

Andrzej RUSZEWSKI

POLITECHNIKA BIAŁOSTOCKA, WYDZIAŁ ELEKTRYCZNY
ul. Wiejska 45D, 15-351 Białystok

Synteza regulatora ułamkowego rzędu dla określonej klasy obiektów z opóźnieniem

Dr inż. Andrzej RUSZEWSKI

Absolwent Wydziału Elektrycznego Politechniki Białostockiej, gdzie w roku 2008 obronił rozprawę doktorską z zakresu syntezy parametrycznej regulatorów dla obiektów o niepewnych parametrach. Obecnie zatrudniony na stanowisku asystenta w Katedrze Automatyki i Elektroniki. Główne kierunki badań naukowych to analiza i synteza układów sterowania, a w szczególności układów z opóźnieniami i układów ułamkowego rzędu.



e-mail: andrusz@pb.edu.pl

Streszczenie

W pracy rozpatrzono problem doboru wartości parametrów regulatora ułamkowego rzędu zapewniającego zadany zapas stabilności układu regulacji z obiektem inercyjnym pierwszego rzędu z całkowaniem i opóźnieniem. Postać transmitancji regulatora wynika z zastosowania idealnej transmitancji Bodego jako transmitancji odniesienia dla układu otwartego z regulatorem. Wykorzystując klasyczną metodę podziału D podano analityczno-komputerowe metody wyznaczania obszarów stabilności na płaszczyźnie parametrów regulatora. Podano także proste zależności analityczne pozwalające wyznaczyć wartości parametrów regulatora, dla których rozpatrywany układ regulacji charakteryzuje się zadanymi wartościami zapasu modułu i fazy.

Słowa kluczowe: regulator ułamkowego rzędu, stabilność, opóźnienie, metoda podziału D.

Design of a fractional order controller for a class of time-delay plants

Abstract

The paper presents the design problem of a fractional order controller satisfying gain and phase margin of the closed-loop system with time-delay inertial plant with integral term (1). The controller transfer function (2) results from the use of Bode's ideal transfer function as a reference transfer function for the open loop system. The characteristic function of the closed-loop system with plant (1), controller (2) and the gain-phase margin tester (Fig. 1) is given by (3). The closed-loop system is said to be bounded-input bounded-output stable if and only if all the zeros of the characteristic function (3) have negative real parts. Using the classical D-partition method, a simple and efficient computational method for determining stability regions in the controller parameters space (α, k_c) is given. Analytical descriptions for boundary of stability regions in the controller parameters space are determined. The stability region is located between the real zero boundary $k_c = 0$ and the complex zero boundary of the form (7), (8). The presented descriptions for the boundary of stability regions are also used for obtaining stability regions for specified gain and phase margins requirements. To determine the stability regions for a given value of the control system gain margin A , one should set $\phi = 0$. On the other hand by setting $A = 1$, there can be obtained the stability regions for a given phase margin ϕ . The stability regions of quasi-polynomial (3) are shown in Figs. 2 and 3. Any point from the stability region provides the gain and phase margins requirements. Moreover, the analytical forms directly expressing the controller parameters for specified gain and phase margin requirements are determined. The numerical examples confirm the results received on the basis of the D-partition method.

Keywords: fractional controller, stability, delay, D-partition method.

1. Wstęp

W ostatnich latach obserwuje się wzrost zainteresowania układami dynamicznymi opisanymi ułamkowymi równaniami różniczko-całkowymi, patrz np. monografie [1-6]. W pracy [7] dokonano przeglądu wybranych zagadnień z zakresu rachunku ułam-

kowego rzędu oraz teorii ciągłych układów liniowych ułamkowego rzędu, takich jak metody opisu, synteza regulatorów ułamkowych, ich modelowanie oraz realizacja praktyczna.

Problem doboru wartości parametrów regulatorów ułamkowych rzędów (syntezy parametrycznej regulatora) jest rozpatrywany między innymi w pracach [8-14]. Regulator PID ułamkowego rzędu, określanany jako $PI^\lambda D^\mu$, został zaproponowany w pracy [13]. W regulatorze tym rząd całkowania λ oraz różniczkowania μ są w ogólnym przypadku dowolnymi nieujemnymi liczbami rzeczywistymi. Problemowi doboru wartości nastaw regulatorów $PI^\lambda D^\mu$ są poświęcone między innymi prace [10-14]. Wykazano tam, że zastosowanie regulatora ułamkowego rzędu poprawia wskaźniki jakości regulacji. Badania przeprowadzono dla modeli obiektów regulacji całkowitego i ułamkowego rzędu. W pracach [8, 9] przy syntezie regulatora wykorzystano podejście, polegające na takim dobraniu transmitancji ułamkowego regulatora, aby transmitancja operatorowa układu otwartego rzędu ułamkowego miała tzw. idealną postać Bodego [15].

W niniejszej pracy rozpatrzony zostanie problem doboru wartości parametrów regulatora ułamkowego rzędu zapewniającego zadany zapas stabilności układu regulacji z obiektem inercyjnym pierwszego rzędu z całkowaniem i opóźnieniem. Zostaną podane analityczno-komputerowe metody wyznaczania obszarów stabilności w przestrzeni parametrów rozpatrywanego regulatora oraz metoda bezpośredniego wyznaczenia wartości jego parametrów dla zadanych zapasów stabilności modułu i fazy. Proponowane metody oparte są na klasycznej metodzie podziału D oraz podejściu przedstawionym w pracach [16-18].

2. Sformułowanie problemu

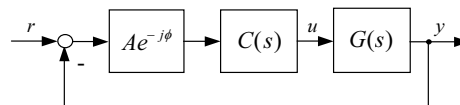
Weźmy pod uwagę układ regulacji automatycznej pokazany na rysunku 1. Obiekt regulacji opisany jest transmitancją operatorową w postaci członu inercyjnego z całkowaniem i opóźnieniem

$$G(s) = \frac{Ke^{-sh}}{s(1+sT)}. \quad (1)$$

Regulator jest natomiast ułamkowym regulatorem o transmitancji

$$C(s) = \frac{k_c(1+sT)}{s^\alpha}, \quad (2)$$

gdzie α jest w przypadku ogólnym dodatnią liczbą rzeczywistą. Transmitancja operatorowa ułamkowego regulatora (2) wynika z faktu, że przy syntezie regulatora tak dobierano jego postać, aby transmitancja operatorowa układu otwartego ułamkowego rzędu miała tzw. idealną postać Bodego [9]. Dokładna analiza układu otwartego o idealnej postaci Bodego jest podana w pracy [15], natomiast synteza regulatora wykorzystująca takie podejście została przedstawiona w pracach [8, 9].



Rys. 1. Rozpatrywana struktura układu regulacji automatycznej
Fig. 1. Feedback control system structure

Na rysunku 1 w torze głównym sterowania występuje tzw. tester zapasu modułu i fazy $A \exp(-j\phi)$, gdzie A i ϕ są to odpowiednio zapas modułu i zapas fazy. Tester ten nie występuje w rzeczywistym układzie regulacji, wykorzystywany jest on tylko przy syntezie parametrycznej regulatora. Wartości parametrów regulatora dobiera się tak, aby układ regulacji charakteryzował się określonymi zapasami stabilności modułu i fazy. W typowych układach sterowania zapas fazy wynosi od 30° do 60° , natomiast zapas modułu od 5dB do 10dB. Zapasy te związane są ze wskaźnikami jakości określanymi na podstawie odpowiedzi skokowych układu regulacji automatycznej, tj. przeregulowaniem, czasem regulacji.

Quasi-wielomian charakterystyczny rozpatrywanego układu regulacji ma postać

$$w(s) = A e^{-j\phi} K k_c (1 + sT) e^{-sh} + s^\alpha s(1 + sT). \quad (3)$$

Podstawowym wymaganiem stawianym układom regulacji automatycznej jest ich stabilność asymptotyczna. W przypadku układów ułamkowego rzędu rozpatrujemy stabilność w sensie ograniczone wejście-ograniczone wyjście, którą dalej będziemy krótko nazywać stabilnością, np. [19]. Rozpatrywany układ regulacji automatycznej jest stabilny, gdy jego quasi-wielomian charakterystyczny ułamkowego stopnia (3) jest stabilny, tzn. wszystkie jego zera mają ujemne części rzeczywiste [19].

Celem niniejszej pracy jest podanie metody wyznaczenia wartości wzmocnienia k_c regulatora oraz parametru α , dla których rozpatrywany układ regulacji automatycznej ma zadane zapasy stabilności, tj. zapas modułu A i zapas fazy ϕ .

3. Główny rezultat

Wykorzystując klasyczną metodę podziału D [20] możemy wyznaczyć obszary stabilności w przestrzeni parametrów regulatora (2). Obszary te określają zbiór wartości parametrów regulatora, dla których rozpatrywany układ regulacji automatycznej jest stabilny. Granice stabilności (podziału D) odpowiadają takim wartościom parametrów regulatora, dla których quasi-wielomian charakterystyczny (3) ma przynajmniej jedno zero położone na osi urojonej. Może to być zero rzeczywiste lub para zer urojonych sprzężonych. Wobec tego granice podziału D dzielimy na granice zer rzeczywistych i zer zespolonych. Granice te dzielą przestrzeń parametrów regulatora na obszary $D(k)$ o skończonej liczbie zer quasi-wielomianu (3) o dodatniej części rzeczywistej. Dowolny punkt w $D(k)$ odpowiada takim wartościom parametrów regulatora, dla których quasi-wielomian (3) ma dokładnie k zer o dodatniej części rzeczywistej. Jeżeli obszar $D(0)$ istnieje (nie jest pusty), to jest on obszarem stabilności rozpatrywanego układu regulacji automatycznej. W celu sprawdzenia, czy dany obszar jest obszarem stabilności należy zbadać stabilność quasi-wielomianu (3) dla jednego punktu z tego obszaru, stosując np. uogólnione na przykład quasi-wielomianów ułamkowego stopnia kryterium Michajłowa [19]. W dalszych rozważaniach ograniczymy się tylko do podania metody wyznaczenia obszaru stabilności. Pominiemy etap wykazywania, że wyznaczony obszar jest obszarem stabilności.

Dowolnemu punktowi na granicy zer rzeczywistych odpowiada quasi-wielomian (3), który ma zero $s = 0$. Łatwo zauważyć, że na płaszczyźnie (α, k_c) granicą zer rzeczywistych quasi-wielomianu (3) jest linia prosta $k_c = 0$.

Granice zer zespolonych wyznacza się rozwiązując względem α i k_c równanie

$$w(j\omega) = A e^{-j\phi} K k_c (1 + j\omega T) e^{-j\omega h} + (j\omega)^\alpha j\omega (1 + j\omega T) = 0. \quad (4)$$

Otrzymuje się je przyrównując do zera quasi-wielomian (3) przy $s = j\omega$. Równanie zespolone (4) jest spełnione, gdy odpowiednio jego części rzeczywiste $\text{Re}[w(j\omega)]$ i urojone $\text{Im}[w(j\omega)]$ są równe 0, tj.

$$\text{Re}[w(j\omega)] = 0, \quad (5)$$

$$\text{Im}[w(j\omega)] = 0. \quad (6)$$

Rozwiązując układ równań (5), (6) względem α i k_c odpowiednio otrzymamy

$$\alpha = 1 + p, \quad (7)$$

$$k_c = \frac{\omega^{2+p}}{AK}, \quad (8)$$

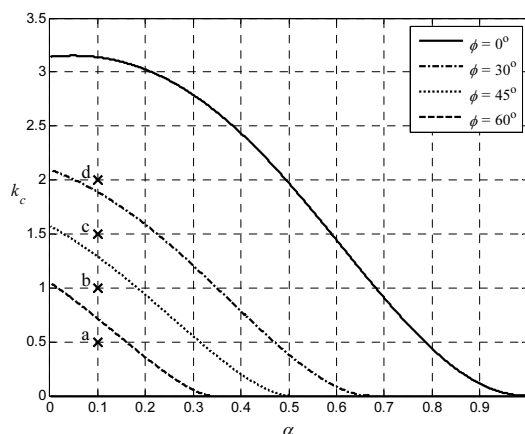
gdzie $p = -2(\omega h + \phi) / \pi$.

Linia krzywa o opisie parametrycznym (7), (8), wykreślona w funkcji ω , wyznacza na płaszczyźnie (α, k_c) granicę zer zespolonych quasi-wielomianu (3).

Otrzymane opisy granic stabilności (podziału D) umożliwiają wyznaczenie obszarów stabilności dla zadanych zapasów modułu i fazy. Przy wyznaczaniu obszarów stabilności, dla określonego zapasu fazy ϕ należy przyjąć $A = 1$, natomiast dla określonego zapasu modułu A należy przyjąć $\phi = 0$. W przypadku wyznaczania granic zer zespolonych dla określonego zapasu fazy ϕ należy przyjmować wartości $\omega \in (0, (\pi - 2\phi) / 2h)$, natomiast przy wyznaczaniu granic dla określonego zapasu modułu A należy przyjmować wartości $\omega \in (0, \pi / 2h)$.

Przykład 1. Należy dokonać syntezy parametrycznej regulatora (2), tak aby rozpatrywany układ regulacji charakteryzował się zadanymi wartościami zapasu modułu A i zapasu fazy ϕ . Obiekt regulacji jest opisany transmitancją operatorową (1), gdzie $K = 1$, $T = 2$, $h = 0.4$.

Na rysunku 2 pokazano obszary stabilności wyznaczone dla kilku wartości ϕ przy $A = 1$. Wybierając punkt z obszaru ograniczonego linią krzywą wyznaczoną dla zadanej wartości ϕ i linią prostą $k_c = 0$ otrzymamy wartości parametrów regulatora (2), przy których układ regulacji ma zapas stabilności fazy nie mniejszy niż wartość ϕ przyjęta do wyznaczenia granicy zer zespolonych. Przyjmując np. $\phi = 60^\circ$ obszar stabilności ograniczony jest odcinkiem linii prostej $k_c = 0$ oraz linii krzywej odpowiadającej $\phi = 60^\circ$. Dowolny punkt leżący wewnątrz tego obszaru określa parametry regulatora zapewniające zapas fazy nie mniejszy niż 60° . Wybierając np. punkt o współrzędnych $\alpha = 0.1$, $k_c = 0.5$ (punkt a na rysunku 2) otrzymamy zapas fazy równy 63.08° .

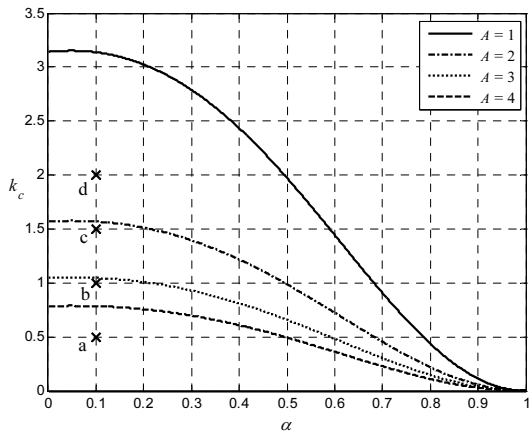


Rys. 2. Obszary stabilności quasi-wielomianu (3) wyznaczone przy $A = 1$ dla różnych wartości ϕ

Fig. 2. Stability regions of quasi-polynomial (3) for $A = 1$ and different values of ϕ

Obszary stabilności wyznaczone dla kilku wartości A przy $\phi = 0$ pokazane są na rysunku 3. Wybierając punkt z obszaru ograniczonego linią krzywą wyznaczoną dla zadanej wartości A i linią prostą $k_c = 0$ otrzymamy wartości parametrów transmitancji regulatora (2), przy których układ regulacji ma zapas modułu nie

mniejszy niż wartość A przyjęta do wyznaczenia granicy zer zespolonych.



Rys. 3. Obszary stabilności quasi-wielomianu (3) wyznaczone przy $\phi = 0$ dla różnych wartości A

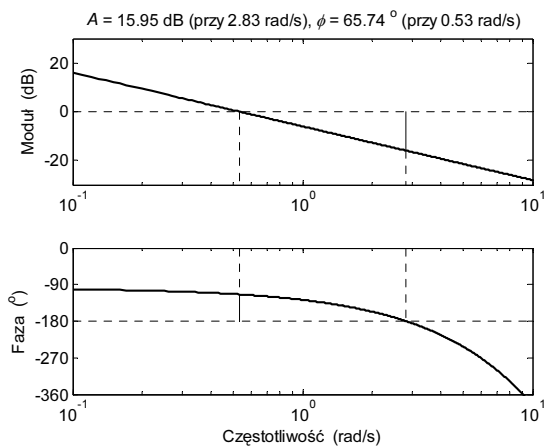
Fig. 3. Stability regions of quasi-polynomial (3) for $\phi = 0$ and different values of A

W tabeli 1 podano wyznaczone wartości parametrów transmitancji regulatora oraz odpowiadające im zapasy stabilności dla czterech punktów zaznaczonych na rysunkach 2 i 3. Z tabeli wynika, że wszystkie układy regulacji charakteryzują się większymi zapasami fazy i modułu od przyjętych do wyznaczenia granic zer zespolonych.

Tab. 1. Zapasy modułu i fazy
Tab. 1. Gain and phase margins

Punkt	Parametry regulatora	Zapas modułu		Zapas fazy
a	$\alpha = 0.1, k_c = 0.5$	6.27	15.95 dB	65.74°
b	$\alpha = 0.1, k_c = 1.0$	3.14	9.93 dB	52.35°
c	$\alpha = 0.1, k_c = 1.5$	2.09	6.41 dB	39.58°
d	$\alpha = 0.1, k_c = 2.0$	1.57	3.91 dB	27.20°

Na rysunku 4 pokazano logarytmiczne charakterystyki częstotliwościowe modułu i fazy wraz z zaznaczonymi zapasami stabilności dla wartości parametrów transmitancji regulatora $\alpha = 0.1, k_c = 0.5$ (punkt a). Tabela 1 i rysunek 4 potwierdzają rezultat otrzymany wcześniej na podstawie metody podziału D, że punkt z wyznaczonego obszaru stabilności zapewnia określone wartości zapasu modułu i fazy.

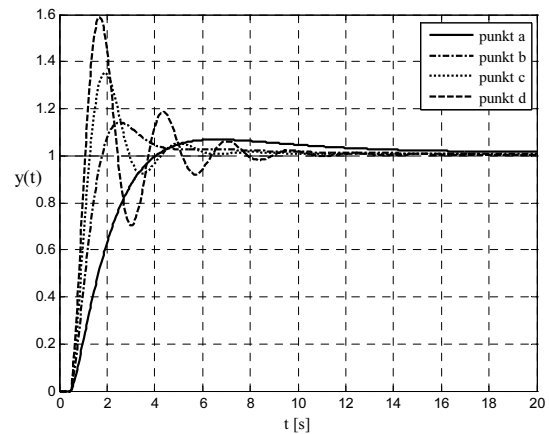


Rys. 4. Charakterystyka Bodego z zaznaczonymi zapasami modułu i fazy
Fig. 4. Bode plot with gain and phase margins

Na rysunku 7 pokazano charakterystyki skokowe układu regulacji wyznaczone dla otrzymanych wartości nastaw regulatora (punktów z obszarów stabilności). Z rysunku wynika, że dla większego zapasu fazy ϕ występuje mniejsze przeregulowanie, natomiast dla większego zapasu modułu A występuje dłuższy czas regulacji.

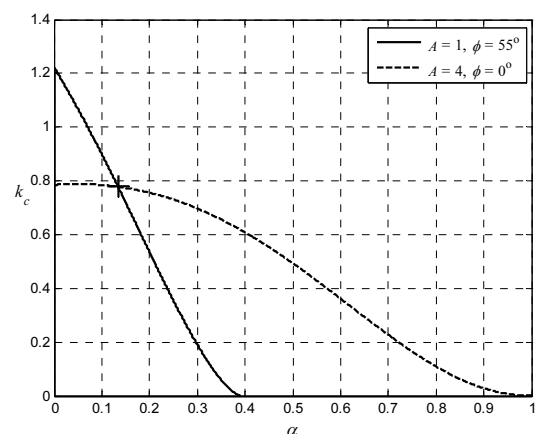
Wykorzystując obszary stabilności możemy wyznaczyć wartości parametrów regulatora jednocześnie dla zadanego zapasu modułu A i zapasu fazy ϕ . W tym celu na jednym rysunku należy wyznaczyć granicę zer zespolonych dla określonego zapasu fazy ϕ , przy $A = 1$ oraz granicę zer zespolonych dla określonego zapasu modułu A , przy $\phi = 0$ i odczytać współrzędne punktu przecięcia wyznaczonych granic.

Przykład 2. Dany jest model obiektu regulacji taki jak w przykładzie 1. Należy dokonać syntezy parametrycznej regulatora (2), tak aby rozpatrywany układ regulacji miał zapas modułu $A = 4$ (około 12 dB) i zapas fazy $\phi = 55^\circ$.



Rys. 5. Odpowiedzi skokowe układu regulacji
Fig. 5. Step responses of the control system

Na rysunku 6 pokazano obszary stabilności wyznaczone dla $A = 1, \phi = 55^\circ$ oraz $A = 4, \phi = 0$. Punkt przecięcia granic zer zespolonych (oznaczony znakiem + na rysunku) odczytany z monitora z dokładnością do czterech miejsc po przecinku ma współrzędne $\alpha = 0.1339, k_c = 0.7778$. Obliczając zapasy stabilności układu zamkniętego dla wyznaczonych wartości parametrów regulatora otrzymamy $A = 4, \phi = 55^\circ$, co potwierdza rezultat otrzymany na podstawie metody podziału D.



Rys. 6. Obszary stabilności quasi-wielomianu (3) wyznaczone dla wartości $A = 1, \phi = 55^\circ$ oraz $A = 4, \phi = 0$
Fig. 6. Stability regions of quasi-polynomial (3) for $A = 1, \phi = 55^\circ$ and $A = 4, \phi = 0$

Wykorzystując zależności opisujące granice obszarów stabilności (7), (8) możemy wyznaczyć wzory analityczne umożliwiające bezpośrednie (bez konieczności rysowania obszarów stabilności) wyznaczenie parametrów transmitancji regulatora (2) dla zadanych zapasów modułu i fazy.

Granicy zer zespolonych dla określonego zapasu fazy ϕ (rysunek 2) rozpoczyna się dla $\omega=0$ w punkcie o współrzędnych $k_c=0$,

$$\alpha_k = \frac{\pi - 2\phi}{\pi}. \quad (9)$$

Układ regulacji ma zadany zapas fazy ϕ dla wartości $\alpha \in (0, \alpha_k)$. Zauważmy, że α_k zależy tylko od wartości zapasu fazy ϕ . Wybierając dowolną wartość α z podanego przedziału $\alpha \in (0, \alpha_k)$ wzmocnienie regulatora k_c wyznaczamy ze wzoru

$$k_c = \frac{1}{AK} \exp \left[\left(\ln \pi - \ln 2 + \ln \frac{1-\alpha}{h} \right) (1+\alpha) \right]. \quad (10)$$

Zależność (10) otrzymano rozwiązując układ równań (7), (8) względem k_c i ω , przy $\phi=0$.

Z powyższych rozważań wynika następująca procedura projektowania regulatora opisanego transmitancją operatorową (2) przy zadanym zapasie modułu A i zapasie fazy ϕ .

Procedura:

- 1) Dla zadanego zapasu fazy ϕ wyznacz przedział zmian wartości $\alpha \in (0, \alpha_k)$, gdzie α_k oblicza się ze wzoru (9).
- 2) Wybierz dowolną wartość α z wyznaczonego przedziału.
- 3) Oblicz wzmocnienie regulatora k_c ze wzoru (10).

Zauważmy, że w podanej procedurze projektowania regulatora (2) nie jest wymagane obliczanie pulsacji odcięcia modułu lub pulsacji odcięcia fazy oraz nie jest wymagane rozwiązywanie równania nieliniowego jak ma to miejsce w metodach podanych w pracach [8, 9]. Przedstawiona procedura jest prosta w stosowaniu.

Przykład 3. Dany jest model obiektu regulacji taki jak w przykładzie 1. Korzystając z podanej procedury należy dokonać syntezy parametrycznej regulatora (2), tak aby rozpatrywany układ regulacji miał zapas modułu $A=4$ (około 12 dB) i zapas fazy $\phi=55^\circ$.

Dla $\phi=55^\circ$ z (9) mamy $\alpha_k=0.3889$, czyli $\alpha \in (0, 0.3889)$. Wybierając np. $\alpha=0.1339$ z (10) obliczamy wzmocnienie regulatora $k_c=0.7778$. Otrzymaliśmy takie same wartości parametrów regulatora (2) jak w przykładzie 2.

4. Wnioski

W pracy rozpatrzono problem syntezy parametrycznej regulatora ułamkowego rzędu zapewniającego zadany zapas stabilności układu regulacji z obiektem inercyjnym pierwszego rzędu z całkowaniem i opóźnieniem. Wykorzystując metodę podziału D podano analityczno-komputerową metodę wyznaczania obszarów stabilności w przestrzeni parametrów regulatora. Dowolny punkt z wyznaczonego obszaru odpowiada takim wartościom parametrów transmitancji regulatora, dla których układ regulacji charakteryzuje się zapasami stabilności nie mniejszymi od zadanych. Na podstawie metody podziału D podano także proste wyrażenia analityczne pozwalające bezpośrednio wyznaczyć wartości parametrów transmitancji regulatora dla zadanych zapasów stabilności. Należy przy tym zwrócić uwagę, że w podanej metodzie nie jest wymagane obliczanie pulsacji odcięcia modułu lub pulsacji odcięcia fazy oraz nie jest wymagane rozwiązywanie równania nieliniowego jak ma to miejsce w metodach podanych w pracach [8, 9].

Obszary stabilności oraz charakterystyki częstotliwościowe i skokowe rozpatrywanego układu regulacji automatycznej wykonano w środowisku systemu Matlab.

Pracę wykonano w ramach projektu badawczego N N514 1939 33 finansowanego przez Ministerstwo Nauki i Szkolnictwa Wyższego.

5. Literatura

- [1] Das S.: Functional Fractional Calculus for System Identification and Controls. Springer, Berlin 2008.
- [2] Ostalczyk P.: Zarys rachunku różniczkowo-całkowego ułamkowych rzędów. Teoria i zastosowania w automatyce. Wydawnictwo Politechniki Łódzkiej, Łódź 2008.
- [3] Podlubny I.: Fractional Differential Equations. Academic Press, San Diego 1999.
- [4] Kilbas A. A., Srivastava H. M., Trujillo J. J.: Theory and Applications of Fractional Differential Equations. Elsevier, Amsterdam 2006.
- [5] Sabatier J., Agrawal O. P., Machado J. A. T. (Eds): Advances in Fractional Calculus, Theoretical Developments and Applications in Physics and Engineering. Springer, London 2007.
- [6] Kaczorek T.: Wybrane zagadnienia teorii układów niecałkowitego rzędu. Oficyna Wydawnicza Politechniki Białostockiej, Białystok 2009.
- [7] Busłowicz M.: Wybrane zagadnienia z zakresu liniowych ciągłych układów niecałkowitego rzędu, Pomiary Automatyka Robotyka, 2/2010.
- [8] Boudjehem B., Boudjehem D., Tebbikh H.: Simple analytical design method for fractional-order controller. Proc. 3-rd IFAC Workshop on Fractional Differentiation and its Applications, Ankara, Turkey, 2008 (CD-ROM).
- [9] Busłowicz M., Nartowicz T.: Projektowanie regulatora ułamkowego rzędu dla określonej klasy obiektów z opóźnieniem. Pomiary Automatyka Robotyka, 2/2009, 398-405.
- [10] Chen Y.Q., Dou H., Vinagre B. M. and Monje C.A.: A Robust Tuning Method for Fractional Order PI Controllers, The Second IFAC Symposium on Fractional Derivatives and Applications, Porto, Portugal (2006).
- [11] Hamamci S. E.: An Algorithm for Stabilization of Fractional-Order Time Delay Systems Using Fractional-Order PID Controllers, IEEE Trans. on Automatic Control, 52, 1964-1969 (2007).
- [12] Monje C. A., Vinagre B. M., Feliu V., Chen Y.: Tuning and auto-tuning of fractional order controllers for industry applications. Control Engineering Practice, 16, 798-812 (2008).
- [13] Podlubny I.: Fractional-order systems and PI λ D μ -controllers, IEEE Trans. on Automatic Control, 44, 208-214 (1999).
- [14] Valerio D., da Costa J. S.: Tuning of fractional PID controllers with Ziegler-Nichols type rules. Signal Processing, 2006, vol. 86, pp. 2771-2784.
- [15] Barbosa R. S., Machado J. A., Ferreira I. M.: Tuning of PID controllers based on Bode's ideal transfer function. Nonlinear Dynamics, 38, 305-321 (2004).
- [16] Ruszewski A.: Parametric synthesis of controllers for particular plants with uncertain parameters, PhD Dissertation, Faculty of Electrical Engineering, Białystok Technical University (in Polish), 2008.
- [17] Ruszewski A.: Stability regions of closed loop system with time delay inertial plant of fractional order and fractional order PI controller, Bull. Pol. Ac.: Sci. Tech. 56 (4), 329-332 (2008).
- [18] Ruszewski A.: Stabilisation of inertial processes with time daly using a fractional order PI controller, PAK, 56, 2 (2010), 160-162.
- [19] Busłowicz M.: Frequency domain method for stability analysis of linear continuous-time fractional systems, In: K. Malinowski and L. Rutkowski (Eds.): Recent Advances in Control and Automation, Academic Publishing House EXIT, Warsaw 2008, 83-92.
- [20] Górecki H., Fuksa S., Grabowski P. and Korytowski A.: Analysis and Synthesis of Time Delay Systems, PWN-J. Wiley, Warsaw Chichester, 1989.