

Łukasz SZPARAGA, Wojciech TARNOWSKI, Przemysław BARTOSIK  
POLITECHNIKA KOSZALIŃSKA, ul. Raclawicka 15-17, 75-620 Koszalin

## Zastosowanie zasady Bellmana do optymalizacji dynamicznej procesu - przykład

Mgr Łukasz SZPARAGA

Asystent w Zakładzie Projektowania Materiałów i Procesów Instytutu Mechatroniki, Nanotechnologii i Techniki Próżniowej Politechniki Koszalińskiej. Zainteresowania badawcze i naukowe związane są z fizyką matematyczną, teorią systemów oraz z modelowaniem matematycznym i optymalizacją procesów ciągłych.



e-mail: lukasz.szparaga@tu.koszalin.pl

Prof. dr hab. inż. Wojciech TARNOWSKI

Ukończył studia na Wydz. Mechaniki Precyzyjnej PW, doktorat na Wydz. Automatyki P. Śląskiej, habilitacja na Wydz. SiMR PW, profesura w 1990r.. W latach 1963-86 pracował na Wydz. Automatyki P. Śląskiej, potem na Wydz. Mechanicznym P. Koszalińskiej, gdzie utworzył Katedrę Systemów Sterowania. Zajmuje się polioptymalizacją, projektowaniem układów automatyki przemysłowej i komputerowym wspomaganie projektowania oraz metodologią procesu projektowo – konstrukcyjnego.



e-mail: wojciech.tarnowski@tu.koszalin.pl

Mgr inż. Przemysław BARTOSIK

Doktorant w Katedrze Mechaniki Technicznej i Wytrzymałości Materiałów na Wydziale Mechanicznym Politechniki Koszalińskiej. Jego zainteresowania naukowe dotyczą modelowania stanów naprężeń i odkształceń w warstwie wierzchniej materiału ukonstytuowanych w skutek obróbki nagniataniem z wykorzystaniem metody elementów skończonych. Ponadto interesuje się programowaniem strukturalnym i obiektowym w językach C++, C# oraz środowisku MATLAB.



e-mail: bartosikprzemyslaw@o2.pl

### Streszczenie

Celem pracy jest omówienie i porównanie metody analitycznej oraz numerycznej rozwiązywania zagadnień optymalizacji wieloetapowych procesów decyzyjnych Markowa. Procedury obliczeniowe zilustrowane są na przykładzie zadania optymalizacji izotermicznej kaskady reaktorów. Opisana została również procedura numeryczna umożliwiająca optymalizację procesu opartą na zasadzie optymalności Bellmana. Wskazane są również wady i zalety każdej z metod jak i zakres ich stosowności.

**Słowa kluczowe:** proces Markowa, zasada optymalności, optymalizacja wieloetapowa.

### Application of Bellman's principle for dynamic optimization of a process - example

#### Abstract

The aim of this work is to present and to compare the analytical and numerical method of optimization multilevel Markov processes. For the sake of the integrity of the work an essence of optimality principle for Markov processes and short derivation of Bellman's equation is given. Calculation procedures are illustrated on an example of isotherm cascade of reactor optimization. Analytical solution of the problem was given by S. Sieniutycz and Z. Szwast [5]. The main goal of this work is to present a simple numerical optimization procedure based on Bellman's principle and to compare the numerical results with an analytical solution from the literature [5]. Tables 1-3 shows respectively a comparison of values of state and decision variables and values of optimal functions for the 3-level process obtained in the numerical and in the analytical way. Figure 2 shows an evolution of the state variable for different initial states and known fixed final state. Obtained numerical results comply with analytical ones. The simplicity of the presented method is an undeniable advantage and gives a great opportunity of application.

**Keywords:** Markov process, optimality principle, multi-level optimization.

## 1. Wstęp teoretyczny

W wielu dziedzinach nauki takich jak przykładowo inżynieria procesowa, teoria sterowania czy ekonomia matematyczna, mamy do czynienia z procesami decyzyjnymi. W wielu zagadnieniach

z tych dziedzin wykorzystuje się metodę programowania dynamicznego jako efektywną metodę stosowaną do optymalizacji wieloetapowych procesów decyzyjnych. Teoretyczną podstawą do poszukiwania rozwiązania zadania programowania dynamicznego jest zasada optymalności Richarda Bellmana będąca swego rodzajem rozszerzeniem zasady przyczynowości. Kluczową sprawą jest określenie, czy modelowany proces jest procesem Markowa bowiem tylko dla takich procesów słuszną jest procedura optymalizacji oparta na zasadzie Bellmana. Celem tej pracy jest zaprezentowanie - na przykładzie - numerycznej procedury realizującej zasadę Bellmana, umożliwiającą rozwiązywanie zagadnień optymalizacji wieloetapowych, sekwencyjnych procesów decyzyjnych.

### Zasada optymalności

W literaturze dotyczącej matematycznych metod optymalizacji oraz teorii sterowania można znaleźć różne sformułowania zasady optymalności. Różnice związane są głównie ze stopniem abstrakcji rozważanych zagadnień, matematyzacją zagadnienia lub z polem zastosowań [1-7]. Niech punktem wyjścia do dalszych rozważań będzie sformułowanie zasady optymalności podane przez jej twórcę Richarda Bellmana [1].

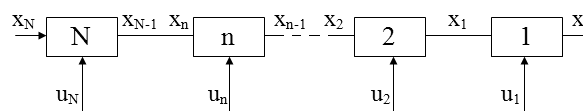
Rozważmy dyskretny,  $N$  etapowy proces Markowa. Jest to proces w którym po dowolnej liczbie decyzji  $k$ , wpływ pozostałych ( $N-k$ ) etapów procesu decyzyjnego na zysk całkowity zależy tylko od stanu układu przy końcu  $k$ -tej decyzji i od decyzji następnych. Przez pojęcie decyzja rozumieć należy decyzję etapową. Dla takiego procesu zasada optymalności wyraża się następująco:

*Strategia optymalna ma tę własność, że jakkolwiek byłby stan początkowy i decyzja początkowa, pozostałe decyzje muszą tworzyć strategię optymalną z punktu widzenia stanu wynikłego z pierwszej decyzji.*

Sformułowana zasada posłuży do wyprowadzenia równania Bellmana dla dyskretnego  $N$ -etapowego procesu Markowa nazywanego również w literaturze [3] procesem sekwencyjnym.

### Równanie Bellmana

Mając na uwadze główny cel artykułu tj. numeryczne zastosowanie zasady optymalności, równanie Bellmana zostanie przedstawione zgodnie z książką S. Sieniutycza i Z. Szwasta [5]. Zwykle obliczenia optymalizacyjne przy użyciu zasady optymalności prowadzi się przeciwnie do kierunku upływu czasu toteż wprowadzona przez nas notacja będzie zgodna z tym zwyczajem. Rozważmy  $N$ -etapowy proces decyzyjny Markowa.



Rys. 1. Schemat blokowy wieloetapowego procesu decyzyjnego  
Fig. 1. Multi-level decision process scheme

W ogólnym przypadku stan  $x_n$  oraz decyzja  $u_n$  są wektorami o  $r$  i odpowiednio o  $p$  składowych, to znaczy  $x_n = (x_n^1, x_n^2, \dots, x_n^r)$  i  $u_n = (u_n^1, u_n^2, \dots, u_n^p)$ . Na każdym etapie procesu następuje transformacja stanu wejściowego  $x_n$  w stan wyjściowy  $x_{n-1}$ . Jako, iż na każdym etapie transformacja wektora stanu może być innej postaci, ogólna postać równania stanu ma formę:

$$x_{n-1} = T_n(x_n, u_n), \quad (1)$$

gdzie  $T_n$  transformacja na  $n$ -tym etapie. Wprowadźmy teraz wskaźnik jakości (funkcję celu) dla badanego procesu.

$$S(x_N, u_N, \dots, u_1) = \sum_{n=1}^N D_n(x_n, u_n) \quad n = 1, 2, \dots, N, \quad (2)$$

gdzie  $D_n$  jest wskaźnikiem jakości dla  $n$ -tego etapu. Zadanie optymalizacji polega na minimalizacji funkcji  $S$ . Funkcję jakości optymalnej definiujemy jako:

$$f_n(x_n) = \min_{u_1, \dots, u_n} \left( \sum_{i=1}^n D_i(x_i, u_i) \right) \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (3)$$

przy zachowaniu ograniczeń na zmienne decyzyjne. Otrzymaliśmy w ten sposób  $N \times p$  wymiarowe zagadnienie optymalizacji, ponieważ na każdym z  $N$  etapów należy podjąć  $p$  decyzji. Decyzje po  $n$ -tym etapie nie wpływają na proces decyzyjny na tym etapie, więc wzór (3) można przekształcić do postaci:

$$f_n(x_n) = \min_{u_n} \left( D_n(x_n, u_n) + \min_{u_1, \dots, u_{n-1}} \left( \sum_{i=1}^{n-1} D_i(x_i, u_i) \right) \right). \quad (4)$$

Zauważmy, że drugi człon wyrażenia (4) jest funkcją jakości optymalnej dla podprocesu  $n-1$  etapowego, co pozwala zapisać wyrażenie (4) w postaci:

$$f_n(x_n) = \min_{u_n} (D_n(x_n, u_n) + f_{n-1}(x_{n-1})). \quad (5)$$

Korzystając z równania stanu można zapisać związek (5) w postaci:

$$f_n(x_n) = \min_{u_n} (D_n(x_n, u_n) + f_{n-1}(T_n(x_n, u_n))). \quad (6)$$

Formuła (6) przedstawia rekurencyjne równanie programowania dynamicznego tak zwane równanie Bellmana dla  $N$ -etapowego dyskretnego procesu sekwencyjnego. Równanie to pozwala sprowadzić  $N \times p$ -wymiarowe zagadnienie optymalizacji do sukcesywnego rozwiązania  $N$  zadań optymalizacji z których każde jest  $p$ -wymiarowe.

## 2. Procedura obliczeń

W dostępnej literaturze [1-7] istnieje bardzo mało praktycznych zastosowań zasady Bellmana, omówionych na przykładach. Istniejące przykłady zazwyczaj są rozwiązane w sposób analityczny, który znacznie ogranicza potencjalne zastosowania rozważanej zasady optymalności. W celu przedstawienia numerycznej procedury rozwiązywania problemów przy pomocy równania Bellmana, odwołamy się do przykładu z książki Sieniutycz i Szwasta [5], rozwiązanego w sposób analityczny i porównamy wyniki z numerycznym rozwiązaniem tego problemu.

### Przykład [5]

Objektem optymalizacji jest izotermiczna kaskada reaktorów w której zachodzą pojedyncze odwracalne reakcje pierwszorzędowe. Przykład został zapisany przy użyciu wprowadzonych wcześniej już symboli i notacji. Zależność (7) określa stężenie wyjściowe  $x_{n-1}$  w funkcji stężenia wejściowego  $x_n$  i bezwymiarowego czasu przebywania  $u_n$ .

$$x_{n-1} = \frac{x_e u_n + x_n}{x_e - x_{n-1}} \quad 0 \leq x_n \leq 0,7 \quad n = 1, 2, \dots, N. \quad (7)$$

Na zmienne stanu narzucono ograniczenia technologiczne. Zadane jest również stężenie równowagowe  $x_e$ , stan  $x_0$  oraz  $x_N$ . Zadanie optymalizacji polega na minimalizacji sumarycznego bezwymiarowego czasu przebywania. Należy zatem zminimalizować wyrażenie postaci:

$$S = \sum_{n=1}^N u_n. \quad (8)$$

### Rozwiązanie analityczne

W celu rozwiązania zagadnienia określmy funkcję jakości optymalnej zgodnie ze wzorem (6) wykorzystując zależności (7) i (8). Otrzymamy wtedy:

$$f_n(x_n) = \min \left( \frac{x_{n-1} - x_n}{x_e - x_{n-1}} + f_{n-1}(x_{n-1}) \right), \quad (9)$$

gdzie  $f_0(x_0) = 0$ . Procedura obliczeń jest następująca:

- Do wzoru (9) podstawiamy  $n=1$  i otrzymujemy funkcję zmiennych  $x_0$  i  $x_1$ :

$$f_1(x_1) = \min \left( \frac{x_0 - x_1}{x_e - x_0} + f_0(x_0) \right) = \frac{x_0 - x_1}{x_e - x_0}. \quad (10)$$

- Minimalizujemy funkcję  $f_1$  po zmiennej  $x_0$ . Minimalizacja ta jest trywialna ponieważ wartość  $x_0$  jest zadana.
- Następnie do wzoru (9) podstawiamy wartość  $n=2$  i otrzymujemy funkcję zmiennych  $x_1$  i  $x_2$ :

$$f_2(x_2) = \min_{x_1} \left( \frac{x_1 - x_2}{x_e - x_1} + \frac{x_0 - x_1}{x_e - x_0} \right). \quad (11)$$

- Minimalizujemy wyrażenie (11) po zmiennej  $x_1$  otrzymując minimum w punkcie:

$$x_1(x_2) = x_e - [(x_e - x_2)(x_e - x_0)]^{0,5}. \quad (12)$$

- Otrzymany stan  $x_1$  dany wzorem (12) podstawiamy do wyrażenia (11) otrzymując jawną postać  $f_2(x_2)$ .
- Następnie do wzoru (9) podstawiamy  $n=3$  i wykorzystując równanie (12) otrzymujemy  $f_3(x_3)$  oraz zależność  $x_2(x_3)$ . Obliczenia kontynuujemy dla kolejnych  $n$  aż do  $n=N$ .
- Znając wartość  $x_N$  określamy  $f_N(x_N)$  i  $x_{N-1}(x_N)$ . Znając wartość  $x_{N-1}$  określamy wartość  $f_{N-1}(x_{N-1})$  itd. aż do  $f_1(x_1)$ .

Podana wyżej procedura jest bardzo żmudna i trudna rachunkowo zwłaszcza kiedy równanie stanu jest skomplikowane, wektor stanu jest długi, a liczba etapów duża. Wymaga również zaawansowanej znajomości analizy matematycznej, bowiem poszukuje się na dalszych krokach obliczeń, związków rekurencyjnych, których dowodzenie jest kłopotliwe. Dlatego celowe staje się zaproponowanie numerycznej metody rozwiązywania opartej na przedstawionej procedurze.

### Rozwiązanie numeryczne

W celu optymalizacji wieloetapowego procesu decyzyjnego przy użyciu zasady optymalności należy rozwiązać równanie Bellmana w postaci wzoru (6). Ważne przy tworzeniu tablic wartości funkcji jest uwzględnienie ograniczeń narzuconych na zmienne decyzyjne. W trakcie procesu obliczeniowego zmienia się zbiór dopuszczalnych wartości zmiennych decyzyjnych, zatem na każdym etapie obliczeń należy sprawdzać czy otrzymana tablica funkcji  $f$  powstała z aktualnego zbioru wartości zmiennych decyzyjnych. Procedura numeryczna składa się z następujących etapów:

- Określić końcowy stan układu  $x_0$ .
- Sporządzić tablicę wartości funkcji  $f_1(x_0, x_1)$  podstawiając  $n=1$  do wzoru (6).
- Określić minimum funkcji  $f_1(x_0, x_1)$  i zależność  $f_1(x_1)$  w postaci tablicy.
- Podstawić  $n=2$  do wzoru (6) i otrzymać tablicę wartości funkcji  $f_2(x_1, x_2)$ .
- Określić minimum funkcji  $f_2(x_1, x_2)$  i otrzymać tablicę wartości funkcji  $f_2(x_2)$ .
- Procedurę kontynuować do  $n=N$ . Po wykonaniu wszystkich kroków dysponujemy tablicą  $f_n(x_n)$  dla  $n=1, 2, \dots, N$ .

- Znacząc stan  $x_N$  można odczytać na podstawie tablicy  $f_N(x_N, x_{N-1})$  stan  $x_{N-1}$ .
- Znacząc stan  $x_{N-1}$  można określić wartość  $f_{N-1}(x_{N-1})$ , a na podstawie tablicy  $f_{N-1}(x_{N-1}, x_{N-2})$  można określić stan  $x_{N-2}$ . Obliczenia kontynuujemy aż do uzyskania  $f_1(x_1)$  oraz  $x_1$ .

Niewątpliwym mankamentem tej metody jest konieczność przechowywania tablic funkcji  $f_n(x_n, x_{n-1})$  dla  $n=1, 2, \dots, N$ , ponieważ dopiero po dokonaniu pierwszej fazy obliczeń jesteśmy w stanie stwierdzić, które optymalne elementy tablic  $f_n(x_n, x_{n-1})$  dla  $n=1, 2, \dots, N$  stanowią rozwiązanie zagadnienia. Dzieje się tak dlatego, iż nie jesteśmy w stanie przewidzieć wyników obliczeń dalej niż na jeden krok i tylko na podstawie tego kroku podejmujemy (etapową) decyzję.

Celem pracy nie jest dokładna analiza wyników zadania optymalizacji izotermicznej kaskady reaktorów, a jawne pokazanie numerycznej procedury obliczeniowej. Opisana procedura została zaimplementowana w programie MATLAB. Mając na uwadze istnienie analitycznych rozwiązań rozważanego przykładu, tabele 1 i 2 zawierają porównanie optymalnych wartości zmiennych stanu oraz optymalnych wartości zmiennych decyzyjnych, otrzymanych w sposób numeryczny i analityczny dla procesu 3-etapowego. W tabelach przedstawiono również wartości bezwzględnych różnic pomiędzy wynikami odpowiadającymi rozwiązaniom analitycznym i numerycznym.

Tab. 1. Zestawy zmiennych stanu dla procesu 3-etapowego otrzymane w sposób analityczny i numeryczny

Tab. 1. Comparison of state variables for the 3-level process obtained in the numerical and in the analytical way

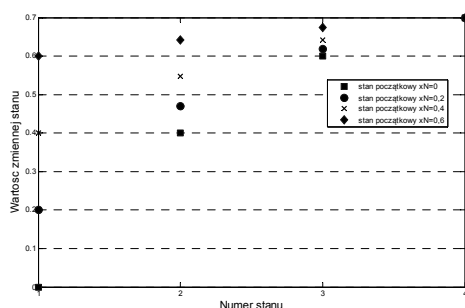
Numeryczne				Analityczne				Różnica	
$x_3$	$x_2$	$x_1$	$x_0$	$x_3$	$x_2$	$x_1$	$x_0$	$\Delta x_2$	$\Delta x_1$
0,0	0,400000	0,600000	0,7	0,0	0,400000	0,600000	0,7	0	0
0,1	0,434000	0,608750	0,7	0,1	0,434069	0,608707	0,7	6,9E-05	4,3E-05
0,2	0,469750	0,618250	0,7	0,2	0,469807	0,618288	0,7	5,7E-05	3,8E-05
0,3	0,507500	0,629000	0,7	0,3	0,507598	0,629002	0,7	9,8E-05	2,4E-06
0,4	0,548000	0,641250	0,7	0,4	0,548016	0,641260	0,7	1,6E-05	9,9E-06
0,5	0,592000	0,655750	0,7	0,5	0,591992	0,655775	0,7	8,4E-06	2,5E-05
0,6	0,641250	0,674000	0,7	0,6	0,641260	0,674008	0,7	9,9E-06	7,9E-06

Tab. 2. Zestawy zmiennych decyzyjnych dla procesu 3-etapowego otrzymane w sposób analityczny i numeryczny

Tab. 2. Comparison of decision variables for the 3-level process obtained in the numerical and in the analytical way

Numeryczne			Analityczne			Różnica		
$u_3$	$u_2$	$u_1$	$u_3$	$u_2$	$u_1$	$\Delta u_3$	$\Delta u_2$	$\Delta u_1$
1,00000	1,00000	1,00000	1,00000	1,00000	1,00000	0	0	0
0,91260	0,91370	0,91250	0,91293	0,91293	0,91293	3,3E-04	7,7E-04	4,3E-04
0,81680	0,81710	0,81750	0,81712	0,81712	0,81712	3,2E-04	2,1E-05	3,8E-04
0,70940	0,71050	0,71000	0,70998	0,70998	0,70998	5,8E-04	5,2E-04	2,4E-05
0,58730	0,58740	0,58750	0,58740	0,58740	0,58740	1,0E-04	1,1E-06	9,9E-05
0,44230	0,44190	0,44250	0,44225	0,44225	0,44225	5,0E-05	3,5E-04	2,5E-04
0,25980	0,25990	0,26000	0,25992	0,25992	0,25992	1,2E-04	2,1E-05	7,9E-05

Na rysunku 2 przedstawione zostały wartości zmiennych stanu w funkcji numeru stanu. Zgodnie z przyjętą notacją, jako stan początkowy przyjmujemy stan  $x_3$ . Na wykresie pokazano zmianę wartości zmiennych stanu zgodnie ze strzałką czasu, więc stanowi  $x_3$  na wykresie odpowiada numer 1. Stan końcowy  $x_0$  posiada numer 4. Na rysunku 2 pokazano przykładową ewolucję wektora stanu układu dla różnych stanów początkowych układu zachowując ustalony stan końcowy.



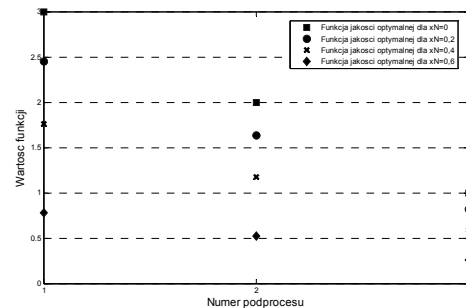
Rys. 2. Zależność wartości zmiennej stanu w funkcji numeru stanu  
Fig. 2. Relation of value of state variable vs. number of state

W tabeli 3 przedstawiono zestawy wartości funkcji jakości optymalnych dla różnych stanów początkowych  $x_3$ , dla podprocesów w procesie 3-etapowym otrzymane w sposób analityczny i numeryczny. Rysunek 3 przedstawia zależność wartości funkcji jakości optymalnej dla różnych stanów początkowych i ustalonym stanem końcowym dla danego podprocesu w funkcji numeru podprocesu.

Tab. 3. Zestawy funkcji jakości optymalnych dla podprocesów w procesie 3-etapowym otrzymane w sposób analityczny i numeryczny

Tab. 3. Comparison of the optimal functions for subprocesses in 3-level process obtained in the numerical and in the analytical way

Numeryczne			Analityczne			Różnica		
$f_3$	$f_2$	$f_1$	$f_3$	$f_2$	$f_1$	$\Delta f_3$	$\Delta f_2$	$\Delta f_1$
3,00000	2,00000	1,00000	3,00000	2,00000	1,00000	0	0	0
2,73880	1,82620	0,91250	2,73879	1,82586	0,91293	6,5E-06	3,4E-04	4,3E-04
2,45140	1,63460	0,81750	2,45136	1,63424	0,81712	3,8E-05	3,6E-04	3,8E-04
2,12990	1,42050	0,71000	2,12993	1,41995	0,70998	2,8E-05	5,5E-04	2,4E-05
1,76220	1,17490	0,58750	1,76220	1,17480	0,58740	3,2E-06	9,8E-05	9,9E-05
1,32670	0,88444	0,44250	1,32675	0,88450	0,44225	4,9E-05	5,9E-05	2,5E-04
0,77976	0,51992	0,26000	0,77976	0,51984	0,25992	3,1E-06	7,8E-05	7,9E-05



Rys. 3. Zależność wartości funkcji jakości optymalnej dla danego podprocesu w funkcji numeru podprocesu

Fig. 3. Relation of value of optimal quality function vs. subprocess number

### 3. Podsumowanie

Celem pracy było omówienie i porównanie metody analitycznej i numerycznej rozwiązywania zagadnień optymalizacji wieloetapowych procesów decyzyjnych Markowa na przykładzie znanym z literatury, dotyczącym zadania optymalizacji izotermicznej kaskady reaktorów. Opisane procedury obliczeniowe zostały przedstawione w jak najprostszej formie. Zamierzonym celem autorów było ukazanie różnic i podobieństw obu metod, jak również ukazanie ich wad i zalet. Co warto podkreślić dokładność metody numerycznej jest silnie związana z rozmiarem przyjętej sieci węzłów obliczeniowych; przy zastosowaniu obecnych komputerów ilość węzłów w sieci może być bardzo duża. Metoda numeryczna posiada niewątpliwą przewagę jeśli chodzi o zwiększanie wymiarowości zagadnienia, można za jej pomocą liczyć efektywnie zagadnienia optymalizacji o dużej liczbie etapów, z kolei nie uprawnia ona do określania w sposób ścisły zachowań asymptotycznych. Rozwiązania analityczne dają możliwość łatwego badania parametryczności zagadnienia oraz uprawniają do badania zachowań asymptotycznych.

### 4. Literatura

- [1] Bellman R.: Adaptacyjne procesy sterowania. PWN, Warszawa, 1965.
- [2] Gubnicki Z.: Teoria i algorytmy sterowania. PWN, Warszawa, 2005.
- [3] Gutenbaum J.: Modelowanie matematyczne systemów. Akademicka Oficyna Wydawnicza EXIT, Warszawa, 2003.
- [4] Górecki H.: Optymalizacja systemów dynamicznych. PWN, Warszawa, 1993.
- [5] Sieniutycz S., Szwał Z.: Praktyka obliczeń optymalizacyjnych. WNT, Warszawa, 1982.
- [6] Takahashi Y., Rabins M., Auslander D. M.: Sterowanie i systemy dynamiczne. WNT, Warszawa, 1972.
- [7] Tarnowski W.: Optymalizacja i polioptymalizacja w mechatronice. WUPK, Koszalin, 2009.

otrzymano / received: 22.04.2010

przyjęto do druku / accepted: 04.05.2010

artykuł recenzowany