierunek y - CD), mają następującą postać:

$$\begin{aligned} w|_{x=0} = 0; \quad -D_{11} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \nu D_{22} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \Big|_{x=0} = 0 \\ -D_{22} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \nu D_{11} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \Big|_{y=0} = 0; \quad -D_{22} \frac{\partial^3 w}{\partial y^3} - (2-\nu) D_{11} \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} \Big|_{y=0} = 0 \end{aligned} \quad (2)$$

gdzie: l – długość płyty, b – szerokość płyty.

Rozwiązanie równania ruchu (1) przewiduje się w postaci

$$w_{m,n}(x, y, t) = \left[Y_m(y) \sin\left(\frac{n\pi}{l} x\right) \right] \sin(\omega_{m,n} t) \quad (3)$$

gdzie: $\omega_{m,n}$ – częstość drgań własnych płyty.

Uwzględnienie (3) w równaniu (1) prowadzi do rozwiązania problemu brzegowego, a to rozwiązanie podstawione do warunków brzegowych (2) pozwala na sformułowanie równania częstości.

3. Parametry badanych układów

Przedmiotem badań były płyty wykonane z dwóch rodzajów trójwarstwowej tektury falistej 3T2 oraz 3T44. Wartości parametrów fizycznych papierów składowych otrzymane eksperymentalnie przedstawia tabela 1. W celu wyznaczenia parametrów fizycz-

nych tektury, papiery na falę tworzące warstwy środkowe zostały poddane procesowi homogenizacji [3]. Wyniki procesów homogenizacji zostały przedstawione w tabeli 2 w postaci współczynników macierzy sztywności rozpatrywanych tektur falistych.

Tab. 1. Parametry fizyczne papierów składowych
Tab. 1. Physical parameters of the component papers

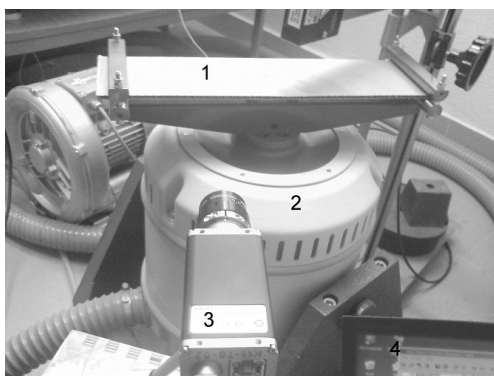
Oznaczenie	3T2 - pokrycie	3T44 - pokrycie	3T2 - fala	3T44 - fala
h, mm	0,25	0,27	0,202	0,30
gr, g/m ²	180	200	140	125
E _{MD} , N/m ²	4,8×10 ⁹	5,3×10 ⁹	5,1×10 ⁹	4,97×10 ⁹
E _{CD} , N/m ²	2,15×10 ⁹	2,49×10 ⁹	1,88×10 ⁹	2,08×10 ⁹
ρ, kg/m ³	720	738	693	417
v	0,25	0,25	0,25	0,25

Tab. 2. Sztywność na zginanie tektur falistych
Tab. 2. Bending stiffness of corrugated boards

Tektura	D ₁₁ , Nm	D ₁₂ , Nm	D ₂₁ , Nm	D ₂₂ , Nm	D ₆₆ , Nm
3T2	8,696	0,976	0,973	4,021	5,538
3T44	8,162	0,955	0,952	3,935	5,474

4. Stanowisko pomiarowe

W czasie badań eksperymentalnych badana płyta z trójwarstwowej tektury falistej o wymiarach 355 × 100 mm została umieszczona w przyrządzie zamocowanym na stole wibracyjnym. Stoisko pomiarowe przedstawia rysunek 1, gdzie: 1 – badana próbka tektury falistej umieszczona w specjalnym uchwycie, 2 – wzбудnik drgań, 3 – kamera do rejestracji przebiegów szybkozmennych, 4 – komputer.



Rys. 1. Stanowisko pomiarowe
Fig. 1. Experimental stand

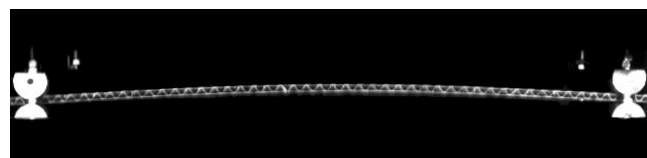
5. Wyniki badań

Posługując się modelem kompozytowym płyty przeprowadzono obliczenia dwóch najniższych częstotliwości drgań giętych. Płyty wykonano z dwóch rodzajów tektur, wyciętych zarówno w kierunku wzdłużnym z bokami wzdłużnymi prostopadłymi do grzbietów fal, jak i w kierunku poprzecznym z bokami wzdłużnymi równoległymi do fal. Wyniki obliczeń przedstawia tabela 3.

Tab. 3. Częstotliwości drgań własnych – obliczenia teoretyczne
Tab. 3. Natural frequencies – theoretical calculation

Częstość/Tektura	3T2 - MD	3T2 - CD	3T44 - MD	3T44 - CD
f ₁ , Hz	73,2	49,4	65,3	58,1
f ₂ , Hz	204,5	139,4	119,1	110,1

W badaniach doświadczalnych do rejestracji drgań płyt została użyta kamera cyfrowa firmy Basler. W celu wyznaczenia wartości poszczególnych częstotliwości drgań własnych, dokonywano rejestracji przebiegów drgań przy 10 różnych częstotliwościach wymuszenia, a następnie wybrano trzy częstotliwości znajdujące się w bezpośrednim sąsiedztwie szczytu rezonansowego. Rysunek 2 przedstawia przykładowy kadr z kamery cyfrowej obrazujący postać ugięcia płyty z tektury 3T2 w kierunku MD podczas drgań z częstotliwością wymuszenia 68 Hz.



Rys. 2. Pierwsza postać drgań układu
Fig. 2. The first natural mode

Uzyskane w taki sposób dane pomiarowe poddano analizie przy użyciu szybkiej transformaty Fouriera – FFT. Trzy rejestracje optyczne dla trzech różnych częstotliwości wymuszenia pozwoliły na określenie położenia trzech punktów wykresu rezonansowego, znajdujących się w bezpośrednim sąsiedztwie jednego z jego wierzchołków. Dodatkowo rejestracja optyczna ugięć płyty pozwoliła na identyfikację postaci drgań związanych z poszczególnymi częstotliwościami własnymi.

Do wyznaczenia dokładnej wartości częstotliwości rezonansowej, została zastosowana numeryczna procedura poprowadzenia paraboli przez wyznaczone trzy punkty wykresu rezonansowego i określenie położenia współrzędnych wierzchołka paraboli. Wyniki badań doświadczalnych dwóch najniższych częstotliwości drgań swobodnych płyt z tektur 3T2 i 3T44 przedstawia tabela 4.

Tab. 4. Częstotliwości drgań własnych – badania doświadczalne
Tab. 4. Natural frequencies – experimental tests

Częstość/Tektura	3T2 - MD	3T2 - CD	3T44 - MD	3T44 - CD
f ₁ , Hz	68	46	60	53
f ₂ , Hz	186	128	110	102

6. Uwagi końcowe

Przedstawione wyniki badań dynamicznych wskazują na małą dokładność kompozytowego modelu płytowego tektury falistej, szczególnie w odniesieniu do obliczeń wyższych częstotliwości drgań swobodnych. Najwyższy odnotowany błąd względny przy obliczeniach drugiej częstotliwości drgań własnych tektury 3T2 - MD wynosi 9,9%.

Przy prowadzeniu analizy dynamicznej układu wstęgi papierniczej zastosowanie pomiaru optycznego poszerza możliwości pomiarowe o możliwość rejestracji postaci drgań wstęgi.

7. Literatura

- [1] Łęcka M., Mania R., Marynowski K.: Nowa metoda wyznaczania wytrzymałości na ściskanie pudeł z tektury falistej. *Przegląd Papierniczy*. 3 (2006), 150 – 153.
- [2] Jones R. M.: *Mechanics of Composite Materials*. Int. Student Edition, McGraw-Hill, Kogakusha Ltd, Tokyo 1975.
- [3] Brzoska Z.: *Statyka i stateczność prętów i konstrukcji cienkościennych*. PWN, Warszawa 1965.