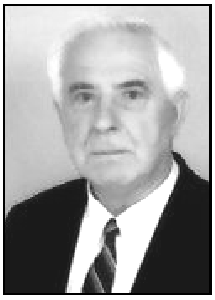
Tadeusz KACZOREK [*], **Robert CIMOCHOWSKI**
[*] POLITECHNIKA BIAŁOSTOCKA, WYDZIAŁ ELEKTRYCZNY
ul. Wiejska 45D, 15-351 Białystok

Stabilność asymptotyczna według składowych i stabilność wykładnicza dodatnich dyskretnych układów liniowych niecałkowitego rzędu

Prof. dr hab. inż. Tadeusz KACZOREK

Tytuł naukowy profesora zwyczajnego otrzymał w roku 1974. Jest członkiem rzeczywistym PAN i członkiem honorowym Węgierskiej Akademii Nauk. Otrzymał doktoraty honoris causa 7 polskich uczelni. Główne kierunki badań naukowych to analiza i synteza układów wielowymiarowych, układy dodanie i układy niecałkowitego rzędu. Opublikował 23 książki, w tym 6 w języku angielskim oraz ponad 900 prac naukowych. Wypromował 69 doktorów.



e-mail: kaczorek@isep.pw.edu.pl

Mgr inż. Robert CIMOCHOWSKI

Urodził się w 1985 roku w Grajewie. Studiował na Wydziale Elektrycznym Politechniki Białostockiej na kierunku Elektrotechnika (specjalność: Automatyka i Technika Mikroprocesorowa). Dyplom magistra inżyniera elektryka uzyskał w 2009 roku. W tym samym roku podjął studia doktoranckie na Wydziale Elektrycznym Politechniki Białostockiej. Przygotowuje pracę doktorską z zakresu teorii układów dodatnich.

e-mail: rcimochowski@wp.pl

Streszczenie

Podano podstawowe definicje i twierdzenia dotyczące dodatnich układów dyskretnych niecałkowitego rzędu oraz omówiono ich stabilność asymptotyczną. Podano warunki konieczne i wystarczające stabilności asymptotycznej według składowych i stabilności wykładniczej dodatnich układów dyskretnych niecałkowitego rzędu. Przedstawiono przykłady numeryczne ilustrujące problem stabilności asymptotycznej według składowych i stabilności wykładniczej.

Słowa kluczowe: liniowe układy dyskretne niecałkowitego rzędu, dodatniość, stabilność asymptotyczna według składowych, stabilność wykładnicza.

Componentwise asymptotic stability and exponential stability of the positive fractional discrete-time linear systems

Abstract

In positive systems inputs, state variables and outputs take only non-negative values. Examples of positive systems are industrial processes involving chemical reactors, heat exchangers and distillation columns, storage systems, compartmental systems, water and atmospheric pollution models. A variety of models having positive linear systems behaviour can be found in engineering, management science, economics, social sciences, biology and medicine, etc. Positive linear systems are defined on cones and not on linear spaces. Therefore, the theory of positive systems is more complicated and less advanced. The concept of positive fractional discrete-time linear systems has been introduced in [6] and the reachability and controllability to zero of positive fractional system has been investigated in [10]. In this paper the problem of the componentwise asymptotic stability and exponential stability of the positive fractional systems will be solved. The paper is organized as follows. In section 2 the basic definitions and theorems concerning the positive fractional systems are recalled and their asymptotic stability is discussed. The main result of the paper is presented in section 3 and 4. Necessary and sufficient conditions for the componentwise asymptotic stability and exponential stability of the positive fractional systems are established. The considerations are illustrated by numerical examples in section 5. The algorithm in MATLAB, which allows the test of the componentwise asymptotic stability and exponential stability of the positive fractional systems is presented. How does presented procedure work is step-by step described. In section 6 the relationship between the componentwise asymptotic stability and exponential stability is presented. Concluding remarks and open problems are given in section 7.

Keywords: linear discrete-time fractional systems, positivity, componentwise asymptotic stability, exponential stability.

1. Wprowadzenie

W układach dodatnich wymuszenia, zmienne stanu, odpowiedzi i warunki początkowe przyjmują wartości nieujemne. Przykładami takich układów są procesy w reaktorach chemicznych, w wymiennikach ciepła, w kolumnach destylacyjnych, itp. Z układami takimi często spotykamy się w technice, ekonomii, medycynie, itp. Literatura dotycząca układów dodatnich jest dość bogata [3, 4, 6].

Problem stabilności asymptotycznej dodatnich układów niecałkowitego rzędu był rozpatrywany w pracach [1, 2, 5-9].

W pracy tej zostaną podane warunki konieczne i wystarczające stabilności asymptotycznej według składowych i stabilności wykładniczej dodatnich układów dyskretnych niecałkowitego rzędu. Rozwiązanie problemu stabilności według składowych i stabilności wykładniczej dodatnich układów niecałkowitego rzędu zostanie przedstawione na przykładzie numerycznym. Podano w środowisku MATLAB program umożliwiający badanie stabilności według składowych i wykładniczej układów niecałkowitego rzędu. Program ten może znaleźć zastosowanie między innymi przy badaniu układów regulacji automatycznej.

Praca ma następującą strukturę. W punkcie 2 podane są podstawowe definicje i twierdzenia dotyczące dodatnich układów dyskretnych niecałkowitego rzędu. W punkcie 3 podano warunki konieczne i wystarczające stabilności asymptotycznej według składowych dodatnich układów niecałkowitego rzędu. W punkcie 4 podano warunki konieczne i wystarczające stabilności wykładniczej dodatnich układów niecałkowitego rzędu. W kolejnym punkcie przedstawiono przykład numeryczny rozwiązany przy pomocy podanego programu. W punkcie 6 podano zależność między stabilnością asymptotyczną według składowych oraz stabilnością wykładniczą. Punkt 7 zawiera podsumowanie pracy oraz problemy otwarte.

2. Dodatnie układy dyskretne niecałkowitego rzędu

Skorzystajmy z definicji różnicy wstecznej niecałkowitego rzędu w postaci [10]

$$\Delta^{\alpha} x_k = \sum_{j=0}^{k} (-1)^j \binom{\alpha}{j} x_{k-j}, \quad k \in Z_+ = \{0, 1, 2, \ldots\} \tag{1}$$

przy czym $\alpha \in \Re$, $n-1 < \alpha < n \in N = \{1,2,\ldots\}$ jest rzędem różnicy wstecznej oraz

$$\binom{\alpha}{j} = \begin{cases} 1 & dla \quad j = 0 \\ \dfrac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-j+1)}{j!} & dla \quad j > 0 \end{cases} \tag{2}$$

Rozpatrzmy liniowy dyskretny układ niecałkowitego rzędu opisany równaniami

$$\Delta^{\alpha} x_{k+1} = Ax_k + Bu_k, \quad k \in Z_+ \tag{3a}$$

$$y_k = Cx_k + Du_k \tag{3b}$$

przy czym $x_k \in \Re^n$, $u_k \in \Re^m$, $y_k \in \Re^p$ są odpowiednio wektorem stanu, wymuszenia i odpowiedzi, a $A \in \Re^{n\times n}$, $B \in \Re^{n\times m}$, $C \in \Re^{p\times n}$, $D \in \Re^{p\times m}$.

Korzystając z (1) możemy równania (3) napisać w postaci

$$x_{k+1} = A_\alpha x_k + \sum_{j=2}^{k+1} c_j x_{k-j+1} + Bu_k, \quad k \in Z_+ \tag{4a}$$

$$y_k = Cx_k + Du_k \tag{4b}$$

gdzie:

$$A_\alpha = A + I_n\alpha, \; c_j = (-1)^{j+1}\binom{\alpha}{j} \tag{4c}$$

Korzystając z (2), łatwo pokazać [8, 10], że $c_k > 0$ dla $k = 1,2,\ldots$

Niech $\Re_+^{n\times m}$ będzie zbiorem $n\times m$ macierzy o elementach nieujemnych oraz $\Re_+^n = \Re_+^{n\times 1}$.

Definicja 2.1 [4] Układ opisany równaniami (4) nazywamy (wewnętrznie) dodatnim wtedy i tylko wtedy, gdy dla dowolnego $x_0 \in \Re_+^n$ i dla każdego ciągu wymuszeń $u_k \in \Re_+^m$, $k \in Z_+$, zachodzi $x_k \in \Re_+^n$ oraz $y_k \in \Re_+^p$ dla wszystkich $k \in Z_+$.

Twierdzenie 2.1 [10]. Dyskretny układ niecałkowitego rzędu (4) jest dodatni dla $0 < \alpha < 1$ wtedy i tylko wtedy, gdy

$$A_\alpha \in \Re_+^{n\times n}, \; B \in \Re_+^{n\times m}, \; C \in \Re_+^{p\times n}, \; D \in \Re_+^{p\times m} \tag{5}$$

Twierdzenie 2.2 [7, 10]. Rozwiązanie równania (4a) dla warunku początkowego x_0 ma postać

$$x_k = \Phi_k x_0 + \sum_{i=0}^{k-1} \Phi_{k-i-1} Bu_i \tag{6}$$

gdzie Φ_k określone jest następującą zależnością rekurencyjną

$$\Phi_{k+1} = (A + I_n\alpha)\Phi_k + \sum_{i=2}^{k+1} (-1)^{i+1}\binom{\alpha}{i}\Phi_{k-i+1} \tag{7}$$

dla $\Phi_0 = I_n$.

Definicja 2.2 [7]. Dodatni układ niecałkowitego rzędu (4) nazywamy asymptotycznie stabilnym wtedy, gdy rozwiązanie

$$x_k = \Phi_k x_0 \tag{8}$$

równania (4a) dla $B = 0$ spełnia warunek $\lim_{k\to\infty} x_k = 0$ dla każdego $x_0 \in \Re_+^n$.

Z (2) i (4c) wynika, że współczynniki c_j silnie maleją wraz ze wzrostem *j*. W praktyce zakłada się, że *j* jest ograniczone przez pewną liczbę naturalną *h*. W takim przypadku równanie (4a) przyjmuje postać

$$x_{k+1} = A_\alpha x_k + \sum_{j=2}^{h+1} c_j x_{k-j+1} + Bu_k, \quad k \in Z_+ \tag{9}$$

Dodatni układ niecałkowitego rzędu (4a) nazywamy stabilnym praktycznie wtedy i tylko wtedy, gdy układ (9) jest asymptotycznie stabilny.

Definicja 2.2'. Dodatni układ niecałkowitego rzędu (4a) nazywamy asymptotycznie stabilnym wtedy, gdy układ jest stabilny praktycznie dla $h \to \infty$.

Łatwo jest wykazać, że definicje 2.2 i 2.2' są równoważne.

Zauważmy, że dodatni układ niecałkowitego rzędu (4a) jest układem z rosnącą liczbą opóźnień. Jak wiadomo [2, 5] stabilność asymptotyczna dodatniego układu dyskretnego z opóźnieniami nie zależy od liczby i wielkości opóźnień, a tylko od sumy macierzy stanu.

Twierdzenie 2.3 [7]. Dodatni układ dyskretny niecałkowitego rzędu (4a) jest asymptotycznie stabilny wtedy i tylko wtedy, gdy dodatni liniowy układ dyskretny

$$x_{k+1} = \overline{A}x_k, \; \overline{A} = A + I_n \tag{10}$$

jest asymptotycznie stabilny.

Stosując do układu (10) twierdzenie podane w [2, 5] otrzymujemy:

Twierdzenie 2.4 [7]. Dodatni układ dyskretny niecałkowitego rzędu (4a) jest asymptotycznie stabilny wtedy i tylko wtedy, gdy jest spełniony jeden z poniższych równoważnych warunków:

1) Wszystkie minory główne macierzy $I_n - \overline{A}$ są dodatnie

2) Wszystkie współczynniki wielomianu charakterystycznego

$$\det[I_n z - A] = z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \ldots + a_1 z + a_0 \tag{11}$$

macierzy $A = \overline{A} - I_n$ są dodatnie

$$x_{k+1} = \overline{A}x_k, \; \overline{A} = A_\alpha + \sum_{j=2}^{\infty} c_j I_n \tag{12}$$

jest asymptotycznie stabilny.

W pracy [22] udowodniono, że

$$\sum_{j=0}^{\infty} c_j = 0 \tag{13}$$

Biorąc pod uwagę, że $c_0 = -1$, $c_1 = \alpha$ z (13) otrzymamy

$$\sum_{j=2}^{\infty} c_j = 1 - \alpha \tag{14}$$

Podstawiając (14) do (12) otrzymujemy

$$\overline{A} = A + I_n \tag{15}$$

Stosując do układu (12), którego macierz stanu ma postać (15) twierdzenie podane w [2, 5] otrzymujemy:

Twierdzenie 2.4 [7]. Dodatni układ dyskretny niecałkowitego rzędu (4a) jest asymptotycznie stabilny wtedy i tylko wtedy, gdy jest spełniony jeden z poniższych równoważnych warunków:

3) Wszystkie minory główne macierzy $I_n - \overline{A}$ są dodatnie

4) Wszystkie współczynniki wielomianu charakterystycznego

$$\det[I_n z - A] = z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \ldots + a_1 z + a_0 \tag{16}$$

macierzy $A = \overline{A} - I_n$ są dodatnie.

3. Stabilność asymptotyczna według składowych dodatnich układów niecałkowitego rzędu

Weźmy pod uwagę układ dodatni opisany równaniem

$$x_{k+1} = \overline{A}x_k \tag{17}$$

przy czym $x_k \in \Re_+^n$ jest wektorem stanu, natomiast macierz $\overline{A} = [\overline{a}_{ij}]x_k \in \Re_+^{n\times n}$ jest określona zależnością (12).

Definicja 2.3. Układ dodatni (17) nazywamy stabilnym asymptotycznie według składowych (krótko: ws stabilnym), jeżeli dla każdego warunku początkowego $x_0 \in \Re_+^n$ istnieje wektor $\rho_k \in \Re_+^n$ spełniający warunek $\lim_{k\to\infty} \rho_k = 0$ taki, że

$$x_k \le \rho_k, \quad k \in Z_+ = \{1, 2, \ldots\} \tag{18}$$

przy czym x_k jest rozwiązaniem równania (17) z warunkiem początkowym x_0.

Twierdzenie 2.5. Układ dodatni (17) jest ws stabilny wtedy i tylko wtedy, gdy wektor ρ_k spełnia nierówność różnicową

$$\rho_{k+1} \ge \overline{A}\rho_k \tag{19}$$

Dowód: Wykażemy, że jeżeli jest spełniona nierówność (19) to zachodzi nierówność (18). Niech $z_k = \rho_k - x_k$, $k \in Z_+$. Korzystając z nierówności (19) i (17) otrzymamy

$$z_{k+1} = \rho_{k+1} - x_{k+1} \le \overline{A}(\rho_k - x_k) = \overline{A}z_k$$

Wobec tego

$$z_{k+1} = \overline{A}z_k + m_k, \quad k \in Z_+ \tag{20}$$

przy czym:

$$m_k \in \Re_+^n$$

Rozwiązanie równania różnicowego (20) ma postać

$$z_k = \overline{A}^k z_0 + \sum_{i=0}^{k-1} \overline{A}^{k-i-1} m_i \tag{21}$$

Z (21) wynika, że $z_k \in \Re_+^n$, gdyż $m_i \in \Re_+^n$ dla $i \in Z_+$ jeżeli $\overline{A} \in \Re_+^{n\times n}$. Jeżeli więc jest spełniona nierówność (19), to zachodzi (18). Z kolei, stosując metodę przez zaprzeczenie wykażemy, że warunek (18) jest spełniony tylko wtedy, gdy zachodzi (19). Przypuśćmy, że dla *j*-tej składowej ρ_k^j wektora ρ_k nie jest spełniona nierówność (18), czyli

$$\rho_{k+1}^j < \sum_{i=1}^n \overline{a}_{ji}\rho_k^i, \quad j = 1,2,\ldots,n \tag{22}$$

gdzie $\overline{a}_{ji}$ jest (j,i) elementem macierzy $\overline{A}$.

Z (17) dla *j*-tej składowej x_k^j wektora x_k mamy $x_{k+1}^j = \sum_{i=1}^n \overline{a}_{ji}\rho_k^i$, a po uwzględnieniu (18) dostaniemy $\sum_{i=1}^n \overline{a}_{ji}x_k^i \le \sum_{i=1}^n \overline{a}_{ji}\rho_k^i \le \rho_{k+1}^i$. Otrzymaliśmy sprzeczność, a więc zachodzi (18). ■

4. Stabilność wykładnicza dodatnich układów niecałkowitego rzędu

Definicja 2.4. Układ dodatni (17) nazywamy stabilnym wykładniczo, jeżeli dla każdego warunku początkowego $x_0 \in \Re_+^n$ istnieją skalar $0 < \beta < 1$ oraz wektor $\gamma > 0$ taki, że

$$x_k \le \gamma\beta^k, \quad k \in Z_+ \tag{23}$$

Twierdzenie 2.6. Dodatni układ dyskretny niecałkowitego rzędu (17) jest stabilny wykładniczo wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\left[I\beta - \overline{A}\right]\gamma \ge 0 \tag{24}$$

oraz

$$1 > \beta \ge \max_k \left(\frac{\sum_{j=1}^n \overline{a}_{kj}\gamma_j}{\gamma_k} \right) \tag{25}$$

Dowód: Podstawiając $\rho_k = \gamma\beta^k$ do (19) otrzymamy $\rho_{k+1} = \gamma\beta^{k+1} \ge \overline{A}\gamma\beta^k$ czyli $\left[I\beta - \overline{A}\right]\gamma\beta^k \in \Re_+^{n\times n}$, a po uproszczeniu przez β^k, zależność (24). Z (24) dla *k*-tej składowej γ_k wektora γ mamy $\beta\gamma_k \ge \sum_{j=1}^n \overline{a}_{kj}\gamma_j$, a po podzieleniu przez $\gamma_k > 0$ otrzymujemy (25). ■

5. Przykład numeryczny

Rozpatrzmy układ niecałkowitego rzędu $\alpha = 0.5$ o macierzy $A = \begin{bmatrix} -0.5 & 0.3 \\ 0.3 & -0.5 \end{bmatrix}$ i warunku początkowym $x_0 = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}$. Układ jest dodatni, gdyż

$$A_\alpha = A + I_n\alpha = \begin{bmatrix} 0 & 0.3 \\ 0.3 & 0 \end{bmatrix} \in \Re_+^{2\times 2}$$

Macierz stanu układu dodatniego niecałkowitego rzędu ma postać

$$\overline{A} = A + I_n = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.3 \\ 0.3 & 0.5 \end{bmatrix}$$

Wielomian charakterystyczny tej macierzy ma postać

$$\det\left[I_n z - \overline{A}\right] = \begin{bmatrix} z-0.5 & -0.3 \\ -0.3 & z-0.5 \end{bmatrix} = z^2 - z + 0.16$$

a jej wartości własne są równe $z_1 = 0.2$, $z_2 = 0.8$

Wybierając $\beta = 0.9$ oraz korzystając z zależności (24), otrzymamy

$$\left[I\beta - \overline{A}\right]\gamma = \begin{bmatrix} 0.4 & -0.3 \\ -0.3 & 0.4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \end{bmatrix} \ge \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Wybieramy takie wartości γ_1 i γ_2, które spełniają powyższy warunek oraz warunek (23) dla $k = 0$, czyli $\gamma \ge x_0$.

Korzystając ze wzoru Sylvestera wyznaczamy macierz

$$\overline{A}^k = \frac{\overline{A} - Iz_2}{z_1 - z_2} z_1^k + \frac{\overline{A} - Iz_1}{z_2 - z_1} z_2^k =$$

$$= \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\left(\frac{2}{10}\right)^k + \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\left(\frac{8}{10}\right)^k = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\left(\frac{2}{10}\right)^k +$$

$$+ \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 4^k & 4^k \\ 4^k & 4^k \end{bmatrix}\left(\frac{2}{10}\right)^k = \frac{1}{2}\left(\frac{2}{10}\right)^k \begin{bmatrix} 4^k+1 & 4^k-1 \\ 4^k-1 & 4^k+1 \end{bmatrix}$$

Rozwiązanie x_k, odpowiadające warunkowi początkowemu $x_0 = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}$, ma więc postać $x_k = \overline{A}^k x_0 = \left(\frac{8}{10}\right)^k \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

Wobec tego, dla $\beta = \frac{9}{10}$ i $\gamma = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}$, otrzymamy $\rho_k \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}\left(\frac{9}{10}\right)^k$, które spełnia warunek (23). Układ ten jest więc stabilny wykładniczo.

Dla tych samych wartości β i γ otrzymamy

$$\rho_{k+1} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix} \left(\frac{9}{10} \right)^{k+1} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix} \left(\frac{9}{10} \right)^{k} \left(\frac{9}{10} \right) = \begin{bmatrix} 1.8 \\ 1.8 \end{bmatrix} \left(\frac{9}{10} \right)^{k}$$

oraz

$$\overline{A}\rho_k = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.3 \\ 0.3 & 0.5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix} \left(\frac{9}{10} \right)^{k} = \begin{bmatrix} 1.6 \\ 1.6 \end{bmatrix} \left(\frac{9}{10} \right)^{k}$$

które spełniają warunek (19). Układ ten jest również stabilny asymptotycznie według składowych.

Na podstawie przedstawionych w rozdziałach 3 i 4 rozważań, został opracowany program komputerowy działający w środowisku programowym MATLAB. Kod źródłowy programu w formie m-pliku dostępny jest pod adresem e-mail autorów.

Program przeznaczony jest do badania stabilności asymptotycznej według składowych oraz stabilności wykładniczej dodatnich układów dyskretnych niecałkowitego rzędu. Po uruchomieniu programu zostaje wyświetlony jego opis. Następnie użytkownik wprowadza dane w postaci macierzy stanu, podaje warunki początkowe oraz rząd układu. W kolejnym kroku program sprawdza czy rozpatrywany układ jest dodatni. Jeżeli warunki dodatniości nie są spełnione program wraca do momentu, gdzie użytkownik wprowadza dane. Następnie wyznaczany jest wielomian charakterystyczny oraz wartości własne macierzy $\overline{A}$. Dalej użytkownik podaje wartości parametrów β i γ, a program sprawdza czy spełniają one odpowiednie warunki. Dopóki warunki (23), (24) i (25) nie zostaną spełnione praca programu nie będzie kontynuowana. Jeżeli zaś warunki będą spełnione program wyznaczy macierz $\overline{A}^k$, x_k oraz ρ_k. Następnie program sprawdza czy rozpatrywany układ jest stabilny wykładniczo. Użytkownik może kontynuować działanie programu i sprawdzić czy rozpatrywany układ jest stabilny ws. W tym celu program wyznacza ρ_{k+1} oraz $\overline{A}\rho_k$ i sprawdza czy zachodzi warunek (19). Użytkownik może również sprawdzić czy rozpatrywany układ jest stabilny asymptotycznie. Dlatego może skorzystać z dwóch kryteriów przedstawionych w twierdzeniu 2.4.

Program jest przejrzysty i łatwy w obsłudze, gdyż w odpowiednich miejscach pojawiają się stosowne opisy i komunikaty.

6. Zależność między stabilnością asymptotyczną według składowych oraz stabilnością wykładniczą

Z definicji 2.3 i 2.4 wynika, że każdy układ dodatni niecałkowitego rzędu (17) ws stabilny lub stabilny wykładniczo jest również stabilny asymptotycznie.

Sprawdźmy, czy rozpatrywany dodatni układ niecałkowitego rzędu jest faktycznie stabilny asymptotycznie. Wielomian charakterystyczny ma postać

$$\det\left[I_n z - A\right] = \begin{bmatrix} z+0.5 & -0.3 \\ -0.3 & z+0.5 \end{bmatrix} = z^2 + z + 0.16$$

Wszystkie współczynniki wielomianu charakterystycznego macierzy $A = \overline{A} - I_n$ są dodatnie. Wobec tego rozpatrywany dodatni układ niecałkowitego rzędu jest stabilny asymptotycznie.

7. Podsumowanie i problemy otwarte

Zostały podane warunki konieczne i wystarczające stabilności asymptotycznej według składowych i stabilności wykładniczej dodatnich układów dyskretnych niecałkowitego rzędu. Rozważania zostały zilustrowane na przykładzie numerycznym. Program, działający w środowisku MATLAB, pozwala szybko zbadać, czy dany układ jest stabilny asymptotycznie według składowych lub stabilny wykładniczo. Przydatność programu wzrasta wraz ze wzrostem wymiaru macierzy A badanych układów.

Problemami otwartymi jest uogólnienie tych rozważań na:
1) dodatnie układy 2-W niecałkowitego rzędu
2) dodatnie układy niecałkowitego rzędu z opóźnieniami
3) dodatnie układy ciągło-dyskretne niecałkowitego rzędu

8. Literatura

[1] Busłowicz M.: Stability of linear continuous-time fractional order systems with delays of the retarded type. Bull. Pol. Acad. Sci. Techn., vol. 56, no. 4, pp. 319-324, 2008.

[2] Busłowicz M.: Simple stability conditions for linear positive discrete-time systems with delays. Bull. Pol. Acad. Sci. Techn., vol. 56, no. 4, pp. 325-328, 2008.

[3] Farina L., Rinaldi S.: Positive Linear Systems; Theory and Applications, J. Wiley, New York 2000.

[4] Kaczorek T.: Positive 1D and 2D Systems, Springer-Verlag, London 2002.

[5] Kaczorek T.: Asymptotic stability of positive 1D and 2D linear systems, recent Advances in Control and Automation, Acad. Publ. House EXIT, 41-52, 2008.

[6] Kaczorek T.: Practical stability of positive fractional discrete-time systems, Bull. Pol. Acad. Sci. Techn.. Vol. 56, no. 4, 313-318, 2008.

[7] Kaczorek T.: Stabilization of fractional discrete-time linear systems using state-feedback. Proc. Conf. LOGITRANS, April 15-17, Szczyrk 2009.

[8] Kaczorek T.: Positivity and stabilization of 2D linear systems. Discussiones Mathematicae (w druku), 2009.

[9] Kaczorek T.: Positivity and stabilization of 2D linear systems with delays, Materiały Konf. MMAR w Międzyzdrojach, 2009.

[10] Kaczorek T.: Reachability and controllability to zero of positive fractional discrete-time systems, Machine Intelligence and Robotic Control, vol. 6, no. 4, 2007.

[11] Oldham K. B., Spanier J.: The Fractional Calculus. New York: Academmic Press, 1974.

[12] Ortigueira M. D.: Fractional discrete-time linear systems. Proc. of the IEE-ICASSP 97, Munich, Germany, IEEE, New York, vol. 3, pp. 2241-2244.

[13] Ostalczyk P.: The non-integer difference of the discrete-time function and its application to the control system synthesis. Int. J. Syst, Sci. vol. 31, no. 12, 1551-1561, 2000.

[14] Ostalczyk P.: Fractional-Order Backward Difference Equivalent Forms Part I – Horner's Form. Proc. 1-st IFAC Workshop Fractional Differentation and its Applications, FDA'04, Enseirb, Bordeaux, France, 342-347, 2004.

[15] Ostalczyk P.: Fractional-Order Backward Difference Equivalent Forms Part II – Polynomial Form. Proc. 1st IFAC Workshop Fractional Differentation and its Applications, FDA'04, Enseirb, Bordeaux, France, 348-353, 2004.

[16] Ostalczyk P.: Zarys rachunku różniczkowo-całkowego ułamkowego rzędu. Oficyna Wydawnicza Politechnika Łódzka, 2008.

[17] Oustaloup A.: Commande CRONE. Paris, Hermés, 1993.

[18] Oustaloup A.: La dérivation non entiére. Paris: Hermés, 1995.

[19] Podlubny I.: Fractional Differential Equations. San Diego: Academic Press, 1999.

[20] Podlubny I.: Geometric and physical interpretation of fractional integration and fractional differentation. Fract. Calc. Appl. Anal. Vol. 5, no. 4, 367-386, 2000.

[21] Podlubny I., Dorcak L., Kostial I.: On fractional derivatives, fractional order systems and $PI^{\lambda}D^{\mu}$-controllers. Proc. 36th IEEE Conf. Decision and Control, San Diego, CA, 4985-4990, 1999.

[22] Sierociuk D.: Estymacja i sterowanie układów dyskretnych ułamkowego rzędu opisanych równaniami stanu. Praca doktorska na Politechnice Warszawskiej, 2007.

[23] Serociuk D., Dzieliński A.: Fractional Kalman filter algorithm for the states, parameters and order of fractional system estimation. Int. J. Appl. Math. Comp. Sci., vol. 16, no. 1, 129-140, 2006.

[24] Vinagre B. M., Monje C. A.,Calderon A.J.: Fractional order systems and fractional order control actions. Lecture 3 IEEE CDC'02 TW#2: Fractional Calculus Applications in Automatic Control and Robotics.

otrzymano / received: 23.02.2010
przyjęto do druku / accepted: 12.04.2010 *artykuł recenzowany*