

Adrian SILICKI, Ewa SILICKA

ZACHODNIOPOMORSKI UNIWERSYTET TECHNOLOGICZNY, WYDZIAŁ BUDOWNICTWA I ARCHITEKTURY, Al. Piastów 50, 70-311 Szczecin

Metoda optymalnego wzmocnienia przestrzennych konstrukcji kratowych z wykorzystaniem analizy wrażliwości systemowego wskaźnika niezawodności

Dr inż. Adrian SILICKI

Jest adiunktem w Katedrze Teorii Konstrukcji na Wydziale Budownictwa i Architektury Zachodniopomorskiego Uniwersytetu Technologicznego. Pracę doktorską przygotował pod kierunkiem dr hab. inż. Witolda Paczkowskiego prof. PS. Stopień doktora nauk technicznych uzyskał w czerwcu 2005 roku. Tematyka pracy naukowej podejmowanej przez autora dotyczy zagadnień dyskretnej polioptymalizacji oraz niezawodności stalowych konstrukcji prętowych.



e-mail: adrian.silicki@zut.edu.pl

Dr inż. Ewa SILICKA

Jest adiunktem w Katedrze Teorii Konstrukcji na Wydziale Budownictwa i Architektury Zachodniopomorskiego Uniwersytetu Technologicznego. Pracę doktorską na temat Optymalizacja niezawodnościowa przekryć strukturalnych przygotowała pod kierunkiem dr hab. inż. Witolda Paczkowskiego prof. PS. Stopień doktora nauk technicznych uzyskała w listopadzie 2004 roku. Tematyka pracy naukowej podejmowanej przez autorkę dotyczy zagadnień optymalizacji niezawodnościowej konstrukcji prętowych.



e-mail: ewa.silicka@zut.edu.pl

Streszczenie

W pracy zaproponowano koncepcję optymalnego wzmocnienia konstrukcji prętowych na podstawie analizy wrażliwości systemowego wskaźnika niezawodności β . W tym celu opracowano algorytm wyznaczania zmian β przy zmianach wartości zmiennych opisujących poszczególne elementy wchodzące w skład ścieżki zniszczenia. Przyjętym kryterium oceny było minimum przyrostu masy obiektu oraz uzyskany wzrost poziomu bezpieczeństwa. Przeprowadzona analiza pozwala na racjonalny i efektywny sposób projektowania z uwzględnieniem losowego charakteru obciążeń i parametrów projektowych.

Słowa kluczowe: analiza niezawodnościowa, metoda ścieżek zniszczenia, kratownice przestrzenne.

Method of optimum reinforcing of space truss structures with the use of sensitivity analysis of system reliability index

Abstract

The paper deals with the problem of optimum reinforcing of space truss structures. For that purpose two criteria are assumed – minimum self weight increment and maximum reliability index increment. First chapter contains introduction and general remarks about design in civil engineering. In the second and third chapter basis of the theory of reliability are introduced – definition of probability of failure (Fig. 1), linear approximation method, Hasofer – Lind reliability index (Fig. 2), system reliability analysis (Fig. 3) [1, 6, 7, 10]. Chapter 4 contains proposed algorithm of reinforcing of truss structures. To find the most efficient method of reinforcing, sensitivity analysis of failure mode reliability index is employed. The dominant failure mode is obtained with the use of incremental method. The profiles of the elements of the failure mode are changed and the reliability index is calculated. The cross section of the bars are selected from discrete set of steel elements. For each variation structural self weight and reliability index is determined. Numerical example of the proposed algorithm is analysis of truss dome (Fig. 5). The most significant concluding remark is that the reliability analysis is an important part of design process [4, 5, 11].

Keywords: reliability analysis, failure mode method, space trusses.

1. Wprowadzenie

Obserwowany w ostatnich latach wzrost mocy obliczeniowej komputerów zmienił w znaczący sposób metody projektowania konstrukcji budowlanych. Ogólna dostępność aplikacji numerycznych oraz programów wspomagających CAD sprawiły, iż efektywność i jakość pracy konstruktorów uległy poprawie. Wykonywane współcześnie analizy modeli numerycznych konstrukcji budowlanych są precyzyjne, często rezygnuje się ze stosowanych niegdyś założeń upraszczających obliczenia. Możliwe stało się również stosowanie bardziej zaawansowanych teorii obliczeniowych [3].

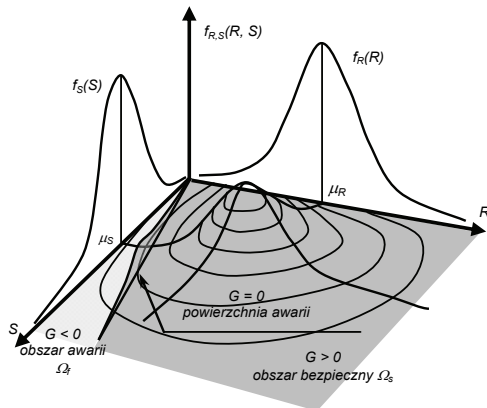
Ponadto zastosowanie znajdują coraz częściej procedury wymagające obliczeń wielokrotnie powtarzalnych, w tym analizy optymalizacyjne. Dzięki temu projektowane obiekty są coraz lepsze, spada zużycie materiału, poprawiana jest ich funkcjonalność i technologiczność wykonania [4, 8, 11, 12].

Jednocześnie zauważyć należy, iż procedury projektowe zawarte w obowiązujących normatywach nie podlegają zasadniczym zmianom. Niezawodność konstrukcji zapewniana jest obecnie za pomocą półprobabilistycznej metody współczynników bezpieczeństwa. Istotą metody tej jest procentowe zmniejszanie wartości parametrów kształtujących nośność elementów ustroju oraz zwiększanie wartości czynników powodujących ich wyłączenie. Wartość współczynnika zależy od losowej zmienności parametrów i jest ustalana na podstawie analizy statystycznej. Zasadniczą wadą powyższej metody jest brak analizy schematu zniszczenia konstrukcji. W zależności od przyjętego schematu pracy konstrukcji, w tym stopnia jej statycznej niewyznaczalności, awaria całego obiektu spowodowana być może przez awarię pojedynczego elementu bądź też pewnej sekwencji elementów. W oczywisty sposób prawdopodobieństwo awarii jednego elementu jest na ogół dużo wyższe niż ściśle określonej ich grupy. Stąd też celowa i racjonalna wydaje się koncepcja projektowania z uwzględnieniem najbardziej prawdopodobnych schematów zniszczenia, co prowadzi do efektywnego wykorzystania materiału. Analiza taka może być uzasadniona zwłaszcza przy zastosowaniu procedur optymalizacyjnych, które dążą najczęściej do zmniejszenia kosztów obiektu przez minimalizację masy. Uzyskiwane w wyniku deterministycznej optymalizacji rozwiązania mogą przekraczać dopuszczalne wartości prawdopodobieństwa awarii i wymagać wzmocnienia, przy możliwie jak najmniejszej ingerencji w uzyskane efekty ekonomiczne. Szczegółowa analiza probabilistyczna jest celowa zwłaszcza w przypadku typowych konstrukcji powtarzalnych oraz w przypadku obiektów użyteczności publicznej – terminale portów lotniczych, hale wystawowe, centra sportowe, itp., których awaria może stanowić zagrożenie dla dużej grupy ludzi [5, 9].

2. Metody wyznaczania prawdopodobieństwa awarii konstrukcji

Definicja prawdopodobieństwa awarii opiera się na stochastycznym opisie zmiennych losowych kształtujących nośność obiektu oraz jego wyłączenie. Na podstawie analizy statystycznej możliwe jest opisanie zmiennych losowych za pomocą odpowiednich rozkładów prawdopodobieństwa i ich parametrów, które stanowią rozkłady brzegowe łącznej funkcji prawdopodobieństwa (rys. 1). Zmienne losowe zestawiane są w wektorze zmiennych losowych X . Kolejnym etapem rozważań jest ustalenie kryteriów awarii dla pojedynczego elementu konstrukcji, które zapisane zostają w postaci wektora funkcji granicznych, zależnych od

przyjętych zmiennych losowych $G(X)=0$. Wykresem funkcji granicznej jest powierzchnia awarii, na której zgodnie z definicją znajdują się realizacje zmiennych spełniające przyjęte kryterium w sposób równościowy. Rozwiązania nie spełniające kryterium znajdują się w obszarze awarii Ω_f , spełniające zaś – w obszarze bezpiecznym Ω_s . Widać zatem, że obszary te stanowią dopełniające się podzbiory zawarte w przestrzeni zdarzeń elementarnych Ω . Dla zmiennej dwuwymiarowej powierzchnię awarii oraz obszary Ω_f i Ω_s przedstawiono na rysunku 1.



Rys. 1. Interpretacja geometryczna funkcji granicznej i obszaru awarii
Fig. 1. Geometric interpretation of limit function and failure domain

Zgodnie z klasyczną definicją prawdopodobieństwo awarii opisuje się jako łączne prawdopodobieństwo realizacji zawartych w obszarze awarii

$$P_f = \int_{\Omega_f} f_X(X) dX \quad (1)$$

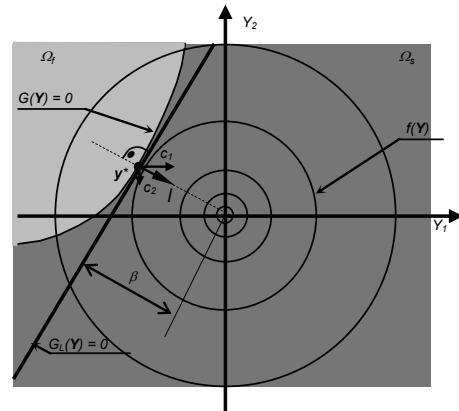
W przypadku, gdy wektor zmiennych losowych X zawiera więcej niż trzy składowe, wyznaczanie prawdopodobieństwa awarii na podstawie definicji i równania (1) jest w zasadzie niemożliwe ze względu na trudności numeryczne przy całkowaniu po obszarach wielowymiarowych. Opracowano szereg procedur upraszczających, które generalnie dzieli się na metody oparte na aproksymacji powierzchni granicznej oraz metody symulacyjne. Wykorzystywana w pracy metoda aproksymująca *First Order Reliability Method (FORM)* polega na szacowaniu prawdopodobieństwa awarii P_f poprzez aproksymację nieliniowej powierzchni granicznej za pomocą szeregu Taylora z rozwinięciem do pierwszego rzędu. Przestrzeń zdarzeń elementarnych wraz z rozkładami brzegowymi oraz funkcjami granicznymi transformowana jest do standardowej przestrzeni normalnej za pomocą transformacji Rosenblatta. Punkt rozwinięcia w szereg Taylora, zwany punktem projektowym, wyznaczany jest jako punkt położony najbliżej początku układu współrzędnych, a miarą prawdopodobieństwa awarii staje się wówczas odległość aproksymowanej powierzchni od początku układu. Tak określoną miarę nazywa się wskaźnikiem niezawodności Hasofera – Linda β , zaś zależność między β a prawdopodobieństwem awarii wyraża równanie

$$P_f = \Phi(-\beta) \quad (2)$$

gdzie Φ jest dystrybuantą standardowego rozkładu normalnego. Widać zatem, że w procedurze *FORM* skomplikowane numerycznie całkowanie zastąpione zostało prostym zagadnieniem optymalizacji skalarniej z ograniczeniami

$$\beta = \min(\mathbf{y}^T \mathbf{y})^{\frac{1}{2}} \quad (3)$$

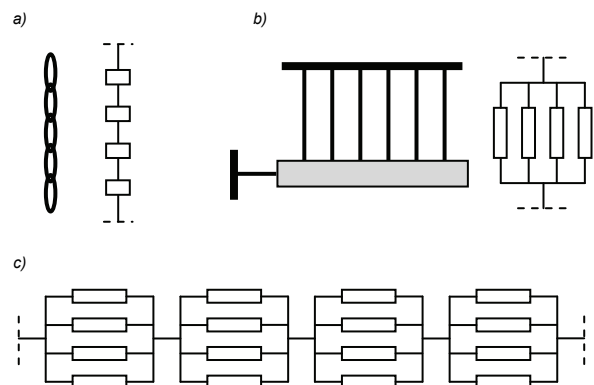
przy czym \mathbf{y} spełnia równościowo warunek dany równaniem funkcji granicznej (rys. 2) [1, 6, 7].



Rys. 2. Aproksymacja liniowa funkcji granicznej w punkcie projektowym \mathbf{y}^*
Fig. 2. Linear approximation of a limit function in the design point \mathbf{y}^*

3. Analiza niezawodnościowa systemów konstrukcyjnych

Podczas analizy konstrukcji pod kątem jej bezpieczeństwa należy uwzględnić możliwe schematy zniszczenia, zwane ścieżkami awarii. W zależności od przyjętej geometrii oraz modelu obliczeniowego, liczba elementów w danej ścieżce może zmieniać się od jednego – dla prostych obiektów statycznie wyznaczalnych, do kilkudziesięciu – w przypadku złożonych struktur przestrzennych. W teorii niezawodności przyjmuje się podział na układy szeregowo, do zniszczenia których wystarczy jeden element, oraz równoległe, gdy awaria ustroju następuje po zniszczeniu wszystkich elementów składowych (rys. 3 a, b). W przestrzennych przekryciach kratowych o dużych rozpiętościach liczba możliwych ścieżek zniszczenia jest bardzo duża, przy czym liczba elementów w danej ścieżce jest zmienna. Z punktu widzenia teorii niezawodności jest to zatem złożony schemat mieszany, w którym poszczególne elementy pojedynczej ścieżki stanowią układy równoległe, zaś ścieżki – układy szeregowo, gdyż awarię powoduje wystąpienie jednej z nich [1, 5, 9, 10].



Rys. 3. Przykłady schematów konstrukcyjnych: a) szeregowych; b) równoległych; c) mieszanych

Fig. 3. Example scheme of structure: a) series; b) parallel; c) combined

Należy zaznaczyć, że w przypadku realnych konstrukcji przestrzennych o dużych rozpiętościach na ogół niemożliwa jest analiza wszystkich ścieżek zniszczenia. Ze względów numerycznych obliczenia ogranicza się zatem do tzw. ścieżek dominujących, których prawdopodobieństwo wystąpienia jest większe od przyjętej wartości granicznej [1, 6, 10].

4. Optymalne wzmocnianie konstrukcji na podstawie analizy systemowej

Sformułowanie problemu

Numeryczne modelowanie procesów zniszczenia oraz analiza niezawodnościowa konstrukcji pozwalają na racjonalne wzmocnianie odpowiednich jej elementów. Dzięki temu możliwe jest efektywne i celowe wykorzystanie materiału, a tym samym minimalny wzrost masy konstrukcji przy jednoczesnym zwiększeniu bezpieczeństwa do poziomu wymaganego. Zaproponowany algorytm zastosowany może być dla rozwiązań uzyskanych w procesach optymalizacji deterministycznej, w których w wyniku minimalizacji masy uzyskano rozwiązania o zbyt niskim poziomie bezpieczeństwa, a także dla standardowych rozwiązań inżynierskich. Jako podstawowe kryterium przyjęto minimum przysto masy konstrukcji w odniesieniu do rozwiązania początkowego

$$\min(\Delta f), \quad f = \sum_{i=1}^n A_i l_i \quad (4)$$

Jako zmienne decyzyjne traktowane są przekroje prętów należących do dominującej ścieżki, które ulegną wzmocnieniu. Przekroje dobierane są z katalogu aktualnie produkowanych elementów stalowych. Takie sformułowanie decyduje o dyskretnym charakterze problemu i wyznacza naturalne ograniczenia zbioru dopuszczalnego [4, 8, 11, 12]. Z punktu widzenia optymalizacji parametrami pozostają obciążenia i topologia konstrukcji.

Proponowany algorytm rozwiązania

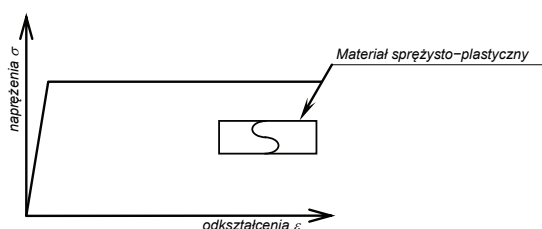
Rozwiązanie problemu realizowane jest dwuetapowo. W pierwszym kroku wyznaczane są ścieżki zniszczenia, których prawdopodobieństwo przekracza przyjętą wartość graniczną P_{gr} . Ścieżki te stanowią sekwencje prętów, których jednoczesne zniszczenie prowadzi do awarii konstrukcji jako całości. Za awarię elementu uznano sytuację przekroczenia naprężeń dopuszczalnych dla danego materiału lub, w przypadku prętów ściskanych, globalną utratę stateczności według Eulera, co wyrażono za pomocą lokalnej funkcji granicznej G_l

$$G_l = 1 - \frac{|\sigma_i|}{\sigma_i^{gr}} \quad (5)$$

$$\sigma_i^{gr} = \begin{cases} \sigma_i^0, & \text{gd}y \sigma_i \geq 0 \\ \sigma_i^{cr}, & \text{gd}y \sigma_i < 0 \end{cases} \quad (6)$$

$$\sigma_i^{cr} = \frac{\pi^2 E_i J_i}{A_i l_i^2}$$

Natomiast awaria konstrukcji w ujęciu globalnym rozumiana jest jako brak zdolności do przenoszenia zadanych obciążeń, co na ogół równoznaczne jest z przejściem w mechanizm kinematycznie zmienny. W ujęciu numerycznym opisuje się to jako stan, gdy determinant globalnej macierzy sztywności K osiąga wartość bliską zeru.



Rys. 4. Relacja naprężenia – odkształcenia dla materiałów sprężysto–plastycznych
Fig. 4. Stress – strains relation for ductile materials

W celu wyznaczenia ścieżek zniszczenia przeprowadzono analizę nieliniową przy założeniu modelu biliniowego Prandtl'a [3].

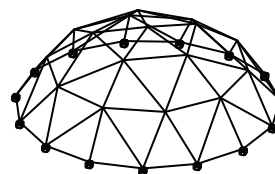
Na podstawie analizy wskaźników niezawodności poszczególnych elementów wyznaczano pręty o największym prawdopodobieństwie zniszczenia. Następnie określano obciążenie niszczące, po czym dokonywano redystrybucji obciążenia, po przejściu danego elementu w stan plastyczny. Opisaną procedurę powtarzano do spełnienia warunku opisującego globalną awarię konstrukcji. W kolejnym etapie przeprowadzono analizę statystyczną w celu wyznaczenia prawdopodobieństwa jednoczesnego wystąpienia awarii prętów w określonej ścieżce. Jako założenie przyjęto, że z punktu widzenia statystyki zdarzenia te są niezależne, a zatem prawdopodobieństwo ich iloczynu jest równe iloczynowi ich prawdopodobieństw. Możliwe jest wówczas również określenie wpływu poszczególnych czynników na prawdopodobieństwo awarii ścieżki. Numeryczna analiza wrażliwości wskaźnika niezawodności i -tej ścieżki β_i na zmiany przekrojów prętów wchodzących w jej skład pozwala wyznaczyć elementy, których wzmocnienie wpływa najkorzystniej na prawdopodobieństwo awarii ścieżki

$$\text{Max} \left(\frac{\partial \beta_i(X)}{\partial X_k} \right) \quad (7)$$

gdzie X jest wektorem zawierającym przekroje prętów w danej n -elementowej ścieżce, $k = \overline{1, n}$. Takie sformułowanie umożliwia racjonalne sterowanie przyrostem masy w celu zwiększenia poziomu bezpieczeństwa konstrukcji.

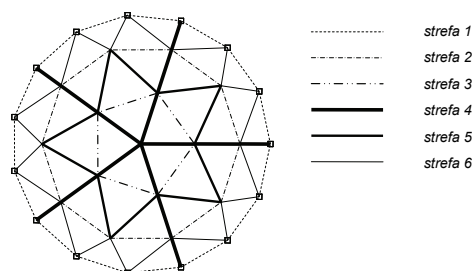
Przykład numeryczny zaproponowanego algorytmu

Przykładem zastosowania opisanego algorytmu jest analiza przekrycia w postaci powłoki kratowej o rozpiętości 15 m i wysokości 5 m (rys. 5).



Rys. 5. Analizowana powłoka kratowa
Fig. 5. Analyzed truss-bar dome

Węzły kratownicy położone są na powierzchni fragmentu czaszy sferycznej [2]. Założono obciążenie w postaci sił skupionych pionowych o wartościach 75 kN w węzłach na połowie powierzchni powłoki. Przyjęto osiowo–symetryczny rozkład profili elementów, przy czym pręty pogrupowano w sześć stref sztywności (rys. 6).



Rys. 6. Układ profili w konstrukcji
Fig. 6. Layout of the truss-bar dome

Zestawienie przyjętych podczas analizy profili prętów poszczególnych stref przedstawiono w tabeli 1.

Przedstawioną konstrukcję poddano analizie niezawodnościowej zgodnie z opisanym powyżej algorytmem. W pierwszym

etapie wyznaczono wskaźniki niezawodności β według procedury Hasofera – Lindy. Uwzględniono przy tym losową zmienność obciążeń oraz wybranych parametrów projektowych – średnicy i grubości pręta oraz granicy plastyczności stali i modułu Younga (tab. 2). Podczas analizy przyjęto elementowe funkcje graniczne zgodne z równaniami 5 i 6.

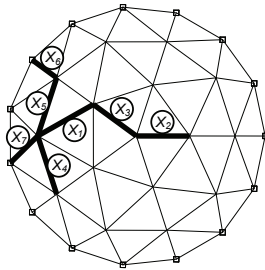
Tab. 1. Zestawienie profili prętów
Tab. 1. Profiles of bar in analyzed structure

	strefa 1	strefa 2	strefa 3	strefa 4	strefa 5	strefa 6
typ profilu	rura okrągła	rura okrągła	rura okrągła	rura okrągła	rura okrągła	rura okrągła
średnica D , mm	54	54	70	76,1	88,9	88,9
grubość ścianki t , mm	5,6	5,6	5,6	5,6	5,6	5,6

Tab. 2. Przyjęte parametry statystyczne
Tab. 2. Assumed statistic parameters

	obciążenie S	średnica rury D	grubość ścianki rury t	granica plastyczności stali R_e	moduł Younga E
rozkład prawdopodobieństwa	normalny	normalny	normalny	normalny	normalny
współczynnik zmienności v	0,2	0,1	0,1	0,1	0,05

W drugim etapie analizy przeprowadzono analizę metodą przyrostową, w wyniku której wyznaczono dominującą ścieżkę zniszczenia (rys. 7).

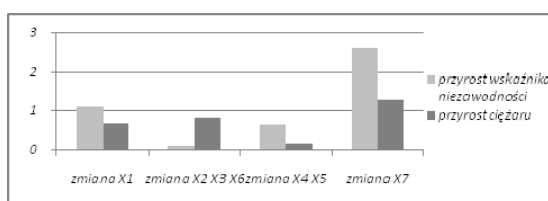


Rys. 7. Wyznaczona ścieżka zniszczenia
Fig. 7. Obtained failure mode

Wyznaczona ścieżka zniszczenia składa się z siedmiu elementów, przy czym elementy te należą do różnych stref sztywności. Zakładając niezależność zdarzeń prawdopodobieństwo awarii ścieżki P_f oszacowano na $3,40 \times 10^{-27}$ – co odpowiada wskaźnikowi niezawodności $\beta = 10,73$. Następnie traktując wskaźnik β jako funkcję zależną od profili prętów wchodzących w skład ścieżki określono wrażliwość β na zmiany poszczególnych profili $\frac{\partial \beta}{\partial X_k}$.

Tab. 3. Wyznaczone zmiany wskaźnika niezawodności oraz ciężaru konstrukcji
Tab. 3. Obtained gradients of the reliability index and structure weight

	zmiana ΔX_1	zmiana $\Delta X_2, \Delta X_3, \Delta X_6$	zmiana $\Delta X_4, \Delta X_5$	zmiana ΔX_7
$\Delta \beta$	1,1028	0,1056	0,6737	2,6405
ΔF , kN	0,69	0,84	0,14	1,29



Rys. 8. Wyznaczone zmiany wskaźnika niezawodności oraz ciężaru konstrukcji
Fig. 8. Obtained gradients of the reliability index and structural weight

Zmienne profile prętów dobierano z dyskretnego katalogu produkowanych elementów. Założono, że zmiana profilu pręta powoduje zmianę profili wszystkich prętów należących do danej grupy, a zatem wrażliwość β na zmiany X_2, X_3 i X_6 oraz X_4 i X_5 są jednakowe. Dla każdego wariantu wzmocnienia obliczono przyrost ciężaru konstrukcji ΔF . Wyniki analizy zamieszczone w tabeli 3 i przedstawiono na rysunku 8. Z analizy wykresu przedstawionego na rysunku 8 wynika, że zmiana wartości zmiennej X_1 , wiążąca się ze zmianą średnicy prętów strefy 5 (rys. 6), powoduje znaczący wzrost wskaźnika niezawodności β , z drugiej strony jednak wzrasta znacząco masa konstrukcji. Podobna sytuacja ma miejsce w przypadku zmiany X_4 i X_5 – pręty strefy 2 – przy czym przyrosty są wówczas mniejsze. Największą wrażliwość współczynnika β uzyskano przy zmianie X_7 – pręty strefy 6 – jednak przyrost masy jest duży. Za zdecydowanie niekorzystne uznać należy natomiast wzmocnianie prętów strefy 4, gdyż zmiana X_2, X_3 i X_6 spowodowała znaczny wzrost masy, natomiast wskaźnik niezawodności nie zmienił się znacząco. Na drodze dyskusji uzyskanych wyników stwierdzić można, że efektywnym sposobem wzmocnienia analizowanej konstrukcji jest zwiększenie średnicy prętów strefy 2, gdyż wiąże się z minimalnym przyrostem masy powłoki.

5. Wnioski

W pracy zaproponowano algorytm analizy niezawodnościowej konstrukcji kratowych traktowanych jako system prętów. W celu wyznaczenia prawdopodobieństwa awarii poszczególnych elementów uwzględniono losową zmienność obciążeń działających na konstrukcję oraz wybranych parametrów projektowych. Dominującą ścieżkę zniszczenia konstrukcji jako całości wyznaczono metodą przyrostową. Następnie określono wpływ poszczególnych elementów wchodzących w skład ścieżki zniszczenia na wskaźnik niezawodności ścieżki. Dzięki temu możliwe jest opracowanie koncepcji efektywnego wzmocnienia konstrukcji przy jak najmniejszym przyroście masy. Podstawowym wnioskiem wynikającym z przeprowadzonych analiz jest fakt, że analiza niezawodnościowa obiektów znacząco poprawia jakość rozwiązań konstrukcyjnych oraz pozwala na racjonalne projektowanie przy założonym poziomie bezpieczeństwa konstrukcji.

6. Literatura

- [1] Blischke W. R., Murthy D. N. P.: Reliability. Modeling, Prediction, and Optimization. Wiley, 2000.
- [2] Bródka J. (red.): Przekrycia strukturalne. Arkady, Warszawa 1985.
- [3] Cook R. D., Malkus D. S., Plesha M. E., Witt R. J.: Concepts and Applications of Finite Element Analysis. Wiley, 2002.
- [4] Jendo S., Paczkowski W. M., Silicka E.: Discrete multicriteria reliability-based optimization of spatial trusses. CAMES, 2007, Vol. 14, pp. 485–496.
- [5] Jendo S., Putresza J.: Multicriterion reliability-based optimization of structural systems. in: Schuëller G. I., Shinozuka M., Yao J. T. P. (eds.): Structural Safety and Reliability. Proceedings of ICOSAR'93, Innsbruck 9–13 Aug. 1993.
- [6] Melchers R.E.: Structural Reliability, Analysis and Prediction. Wiley, New York 1987.
- [7] Nowak A. S., Collins K. R.: Reliability of Structures. McGraw-Hill, Boston 2000.
- [8] Paczkowski W. M.: Wybrane problemy dyskretnej optymalizacji ewolucyjnej. Prace Naukowe Politechniki Szczecińskiej Nr 544, Szczecin 1999.
- [9] Park S., Choi S., Sikorsky C., Stubbs N.: Efficient method for calculation of system reliability of a complex structure. International Journal of Solids and Structures, 2004, Vol. 41, pp. 5035–5050.
- [10] Rausand M., Hoyland A.: System Reliability Theory. Models, Statistical Methods, and Applications. Wiley, 2004.
- [11] Silicka E., Silicki A.: Polioptymalizacja niezawodnościowa przekryć strukturalnych z zastosowaniem metod ewolucyjnych. Pomiary, Automatyka, Kontrola, Vol. 54, 2008.
- [12] Silicka E.: Optymalizacja niezawodnościowa przekryć strukturalnych. (w:) Garbalińska H. (red.): Prace doktorantów kierunku budownictwo, Politechnika Szczecińska, Szczecin 2004, s. 97–120.