Łukasz SAJEWSKI
POLITECHNIKA BIAŁOSTOCKA
ul. Wiejska 45D, 15-351 Białystok

Realizacje dodatnie dyskretnych liniowych układów niecałkowitego rzędu w oparciu o odpowiedź impulsową

Dr inż. Łukasz SAJEWSKI

Tytuł magistra inżyniera Elektrotechniki uzyskał w lipcu 2006 roku na Wydziale Elektrycznym Politechniki Białostockiej. Na tej samej uczelni w czerwcu 2009 roku, jako słuchacz 3 roku studiów doktoranckich obronił rozprawę doktorską otrzymując tytuł doktora nauk technicznych w dyscyplinie Elektrotechnika. Główny zakres jego zainteresowań naukowych to nowoczesna teoria sterowania w tym układy dodatnie i hybrydowe (ciągło-dyskretne).

e-mail: l.sajewski@pb.edu.pl

Streszczenie

Podane zostaną warunki zewnętrznej i wewnętrznej dodatniości dyskretnych liniowych układów niecałkowitego rzędu. Sformułowany zostanie problem realizacji dodatniej dla dyskretnych liniowych układów niecałkowitego rzędu. Podana zostanie metoda wyznaczania realizacji dodatniej na podstawie zadanej transmitancji operatorowej w oparciu o charakterystykę impulsową układu dyskretnego. Rozpatrzone zostaną dwa przypadki transmitancji operatorowej opisującej układ dyskretny niecałkowitego rzędu. Metoda zobrazowana zilustrowana przykładami numerycznymi.

Słowa kluczowe: realizacja dodatnia, układy dyskretne, układy niecałkowitego rzędu, charakterystyka impulsowa.

Positive realisation of linear discrete-time fractional-order systems based on impulse response

Abstract

Linear discrete-time fractional-order systems are dealt with in the paper. Conditions for external and internal positivity of linear discrete-time fractional-order systems with single-input and single-output (SISO) are presented. A positive realisation problem for linear discrete-time fractional systems is formulated. The method for finding positive realisation based on the impulse response for the known transfer function is given. There are considered two cases of the linear discrete-time fractional system transfer function. The considerations are illustrated by examples. In Section 2 of the paper there are presented the fundamentals of linear discrete-time fractional systems and the conditions for internal and external positivity are given. This section also contains formulation of the positive realisation problem for the class of linear discrete-time fractional systems. The main results and the procedure for computation of the positive realisation for the known linear discrete-time fractional system transfer function are given in Section 3. This section also contains some examples illustrating the method proposed. There are concluding remarks in Section 4.

Keywords: positive realisation, discrete-time fractional order system, impulse response.

1. Wstęp

W układach dodatnich wymuszenia, zmienne stanów oraz odpowiedzi przyjmują tylko wartości nieujemne. Taka sytuacja jest spotykana w wielu dziedzinach techniki, biologii, ekonomi, medycyny itp. Przykładem mogą być wymienniki ciepła, kolumny destylacyjne, modele populacji, modele epidemiologiczne, modele zanieczyszczenia środowiska. Ze względu na podane ograniczenia, w odróżnieniu od układów standardowych, teoria układów dodatnich opiera się na przestrzeniach stożków. Teoria takich układów jest trudniejsza i mniej zaawansowana.

Literatura dotycząca układów dodatnich jest dość bogata [3, 7]. Problem realizacji dla ciągłych i dyskretnych układów dodatnich z opóźnieniami jak i bez opóźnień był rozpatrywany w pracach [1, 3, 6, 7, 14, 15, 18].

W XIX wieku Liouville i Reimann przedstawili w pracach [24-26, 30] pierwszą definicję pochodnej niecałkowitego rzędu. Pomysł ten został dalej wykorzystany do modelowania różnego typu procesów [27-30]. Podstawy matematyczne dla układów niecałkowitego rzędu podane zostały w monografiach [24-26, 30]. Układy niecałkowitego rzędu znalazły wiele zastosowań miedzy innymi w regulatorach [29, 31] czy też w filtracji danych np. filtr Kalmana niecałkowitego rzędu [32]. Inne zastosowania teorii układów niecałkowitego rzędu można znaleźć w [2, 4, 28]. Dość obszerny przegląd teorii układów ciągłych i dyskretnych niecałkowitego rzędu można znaleźć w monografii [21]. Zastosowanie torii układów dodatnich w układach niecałkowitego rzędu daje nowe możliwości [17]. W chwili obecnej rozwój w tej dziedzinie jest dość intensywny, pojawiły się prace związane między innymi ze stabilnością [19], osiągalnością i sterowalnością [9-12] oraz problemem realizacji układów niecałkowitego rzędu [13, 16].

Głównym celem tej pracy jest podanie metody wyznaczania realizacji dodatniej układu dyskretnego niecałkowitego rzędu o znanej transmitancji, w oparciu o odpowiedz impulsową. Rozpatrzone zostały dwa przypadki zadanej transmitancji operatorowej – gdy znany jest rząd niecałkowity α transmitancji oraz gdy ten parametr jest nieznany. W przypadku nieznajomości parametru α zaproponowana zostanie metoda jego wyznaczenia. Rozważania poparte zostały przykładami numerycznymi.

Praca zorganizowana jest w sposób następujący: w rozdziale 2 podane są podstawowe informację dotyczące linowych dyskretnych układów niecałkowitego rzędu oraz sformułowane są warunki zewnętrznej i wewnętrznej dodatniości tej klasy układów. Rozdział 2 zawiera również sformułowanie problemu realizacji dodatniej dla linowych dyskretnych układów niecałkowitego rzędu. Główne wyniki oraz procedura wyznaczania realizacji dodatniej dla zadanej transmitancji liniowego układu dyskretnego niecałkowitego rzędu dane są w rozdziale 3. Rozdział ten zawiera również przykłady ilustrujące proponowaną metodę. Uwagi końcowe zawiera rozdział 4.

2. Układ dyskretny niecałkowitego rzędu

Weźmy pod uwagę dyskretny układ niecałkowitego rzędu opisany równaniami

$$\Delta^{\alpha} x_{k+1} = Ax_k + Bu_k \quad k \in Z_+ \tag{1a}$$

$$y_k = Cx_k + Du_k \tag{1b}$$

gdzie $x_k \in \Re^n$, $u_k \in \Re^m$, $y_k \in \Re^p$ są odpowiednio wektorem stanu, wymuszenia i odpowiedzi oraz $A \in \Re^{n\times n}$, $B \in \Re^{n\times m}$, $C \in \Re^{p\times n}, C \in \Re^{p\times m}$ są macierzami rzeczywistymi.

Definicja różniczki wstecznej funkcji x_k dana jest wzorem [17]

$$\Delta^{\alpha} x_k = \sum_{l=0}^{k} (-1)^l \binom{\alpha}{l} x_{k-l}, \quad 0 < \alpha < 1 \tag{2}$$

gdzie $\alpha \in R$ jest niecałkowitym rzędem pochodnej, oraz

$$\binom{\alpha}{l} = \begin{cases} 1 & dla \quad l = 0 \\ \dfrac{\alpha(\alpha-1)...(\alpha-l+1)}{l!} & dla \quad l = 1,2,... \end{cases}. \tag{3}$$

Korzystając z definicji (2) równania (1) można napisać w postaci

$$\Delta x_{k+1} + \sum_{l=1}^{k+1} (-1)^l \binom{\alpha}{l} x_{k-l+1} = Ax_k + Bu_k \quad k \in Z_+ \tag{4a}$$

$$y_k = Cx_k + Du_k \,. \tag{4b}$$

Rozwiązanie równania (4) ma postać [17]

$$x_k = \Phi_k x_0 + \sum_{l=0}^{k-1} \Phi_{k-l-1} B u_l \tag{5}$$

przy czym macierze Φ_k są określone następującą zależnością

$$\Phi_{k+1} = \Phi_k (A + \alpha I_n) + \sum_{l=2}^{k+1} (-1)^{l+1} \binom{\alpha}{l} \Phi_{k-l+1}, \; \Phi_0 = I_n \,. \tag{6}$$

Macierz transmitancji właściwych układu niecałkowitego rzędu ma postać [21]

$$T(z) = C[I_n(z - c_\alpha) - A]^{-1} B + D = \frac{N(z)}{d(z)} \tag{7}$$

gdzie

$$c_\alpha = c_\alpha(k, z) = \sum_{l=1}^{k+1} (-1)^{l-1} \binom{\alpha}{l} z^{1-l} \,, \; k = 1,2,\ldots \tag{8}$$

oraz

$$\begin{aligned} N(z) &= C\mathrm{Adj}[I_n(z - c_\alpha) - A]B + Dd(z) \\ &= N_n(z-c_\alpha)^n + \ldots + N_1(z-c_\alpha) + N_0 = \begin{bmatrix} \overline{N}_{11}(z) & \ldots & \overline{N}_{1m}(z) \\ \vdots & \ldots & \vdots \\ \overline{N}_{p1}(z) & \ldots & \overline{N}_{pm}(z) \end{bmatrix} \in \Re^{p\times m} \end{aligned} \tag{9a}$$

$$\overline{N}_{ij}(z) = \sum_{l=-n}^{qn} \overline{N}_{ij}^l z^{-l}, \; i = 1,\ldots,p; \; j = 1,\ldots,m$$

$$\begin{aligned} d(z) &= \det[I_n(z - c_\alpha) - A] \\ &= (z - c_\alpha)^n + a_{n-1}(z - c_\alpha)^{n-1} + \ldots + a_1(z - c_\alpha) + a_0 = \sum_{l=-n}^{qn} \overline{a}_l z^{-l} \end{aligned} \tag{9b}$$

Oznacza to, że transmitancja operatorowa może być dana w dwóch postaciach.

Postać a) jawna, gdy znane jest rząd α oraz c_α

$$T(z) = \frac{N_n(z - c_\alpha)^n + \ldots + N_1(z - c_\alpha) + N_0(z)}{(z - c_\alpha)^n + a_{n-1}(z - c_\alpha)^{n-1} + \ldots + a_1(z - c_\alpha) + a_0} \,. \tag{10a}$$

Postać b) niejawna, gdy rząd α jest nieznany a znana jest liczba q.

$$T(z) = \frac{\overline{N}_n z^n + \ldots + \overline{N}_1 z + \overline{N}_0 + \overline{N}_{-1} z^{-1} + \ldots + \overline{N}_{-qn} z^{-qn}}{z^n + \overline{a}_{n-1} z^{n-1} + \ldots + \overline{a}_1 z + \overline{a}_0 + \overline{a}_{-1} z^{-1} + \ldots + \overline{a}_{-qn} z^{-qn}} \,. \tag{10b}$$

Uwaga 1. Z zależności (8) wynika, że współczynniki wielomianu $c_\alpha(k,z)$ szybko maleją przy rosnącym k, dlatego też w praktycznych przypadkach stosuje się ograniczenie $k = q$.

Definicja 1. Układ ułamkowego rzędu (1) jest nazywany zewnętrznie dodatnim wtedy i tylko wtedy, gdy $y_k \in \Re_+^p, k \in Z_+$ dla wszystkich wymuszeń $u_k \in \Re_+^m, k \in Z_+$ oraz zerowych warunków początkowych $x_0 = 0$.

Definicja 2. Charakterystyką impulsową układu liniowego o jednym wejściu i jednym wyjściu nazywamy odpowiedź tego układu na wymuszenie w postaci impulsu jednostkowego przy zerowych warunkach początkowych.

Twierdzenie 1. [17] Dyskretny układ niecałkowitego rzędu (4) jest zewnętrznie dodatni wtedy i tylko wtedy, gdy jego macierz charakterystyk impulsowych

$$g_l = \begin{cases} D & \text{dla } \; l = 0 \\ C\Phi_{l-1} B & \text{dla } \; l = 1,2,\ldots \end{cases} \tag{11}$$

jest nieujemna

$$g_l \in \Re_+^{p\times m}, \, l \in Z_+ \,. \tag{12}$$

Definicja 3. Dyskretny układ niecałkowitego rzędu (4) jest nazywany wewnętrznie dodatnim wtedy i tylko wtedy, gdy $x_k \in \Re_+^n$, oraz $y_k \in \Re_+^p$, $k \in Z_+$ dla warunków początkowych $x_0 \in \Re_+^n$, oraz wszystkich wymuszeń $u_k \in \Re_+^m$, $k \in Z_+$.

Lemat 1. [17] Jeżeli

$$0 < \alpha \le 1 \tag{15}$$

wtedy

$$(-1)^{l+1} \binom{\alpha}{l} > 0 \;\; \text{dla } \; l = 1,2,\ldots. \tag{16}$$

Twierdzenie 2. [17] Niech $0 < \alpha < 1$ wtedy układ niecałkowitego rzędu (4) jest wewnętrznie dodatni wtedy i tylko wtedy, gdy

$$A + I_n\alpha \in \Re_+^{n\times n}, \;\; B \in \Re_+^{n\times m}, \;\; C \in \Re_+^{p\times n}, C \in \Re_+^{p\times m} \,. \tag{17}$$

Uwaga 2. Macierz odpowiedzi impulsowych (12) wewnętrznie dodatniego układu niecałkowitego rzędu (4) jest nieujemna oraz każdy wewnętrznie dodatni układ dyskretny niecałkowitego rzędu jest układem zewnętrznie dodatnim.

Zadanie realizacji dodatniej sformułowane jest w sposób następujący.

Dana jest macierz transmitancji właściwych $T(z)$ dyskretnego układu niecałkowitego rzędu wyznacz macierze A, B, C, D spełniające zależność (17).

3. Realizacje dodatnie dyskretnego układu niecałkowitego rzędu typu SISO

Macierz stanu D układu (4) o transmitancji (7) można wyznaczyć z dobrze znanej zależności [7]

$$\lim_{z\to\infty} T(z) = D \tag{18}$$

gdyż $\lim_{z\to\infty} [I_n(z - c_\alpha) - A]^{-1} = 0$.

Transmitancja właściwa i ściśle właściwa powiązane są ze sobą następującą zależnością

$$T_{sp}(z) = T(z) - D = C[I_n(z - c_\alpha) - A]^{-1} B \,. \tag{19}$$

Rozpatrując dalej transmitancję ściśle właściwą poszukiwać będziemy trójki macierzy A, B, C.

Zgodnie z zależnościami (10) mamy do czynienia z dwoma postaciami zadanej transmitancji operatorowej dyskretnego liniowego układu niecałkowitego rzędu.

W przypadku transmitancji operatorowej o postaci (10a) wyznaczenie realizacji jest zadaniem prostszym. Stosując podejście podobne jak w [7] ściśle właściwą transmitancję operatorową układu niecałkowitego rzędu można przedstawić za pomocą charakterystyki impulsowej $g_l \in Z_+$

$$T(z) = \frac{b_{n-1}(z-c_\alpha)^{n-1} + \ldots + b_1(z-c_\alpha) + b_0}{(z-c_\alpha)^n + a_{n-1}(z-c_\alpha)^{n-1} + \ldots + a_1(z-c_\alpha) + a_0} = \sum_{l=1}^{\infty} g_l (z-c_\alpha)^{-i} \quad (20)$$

$(g_0 = D)$ oraz napisać w następującej postaci

$$\begin{aligned} & b_{n-1}(z-c_\alpha)^{n-1} + b_{n-2}(z-c_\alpha)^{n-2} + \ldots + b_1(z-c_\alpha) + b_0 \\ & = \left((z-c_\alpha)^n + a_{n-1}(z-c_\alpha)^{n-1} + \ldots + a_1(z-c_\alpha) + a_0\right) \\ & \times \left(g_1(z-c_\alpha)^{-1} + g_2(z-c_\alpha)^{-2} + g_3(z-c_\alpha)^{-3} + \ldots\right) \end{aligned} \quad (21)$$

Porównując współczynniki po obu stronach równania przy tych samych potęgach zmiennej $(z - c_\alpha)$ w (21) otrzymamy

$$\begin{aligned} & b_{n-1} = g_1,\ b_{n-2} = g_2 + a_{n-1}g_1,\ b_{n-3} = g_3 + a_{n-1}g_2 + a_{n-2}g_1,\ \ldots, \\ & b_{n-l} = g_l + a_{n-1}g_{l-1} + a_{n-2}g_{l-2} + \ldots + a_{n-l-1}g_1 . \end{aligned} \quad (22)$$

Znając współczynniki mianownika a_i oraz licznika b_i dla i = 0,1, …,n-1 transmitancji ściśle właściwej (20), możemy wyznaczyć wartości odpowiedzi impulsowej g_l dla l = 1,2,… które dane będą następującą zależnością

$$g_1 = b_{n-1},\ g_2 = b_{n-2} - a_{n-1}g_1,\ g_3 = b_{n-3} - a_{n-1}g_2 - a_{n-2}g_1,\ \ldots \quad (23a)$$

$$g_l = \begin{cases} b_{n-l} - a_{n-1}g_{l-1} - a_{n-2}g_{l-2} - \ldots - a_{n-l-1}g_1 & \text{dla } 1 \le l < n \\ -a_{n-1}g_{l-1} - a_{n-2}g_{l-2} - \ldots - a_1 g_{l-n+1} - a_0 g_{l-n} & \text{dla } l \ge n \end{cases} \quad (23b)$$

Z (23) wynika natychmiast, że jeżeli $a_i \le 0$ oraz $b_i \ge 0$ dla i = 0,1, …,n-1; to $g_l \ge 0$ dla l = 1,2…

Twierdzenie 3. Jeżeli $a_i \le 0$ dla i = 0, 1,…, n-1 oraz $g_l \ge 0$ dla l = 1,2,…,n to istnieją realizacje dodatnie transmitancji ściśle właściwej (20) odpowiednio o postaciach

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \ldots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & \ldots & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 & -a_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 & -a_{n-1} \end{bmatrix},\ B_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$C_1 = [g_1 \ \ g_2 \ \ g_3 \ \ \ldots \ \ g_n] \quad (24)$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \ldots & -a_{n-1} \end{bmatrix},\ B_2 = \begin{bmatrix} g_1 \\ g_2 \\ g_3 \\ \vdots \\ g_n \end{bmatrix},$$

$$C_2 = [1 \ \ 0 \ \ \ldots \ \ 0 \ \ 0] \quad (25)$$

natomiast macierz D dana jest zależnością (18).

Dowód twierdzenia jest identyczny jak w [7]. □

Przypadek transmitancji operatorowej w postaci (10b) jest trudniejszy, gdyż nie jest tam znany rząd α. Aby skorzystać z metody wyznaczania realizacji dodatniej przedstawionej wyżej należy wyznaczyć parametr α który jest niezbędny do przedstawienia zadanej transmitancji w postaci (10a).

Proponowana metoda jest następująca. Aby transmitancje (10a) oraz (10b) opisywały ten sam układ muszą zachodzić zależności:

$$\sum_{l=0}^{n} N_{ij}^l (z-c_\alpha)^l = \sum_{l=-n}^{qn} \overline{N}_{ij}^l z^{-l},\ i=1,\ldots,p;\ j=1,\ldots,m \quad (26a)$$

$$\sum_{l=0}^{n} a_l (z-c_\alpha)^l = \sum_{l=-n}^{qn} \overline{a}_l z^{-l} \quad (26b)$$

Weźmy pod uwagę zależność (26b).

Dla n = 1, q = 1 mamy

$$a_0 + a_1(z-c_\alpha) = \overline{a}_{-1}z + \overline{a}_0 + \overline{a}_1 z^{-1} \quad (27a)$$

oraz

$$c_\alpha = c_0 + c_1 z^{-1} = \binom{\alpha}{1} - \binom{\alpha}{2} z^{-1} \quad (27b)$$

Po podstawieniu (28) do (27) i porównaniu współczynników przy tych samych potęgach zmiennej z otrzymamy $\overline{a}_1 = -a_1 c_1$, $\overline{a}_0 = a_0 - a_1 c_0$, $\overline{a}_{-1} = a_1$. Przy założeniu, że znamy $\overline{a}_1$, $\overline{a}_0$, $\overline{a}_{-1}$ poszukiwać będziemy a_1, a_0 przy czym $a_1 = \overline{a}_{-1}$, $a_0 = \overline{a}_0 + \overline{a}_{-1}c_0$, $c_1 = -\dfrac{\overline{a}_1}{\overline{a}_{-1}}$. Rozwiązując równanie $\binom{\alpha}{2} = \dfrac{\overline{a}_1}{\overline{a}_{-1}}$ jesteśmy w stanie wyznaczyć rząd α a tym samym wyznaczyć brakujący parametr c_0. Znając c_0 znajdziemy brakujące a_0.

Dla n = 2, q = 2 mamy

$$\begin{aligned} & a_0 + a_1(z-c_\alpha) + a_2(z-c_\alpha)^2 \\ & = \overline{a}_{-2}z^2 + \overline{a}_{-1}z + \overline{a}_0 + \overline{a}_1 z^{-1} + \overline{a}_2 z^{-2} + \overline{a}_3 z^{-3} + \overline{a}_4 z^{-4} \end{aligned} \quad (28a)$$

oraz

$$c_\alpha = c_0 + c_1 z^{-1} + c_2 z^{-2} = \binom{\alpha}{1} - \binom{\alpha}{2} z^{-1} + \binom{\alpha}{3} z^{-2} \quad (28b)$$

Po podstawieniu (28) do (29) i porównaniu współczynników przy tych samych potęgach zmiennej z otrzymamy

$$\begin{aligned} & \overline{a}_{-2} = a_2,\ \overline{a}_{-1} = a_1 - 2a_2c_0,\ \overline{a}_0 = a_2c_0^2 + a_0 - 2a_2c_1 - a_1c_0 \\ & \overline{a}_1 = 2a_2c_0c_1 + a_2c_1^2 - a_1c_1 - 2a_2c_2,\ \overline{a}_2 = 2a_2c_0c_2 - a_1c_2 \\ & \overline{a}_3 = 2a_2c_1c_2,\ \overline{a}_4 = a_2c_2^2 \end{aligned}$$

Przy założeniu, znanych $\overline{a}_4$, $\overline{a}_3$, $\overline{a}_2$, $\overline{a}_1$, $\overline{a}_0$, $\overline{a}_{-1}$, $\overline{a}_{-2}$ poszukujemy a_2, a_1, a_0 przy czym $c_1 = \sqrt{\dfrac{\overline{a}_4}{\overline{a}_{-2}}}$. Rozwiązując równanie $\binom{\alpha}{2} = -\sqrt{\dfrac{\overline{a}_2}{\overline{a}_{-2}}}$ jesteśmy w stanie wyznaczyć rząd α a tym samym wyznaczyć brakujące parametry c_2 i c_0. Znając c_2 i c_0 znajdziemy brakujące a_1 i a_0.

Postępując w sposób analogiczny dla dowolnego n oraz dowolnego q jesteśmy w stanie wyznaczyć parametr α, a następnie korzystając z zależności (8) wyznaczyć $c_\alpha(k,z)$ co pozwoli na sprowadzenie transmitancji o postaci (10b) do transmitancji o postaci (10a). Dalszy tok postępowania przy wyznaczaniu realizacji jest analogiczny jak w przypadku transmitancji o postaci a) zależności (20) – (25).

Metodę wyznaczania realizacji dodatniej przy spełnieniu warunków twierdzenia 3 można przedstawić w postaci następującej procedury.

Procedura.

Krok 1. Korzystając z zależności (18) wyznaczamy macierz D a następnie z zależności (19) transmitancję ściśle właściwą.

Krok 2. Jeżeli mamy do czynienia z transmitancją operatorową w postaci a) przechodzimy do kroku 5, jeżeli transmitancja ma postać b) to wykonujemy kolejne kroki.

Krok 3. Na podstawie znanych n oraz q określamy poszukiwaną transmitancję (10a) oraz stosując równość (26b) i zależność (8) wyznaczamy parametr α a następnie c_α.

Krok 4. Znając c_0, $c_1,\ldots,c_q$ wyznaczamy współczynniki licznika i mianownika transmitancji o postaci (10a).

Krok 5. Stosując zależność (23) wyznaczamy charakterystykę impulsową otrzymanej transmitancji.

Krok 6. Stosując zależność (24) lub (25) wyznaczamy poszukiwane macierze A, B, C.

Przykład 1. Dana jest transmitancja ściśle właściwa (D = 0) o postaci

$$T(z)=\frac{b_1(z-c_\alpha)+b_0}{(z-c_\alpha)^2+a_1(z-c_\alpha)+a_0} \tag{29}$$

wyznaczyć realizację dodatnią.

W tym przypadku n = 2, stosując zależność (23) mamy

$$g_1=b_1,\ g_2=b_0-a_1b_1. \tag{30}$$

Jeżeli są więc spełnione warunki twierdzenia 3 oraz prawdziwe jest założenie $0<\alpha<1$, to poszukiwana realizacja dodatnia dyskretnego układu niecałkowitego rzędu będzie miała postać

$$A_1=\begin{bmatrix}0 & -a_0\\ 1 & -a_1\end{bmatrix},\ B_1=\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix},\ C_1=[g_1\quad g_2] \tag{31}$$

lub

$$A_2=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -a_0 & -a_1\end{bmatrix},\ B_2=\begin{bmatrix}g_1\\g_2\end{bmatrix},\ C_2=[1\quad 0]. \tag{32}$$

Przykład 2. Dysponujemy transmitancją ściśle właściwą (D = 0) o postaci

$$T(z)=\frac{\bar b_1 z+\bar b_0+\bar b_{-1}z^{-1}}{z^2+\bar a_1 z+\bar a_0+\bar a_{-1}z^{-1}+\bar a_{-2}z^{-2}} \tag{33}$$

której współczynniki wielomianu licznika i mianownika mają następujące wartości $\bar a_1=-1$, $\bar a_0=-1$, $\bar a_{-1}=-1.5$, $\bar a_{-2}=0.01$, $\bar b_1=1$ $\bar b_0=2$, $\bar b_{-1}=3$, wyznaczyć realizację dodatnią.

W tym przypadku n = 2 oraz q = 1 w związku z czym poszukiwana transmitancja w postaci (10a) będzie miała postać

$$T(z)=\frac{b_1(z-c_\alpha)+b_0}{(z-c_\alpha)^2+a_1(z-c_\alpha)+a_0} \tag{34}$$

oraz

$$c_\alpha=c_0+c_1z^{-1}=\binom{\alpha}{1}-\binom{\alpha}{2}z^{-1} \tag{35}$$

Porównując mianowniki transmitancji (33) i (34) otrzymujemy

$$(z-c_\alpha)^2+a_1(z-c_\alpha)+a_0=z^2+\bar a_1 z+\bar a_0+\bar a_{-1}z^{-1}+\bar a_{-2}z^{-2}. \tag{36}$$

Po podstawieniu (35) do (36) i porównaniu współczynników przy tych samych potęgach zmiennej z otrzymamy $a_1=\bar a_{-1}+2c_0$, $a_0=\bar a_0+\bar a_1c_0+2c_1+c_0{}^2$, $c_1=\sqrt{\bar a_{-2}}$. Analogicznie z porównania liczników transmitancji (34) i (35) mamy $b_1=\bar b_1$, $b_0=\bar b_0+\bar b_1c_0$.

Rozwiązując równanie $c_1=-\binom{\alpha}{2}=-\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}=\sqrt{\bar a_{-2}}$ jesteśmy w stanie wyznaczyć rząd α a tym samym wyznaczyć brakujący parametr c_0, dalej znajdziemy brakujące a_0, a_1 i b_0.

Podstawiając dane liczbowe otrzymamy $\alpha_1=0.28$, $\alpha_2=0.72$. Wybierając do dalszych obliczeń $\alpha=\alpha_2$ obliczymy $c_0=0.72$ oraz $a_0=-1$, $a_1=-0.06$, $b_1=1$, $b_0=2.72$.

Znając współczynniki transmitancji (35) dalszy tok postępowania przy poszukiwaniu realizacji jest analogiczny jak w przykładzie 1 (krok 4 i krok 5 procedury).

Poszukiwana realizacja dla transmitancji operatorowej (34) ma więc postać

$$A=\begin{bmatrix}0 & -a_0\\ 1 & -a_1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 0.06\end{bmatrix},\ B=\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix},$$

$$C=[g_1\quad g_2]=[1\quad 2.78],\ D=0. \tag{37}$$

Zostały spełnione warunki twierdzenia 3 oraz prawdziwe jest założenie $0<\alpha<1$ oznacza to, że otrzymana realizacja (37) jest realizacją dodatnią dyskretnego układu niecałkowitego rzędu.

4. Podsumowanie

Przedstawiona została metoda wyznaczania realizacji dodatniej dyskretnych układów niecałkowitego rzędu w oparciu o charakterystykę impulsową. Rozpatrzone zostały dwa przypadki zadanej transmitancji tj. gdy znany jest rząd niecałkowity α transmitancji operatorowej opisującej układ oraz gdy parametr ten jest nieznany. Zaproponowana została metoda wyznaczenia parametru α. Podane zostały warunki wystarczające istnienia realizacji dodatniej oraz procedura wyznaczania tej realizacji dla liniowych układów dyskretnych niecałkowitego rzędu. Metoda zobrazowana została przykładami.

Proponowana metoda da się w łatwy sposób uogólnić na przypadek liniowego układu dyskretnego niecałkowitego rzędu o wielu wejściach i wielu wyjściach dla którego znana jest macierz transmitancji operatorowych. Problemem otwartym jest podanie warunków koniecznych istnienia realizacji dodatniej dla rozpatrywanej klasy układów.

Praca naukowa finansowana ze środków Komitetu Badań Naukowych w latach 2007–2010 jako projekt badawczy nr NN514 1939 33.

5. Literatura

[1] Benvenuti L. and Farina L.: A tutorial on the positive realization problem, IEEE Trans. Autom. Control, vol. 49, No 5, 2004, pp. 651-664.

[2] Engheta N.: On the role of fractional calculus in electromagnetic theory. IEEE Trans. Atenn. Prop., Vol. 39, (1997), No. 4, 35-46.

[3] Farina L., Rinaldi S.: Positive Linear Systems, Theory and Applications, J. Wiley, New York, 2000

[4] Ferreira N.M.F, Machado J.A.T.: Fractional-order hybrid control of robotic manipulators. Proc. 11th Int. Conf. Advanced Robotics, ICAR'2003, Coimbra, Portugal, 393-398.

[5] Gałkowski K., Kummert A.: Fractional polynomials and nD systems. Proc IEEE Int. Symp. Circuits and Systems, ISCAS'2005, Kobe, Japan, CD-ROM.

[6] Kaczorek T.: A realization problem for positive continues-time linear systems with reduced numbers of delay, Int. J. Appl. Math. Comp. Sci. 2006, Vol. 16, No. 3, pp. 325-331.

[7] Kaczorek T.: Positive 1D and 2D Systems, Springer-Verlag, London, (2002).

[8] Kaczorek T.: Computation of realizations of discrete-time cone systems. Bull. Pol. Acad. Sci. Techn. Vol. 54, (2006), No. 3, 347-350.
[9] Kaczorek T.: Reachability and controllability to zero tests for standard and positive fractional discrete-time systems, Journal of Automation and System Engineering (JESA), 2008, vol. 42, no. 6-7-8, pp. 769-787.
[10] Kaczorek T.: Reachability and controllability to zero of positive fractional discrete-time systems. Machine Intelligence and Robotic Control, vol. 6, (2007), no. 4.
[11] Kaczorek T.: Reachability and controllability to zero of cone fractional linear systems, Archives of Control Sciences, vol. 17, (2007), no. 3, 357-367.
[12] Kaczorek T.: Fractional positive continuous-time linear systems and their reachability, Int. J. Appl. Math. Comput. Sci., vol. 18, (2008), no. 2.
[13] Kaczorek T.: Realization problem for fractional continuous-time systems, Archives of Control Sciences., vol.18, (2008), No 1.
[14] Kaczorek T.: Realization problem for positive multivariable discrete-time linear systems with delays in the state vector and inputs, Int. J. Appl. Math. Comp. Sci. 2006, Vol. 16, No. 2, pp. 101-106.
[15] Kaczorek T.: Realization problem for positive discrete-time systems with delay, System Science, Vol. 30, No. 4, 2004, pp. 117-130.
[16] Kaczorek T.: Realization problem for positive fractional discrete-time linear systems. In: Pennacchio S. (Ed.): Emerging Technologies, Robotics and Control Systems, Int. Society for Advanced Research, 2008, pp. 226-236
[17] Kaczorek T.: Fractional positive linear systems. Kybernetes: The International Journal of Systems & Cybernetics, 2009, vol. 38, no. 7/8, pp. 1059–1078.
[18] Kaczorek T.: Positive minimal realizations for singular discrete-time systems with delays in state and delays in control, Bull. Pol. Acad. Sci. Techn., Vol 53, No 3, 2005, pp. 293-298.
[19] Kaczorek T.: Practical stability of positive fractional discrete-time linear systems. Bulletin of the Polish Academy of Sciences, Technical Sciences, 2008, vol. 56, no. 4, pp. 313-317.
[20] Kaczorek T.: Stability of positive continuous–time linear systems with delays. Bulletin of the Polish Academy of Sciences, Technical Sciences, 2009, vol. 57, no. 4, pp. 395-398.
[21] Kaczorek T.: Wybrane zagadnienia teorii układów niecałkowitego rzędu. Oficyna Wydawnicza Politechniki Białostockiej, Rozprawy Naukowe Nr 174, Białystok 2009.
[22] Klamka J.: Positive controllability of positive systems, Proc. of American Control Conference, ACC-2002, Anchorage, (CD-ROM).
[23] Klamka J.: Approximate constrained controllability of mechanical systems, Journal of Theoretical and Applied Mechanics, vol. 43, (2005), no. 3, 539-554.
[24] Miller K.S., Ross B.: An Introduction to the Fractional Calculus and Fractional Differenctial Equations. Willey, New York 1993.
[25] K. Nishimoto: Fractional Calculus. Koriama: Decartess Press, 1984.
[26] Oldham K. B., Spanier J.: The Fractional Calculus. New York: Academmic Press, 1974.
[27] Ortigueira M. D.: Fractional discrete-time linear systems, Proc. of the IEE-ICASSP 97, Munich, Germany, IEEE, New York, vol. 3, (1997), 2241-2244.
[28] Ostalczyk P.: The non-integer difference of the discrete-time function and its application to the control system synthesis. Int. J. Syst, Sci. vol. 31, (2000), no. 12, 1551-1561.
[29] Oustaloup A.: Commande CRONE. Paris, Hermés, 1993.
[30] Podlubny I.: Fractional Differential Equations. San Diego: Academic Press, 1999.
[31] Podlubny I., Dorcak L., Kostial I.: On fractional derivatives, fractional order systems and PIλDμ-controllers. Proc. 36th IEEE Conf. Decision and Control, San Diego, CA, (1997), 4985-4990.
[32] Zaborowsky V. Meylaov R.: Informational network traffic model based on fractional calculus. Proc. Int. Conf. Info-tech and Info-net, ICII 2001, Beijing, China, vol. 1, (2001), 58-63.

otrzymano / received: 26.02.2010
przyjęto do druku / accepted: 12.04.2010 *artykuł recenzowany*