

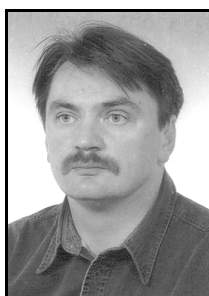
**Marcin LORENC**

POLITECHNIKA OPOLSKA, INSTYTUT ELEKTROENERGETYKI  
ul. Prószkowska 76, 45-758 OPOLE

## Zastosowanie modelowania numerycznego do prognozowania rozkładu temperatur w obiektach sakralnych ogrzewanych ciepłym powietrzem

Dr inż. Marcin LORENC

Pracownik Instytutu Elektroenergetyki, Wydziału Elektrotechniki Automatyki i Informatyki Politechniki Opolskiej. Autor ponad 40 publikacji z zakresu diagnostyki układów izolacyjnych transformatorów elektroenergetycznych.



e-mail: m.lorenc@po.opole.pl

### Streszczenie

Projektowanie systemów grzewczych zaopatrujących obiekty sakralne w ciepło jest zagadnieniem bardzo trudnym i złożonym. Wynika to przede wszystkim ze stosunkowo niewielkiej liczby tego typu obiektów, dużego zróżnicowania architektonicznego oraz stosowania różnego rodzaju technologii ich wykonania. Literatura przedmiotu obejmuje tylko nieliczne publikacje opisujące sposoby projektowania systemów grzewczych zaopatrujących obiekty sakralne w ciepło. Zastosowanie modelowania matematycznego może być pomocne w realizacji tego typu zadań. Pozwala ono na skrócenie czasu projektowania w porównaniu z metodami tradycyjnymi, powodując wzrost globalnej mocy twórczej projektantów, ułatwiając jednocześnie wprowadzanie zmian i modyfikacji do projektów już istniejących. Ponadto wariantowanie rozwiązań z wykorzystaniem symulacji komputerowej jest zdecydowanie tańsze niż prace doświadczalne. W artykule przedstawiono wyniki modelowania matematycznego przeprowadzonego w środowisku COMSOL Multiphysics, ilustrujące rozkład temperatury występujący podczas pracy systemu grzewczego w Katedrze Opolskiej.

**Słowa kluczowe:** system pomiarowy, pomiar rozkładu pól temperaturowych, komfort cieplny, mikroklimat pomieszczeń, modelowanie numeryczne.

### Application of numerical modelling for temperature layout prognosis in churches heated with warm air

#### Abstract

Designing of heating systems supplying churches with heat is very difficult and complex issue. It is a result of relatively small number of such buildings, which additionally vary in their architectonic design and applied heating technologies. Publications describing design methods of heating systems for churches are rather scant. Application of mathematical modelling may be helpful for such tasks. It allows to shorten the time span of designing when compared to traditional methods. Moreover, it increases general efficiency of designers making it easier for them to implement changes and modifications to the projects already existing. Most of all, however, it allows for various solutions and their computer simulation which is definitely cheaper than experimental methods. Results of mathematical modeling of temperature layout in Opole Cathedral Church, appearing during designing works of a heating system are presented in the paper. Modelling was carried out in COMSOL Multiphysics environment. Chapter 2 shows physical values used in the process of modelling. Finite-element method was used for evaluating fragmentary differential equations. Chapter 3 provides a modelling method of a Church building. On Fig. 2 building geometry and on Fig. 3 the network of mathematical model of Opole Cathedral Church are presented. Fig. 4. shows theoretical temperature layout in a modelled building done by the modelling process.

**Keywords:** measuring system, measurement of temperature field distribution, heat comfort, microclimate of the rooms, numerical modelling.

## 1. Wprowadzenie

W celu zapewnienia właściwego komfortu cieplnego ludzi przebywających we wnętrzach różnego rodzaju obiektów, poza znajomością wartości prędkości przepływającego powietrza oraz rozkładu temperatury na powierzchni przegród budowlanych, przede wszystkim wymagana jest znajomość rozkładu temperatury powietrza. Związane jest to bezpośrednio ze sposobem ogrzewania danego obiektu. Problematyka doboru odpowiedniego typu i parametrów systemu grzewczego dla potrzeb ogrzewania budynków sakralnych jest zagadnieniem bardzo trudnym i złożonym, gdyż są to obiekty niepowtarzalne, bardzo zróżnicowane architektonicznie i wykonane w różnych okresach, a tym samym technologiach. Ze względu na stosunkowo niewielką liczbę tego typu obiektów oraz ich indywidualność, nie ma do tej pory sprawdzonych metod obliczeniowych pozwalających wyznaczyć w sposób jednoznaczny wielkość zapotrzebowania na energię cieplną. W literaturze można znaleźć tylko nieliczne prace [1, 2, 4], w których przedstawiono propozycje obliczania mocy cieplnej dla potrzeb ogrzewania kościołów. Równie złożonym zagadnieniem jest wybór systemu grzewczego, głównie z powodu krótkiego czasu użytkowania wynoszącego od kilku do kilkunastu godzin na dobę lub nawet w tygodniu. Ponadto, wymagania różnych elementów wyposażenia obiektów sakralnych są w dużej mierze indywidualne, niepowtarzalne i dodatkowo bardzo zróżnicowane.

Rozwój metod analizy niestacjonarnych procesów wymiany ciepła oraz techniki obliczeniowej umożliwił modelowanie dynamiki cieplnej całych budynków oraz wybranych pomieszczeń. Modele te najczęściej wykorzystuje się w celu:

- określenia obciążenia dynamicznego, czyli wyznaczenia wielkości zmiennego strumienia ciepła niezbędnego do utrzymania wymaganych parametrów termicznych w pomieszczeniu lub budynku,
- symulacji przebiegów temperatury w pomieszczeniach budynku dla konkretnych, zadanych parametrów klimatu zewnętrznego,
- określenia całkowitego zapotrzebowania budynku w energię cieplną w dowolnie wybranym okresie [9].

W pracy przedstawiono wyniki modelowania rozkładu temperatury występującej w okresie zimy w obiekcie Katedry Opolskiej, przeprowadzonego w środowisku COMSOL Multiphysics. Symulację przeprowadzono w czasie działania systemu grzewczego.

## 2. Modelowanie rozkładu pól temperaturowych w Katedrze Opolskiej

W celu wyznaczenia teoretycznego rozkładu temperatury w Katedrze Opolskiej w czasie pracy systemu grzewczego, zbudowano model matematyczny obiektu i przeprowadzono analizę numeryczną. Modelowanie przeprowadzono w środowisku COMSOL Multiphysics, wykorzystując moduł Heat Transfer Module, uwzględniając zjawisko kondukcji i konwekcji.

W procesie modelowania rozkładu temperatury w obiekcie Katedry Opolskiej, przyjęto wymianę ciepła w oparciu o konwekcję oraz przewodzenie, opisaną w środowisku COMSOL Multiphysics następującym równaniem [7, 8]:

$$-n(-k\nabla T + C_p uT) = q_0 + h(T_{\text{inf}} - T) \quad (1)$$

gdzie:  $n$  – wektor jednostkowy prostopadły do powierzchni,  $h$  – współczynnik przewodnictwa cieplnego,  $k$  – współczynnik przenikania ciepła wynoszący  $8 \text{ W/m}^2\text{K}$ ,  $T_{inf}$  – temperatura otoczenia na granicy ośrodka równa  $0^\circ \text{C}$ .

W modelu przyjęto, że ściany, sufit i podłoga wykonane są z betonu o współczynniku przewodnictwa cieplnego  $h$ , wynoszącym  $1,8 \text{ W/m}^2\text{K}$  oraz o gęstości  $\rho$  równej  $2300 \text{ kg/m}^3$ . Ciepło właściwe  $C_p$  przy stałym ciśnieniu wynosi  $385 \text{ J/kg}\cdot\text{K}$ . Parametry powietrza wypełniającego obiekt zależą od temperatury oraz ciśnienia  $p$ , które ma wartość  $1000 \text{ hPa}$ . Temperatura początkowa w ośrodku wynosi  $10^\circ \text{C}$ . Zależności ciepła właściwego  $C_p$  i gęstości  $\rho$  od temperatury zdefiniowano następująco:

$$C_p(T) = 0,0769T + 1076,9 \quad (2)$$

$$\rho(pT) = 0,0288p / 8,314/T \quad (3)$$

Model matematyczny składa się z szeregu równań różniczkowych cząstkowych, które w środowisku COMSOL Multiphysics rozwiązywane są za pomocą metody elementów skończonych (MES) przy zadanych warunkach brzegowych. MES rozwinęła się w oparciu o metody przybliżone rozwiązywania zagadnień brzegowych z wykorzystaniem rachunku wariacyjnego oraz metod aproksymacji funkcji [3].

W obliczeniach wariacyjnych tworzone są funkcjonały, dla których wyznacza się ekstrema. Rozważane funkcjonały są określone na zbiorach funkcji, i zależą od jednej lub kilku funkcji oraz ich pochodnych, pełniących rolę argumentów funkcjonału. Wiele zjawisk fizycznych lub stanów obiektów czy systemów może być opisanych za pomocą funkcjonału, z warunkiem, aby funkcjonał przyjmował najmniejszą (lub największą) wartość (zasada wariacyjna). Matematyczne sformułowanie zasady wariacyjnej sprowadza się do warunku, aby całka charakterystyczna (funkcjonał) dla danego układu przy rzeczywistej zmianie zmiennej przyjmowała najmniejszą (lub największą) wartość, w porównaniu z wszystkimi możliwymi wartościami przy zadanych warunkach brzegowych. Przyjęto oznaczenie  $L$  dla funkcji podcałkowej zależnej od pewnej liczby funkcji  $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ , charakteryzujących system, oraz od ich pochodnych  $\partial\varphi_r / \partial x_s$ . Zmienne, względem których wykonuje się całkowania, oznaczono przez  $x_1, \dots, x_m$ . Całkę, której minimum należy znaleźć, można zapisać w postaci [3]:

$$A = \int_{a_1}^{b_1} \dots \int_{a_n}^{b_n} L(\varphi_1, \dots, \varphi_n, \frac{\partial\varphi_1}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial\varphi_n}{\partial x_m}, \dots, x_1, \dots, x_m) dx_1 \dots dx_m \quad (4)$$

Funkcja  $L$  występująca w wyrażeniu (4) nazywana jest gęstością funkcji Lagrange'a, gdzie  $[a_i, b_i]$  – są przedziałami całkowania dla zmiennych  $x_i$ ,  $a$  ( $i = 1, \dots, m$ ). Funkcje, poprzez które wyraża się funkcja  $L$ , powinny być wybrane w sposób szczególnie tak, aby spełnić warunki osiągnięcia przez całkę  $A$  najmniejszej (lub największej) wartości. Oznaczmy wybrane funkcje przez  $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ , a ich pochodne przez  $\partial\varphi_r / \partial x_s$ , natomiast odpowiadającą im wartość funkcjonału przez  $A$ . Niech zmiana funkcji  $\varphi_r$  (wariacja funkcji), zapisana zostanie jako  $\delta\varphi_r = \varepsilon_r \eta_r$ , gdzie  $\varepsilon_r$  jest dostatecznie małą wielkością, a  $\eta_r$  jest dowolną funkcją. Wariacje funkcji  $\delta\varphi_r$  powodują zmiany pochodnych funkcji [3]:

$$\delta \frac{\partial\varphi_r}{\partial x_p} = \frac{\partial\delta\varphi_r}{\partial x_p} = \varepsilon_r \frac{\partial\eta_r}{\partial x_p} \quad (5)$$

Po rozwinięciu funkcjonału  $A$  w szereg Taylora względem wariacji  $\delta\varphi_r$ , z uwzględnieniem tylko składników liniowych, otrzymuje się wyrażenie dla wariacji funkcjonału (przy założeniu niezmienności przedziałów całkowania).

Dodatkowo wymagane jest spełnienie warunku, aby wariacje funkcji na granicach przedziałów całkowania przyjmowały wartości zerowe. Wówczas [3]:

$$\delta A = \int_{a_1}^{b_1} \dots \int_{a_m}^{b_m} \sum_{r=1}^n \varepsilon_r \left( \frac{\partial L}{\partial \varphi_r} \eta_r + \sum_{s=1}^m \frac{\partial L}{\partial (\partial \varphi_r / \partial x_s)} \cdot \frac{\partial \eta_r}{\partial x_s} \right) dx_1 \dots dx_m \quad (6)$$

W wyniku całkowania drugiego składnika wyrażenia (6) względem zmiennej  $x_s$  (całkowanie przez części) uzyskuje się [3]:

$$\int_{a_s}^{b_s} \left( \frac{\partial L}{\partial (\partial \varphi_r / \partial x_s)} \cdot \frac{\partial \eta_r}{\partial x_s} \right) dx_s = \eta_r \frac{\partial L}{\partial (\partial \varphi_r / \partial x_s)} \Big|_{a_s}^{b_s} - \int_{a_s}^{b_s} \eta_r \frac{\partial}{\partial x_s} \left( \frac{\partial L}{\partial (\partial \varphi_r / \partial x_s)} \right) dx_s \quad (7)$$

Pierwszy składnik wyrażenia (7) przyjmuje wartość zero. Wtedy pierwszą wariację funkcjonału (6) można zapisać [3]:

$$\delta A = \int_{a_1}^{b_1} \dots \int_{a_m}^{b_m} \sum_{r=1}^n \varepsilon_r \eta_r \left[ \frac{\partial L}{\partial \varphi_r} - \sum_{s=1}^m \left( \frac{\partial L}{\partial (\partial \varphi_r / \partial x_s)} \cdot \frac{\partial \eta_r}{\partial x_s} \right) \right] dx_1 \dots dx_m \quad (8)$$

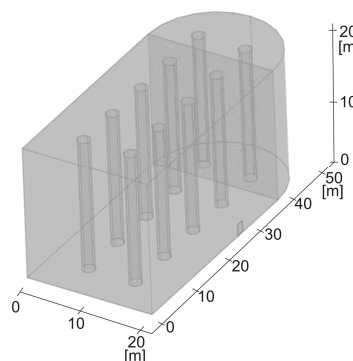
Aby funkcjonał  $A$  posiadał ekstremum, funkcje  $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ , należy wybierać tak, by współczynniki przy wszystkich  $\varepsilon_r$  były równe zero (warunek konieczny istnienia ekstremum). Warunek ten prowadzi do następującego układu równań [3]:

$$\frac{\partial L}{\partial \varphi_r} - \sum_{s=1}^m \frac{\partial}{\partial x_s} \left( \frac{\partial L}{\partial (\partial \varphi_r / \partial x_s)} \right) = 0, \quad (r = 1, \dots, m) \quad (9)$$

Równania powyższe noszą nazwę równań Eulera - Lagrange'a, a ich rozwiązania nazywa się ekstremalami funkcjonału  $A$ .

### 3. Geometria modelu matematycznego badanego obiektu

Geometria modelu matematycznego została tak skonstruowana, aby była zbliżona do rzeczywistego obiektu, dając jednocześnie możliwość przeprowadzenia obliczeń w akceptowalnym przedziale czasowym. Z tego powodu Katedrę Opolską zamodelowano jako prostopadłościan o wymiarach zbliżonych do rzeczywistych: (24 m x 50 m x 18 m) z zaokrągloną ścianą przednią oraz z pominięciem otworów okiennych i drzwiowych. W modelu uwzględniono natomiast kolumny dzielące obiekt na część główną oraz dwie nawy boczne. Po prawej stronie bezpośrednio przy posadzce, zamodelowano punkt, którym ciepłe powietrze dostarczane jest z systemu grzewczego do obiektu.

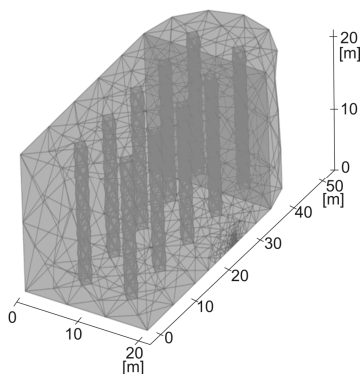


Rys. 1. Geometria Katedry Opolskiej przyjęta w modelu matematycznym  
Fig. 1. Opole Cathedral Church geometry used in a mathematical model

Przy konstrukcji modelu matematycznego Katedry Opolskiej przyjęto następujące założenia:

- w geometrii nie uwzględniono otworów okiennych oraz drzwiowych,
- rzeczywista, skomplikowana geometria obiektu została uproszczona do prostej figury geometrycznej,
- system grzewczy zamodelowano jako źródło ciepła o gęstości strumienia wynoszącej  $q_0 = 80 \text{ kW/m}^2$ ,
- w modelu przyjęto stałą temperaturę ścian wynoszącą  $10^\circ\text{C}$ ,
- w każdym punkcie przyjęto grubość ścian  $0,5 \text{ m}$ ,
- przyjęto stałą temperaturę sufitu i podłogi równą  $10^\circ\text{C}$ ,
- w modelu założono całkowity brak ruchu powietrza wywołanego innymi czynnikami niż w wyniku działania systemu grzewczego.

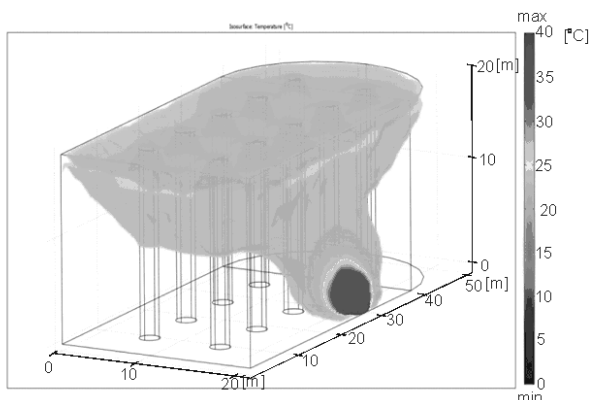
Na rys. 2 przedstawiono rozkład siatki składającej się z 3456 punktów, co daje 5184 stopni swobody.



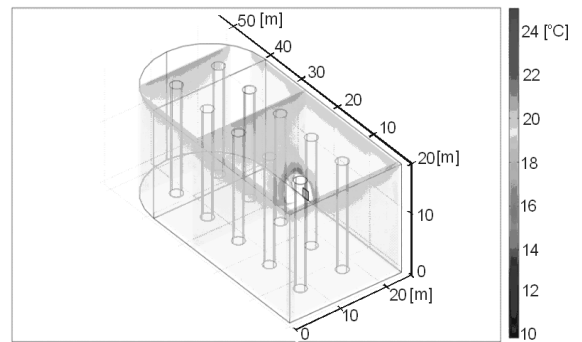
Rys. 2. Siatka modelu matematycznego Katedry Opolskiej  
Fig. 2. Network of a mathematical model of Opole Cathedral Church

#### 4. Wyniki modelowania numerycznego

W wyniku przeprowadzonych obliczeń uzyskano teoretyczny rozkład temperatur w przyjętym modelu Katedry Opolskiej, który przedstawiono w formie przestrzennej na rys. 3. Najwyższa temperatura występuje w rejonie punktu zaopatrującego obiekt w ciepłe powietrze. Ruch powietrza w modelowanym obiekcie jest w tym przypadku naturalnym ruchem konwekcyjnym, wywołanym zmianami gęstości poszczególnych cząstek powietrza, spowodowanej działaniem systemu grzewczego. Efektem tego jest występowanie wyższej temperatury w strefach pod sufitem, z wyłączeniem punktu zasilającego oraz najbliższego obszaru oddziaływania systemu grzewczego, w stosunku do temperatury rejestrowanej przy posadzce w innych punktach obiektu.



Rys. 3. Rozkład temperatury w przyjętym modelu Katedry Opolskiej  
Fig. 3. Temperature layout used in the model of Opole Cathedral Church



Rys. 4. Rozkład temperatury w wybranych płaszczyznach pionowych modelu Katedry Opolskiej

Fig. 4. Temperature layout in chosen vertical planes in the model of Opole Cathedral Church

Na rys. 4 przedstawiono rozkład temperatury występujący w wybranych płaszczyznach pionowych modelu. Widoczne różnice w poszczególnych miejscach z wyłączeniem powierzchni, która zasila obiekt w ciepło, są niewielkie i nie przekraczają  $2^\circ\text{C}$ . Najwyższe rejestrowane wartości temperatury w występują w strefie podsufitowej.

#### 5. Wnioski

Na podstawie przeprowadzonych prac symulacyjnych otrzymano zadowalające wyniki teoretycznego rozkładu temperatury. W następnym etapie badań zostały one porównane z wynikami pomiarów przeprowadzonych w obiekcie rzeczywistym, co pozwoliło na ich weryfikację. Modelowanie matematyczne i symulacja komputerowa należą obecnie do podstawowych metod badawczych w wielu dziedzinach. Narzędzia te powinny być również szerzej wykorzystywane w procesie projektowania systemów grzewczych dla obiektów sakralnych, wymagających ze względu na swoją specyfikę i różnorodność, każdorazowo indywidualnego podejścia projektowego.

#### 6. Literatura

- [1] Arendt C.: Kirchenheizung und Denkmalschutz. Heizung Lüftung/Klima Haustechnik. HLH, vol 27, 1976, 435-441.
- [2] Ende G.: Planung und Berechnung von Kirchenheizungen. Sanitar und Heizungstechnik 5, 1968, 267-271.
- [3] Kaim S., Rojek R., Wrzuszczak M.: Wybrane zagadnienia fizyki matematycznej. Modelowanie. OW PO, Opole 2008.
- [4] Krischer O., Kast W.: Wärmebedarf beim Anheizen Selten benutzter Räume. Ges. Ing. 78, 1957, 321-325.
- [5] Lorenc M.: Charakterystyka systemu pomiarowego rozkładu pól temperaturowych występujących w obiektach wielkogabarytowych. PAK, nr 02, 2008, str. 52-56.
- [6] Lorenc M.: Metody i wyniki pomiarów pól temperaturowych w obiektach wielkogabarytowych. PAK nr 02, 2009, str.79-82.
- [7] Multiphysics, Comsol. Modeling Guide Version 3.3. 2006.
- [8] Multiphysics, Comsol. User's Guide Version 3.3. 2006.
- [9] Praca zbiorowa pod red. Dytczak M.: Modelowanie matematyczne procesów zaopatrzenia w ciepło i energię. Wyd. Federacji Stowarzyszeń Naukowo-Technicznych Energetyka i Środowisko, Warszawa-Opole 2006.

otrzymano / received: 09.03.2010  
przyjęto do druku / accepted: 12.04.2010

artykuł recenzowany