Wojciech TRZASKO
POLITECHNIKA BIAŁOSTOCKA
ul. Wiejska 45D, 15-351 Białystok

Względna obserwowalność dodatnich układów ciągło-dyskretnych

Dr inż. Wojciech TRZASKO

Absolwent Wydziału Elektrycznego Politechniki Białostockiej. W 2001 roku uzyskał stopień doktora nauk technicznych w dyscyplinie Elektrotechnika specjalność Teoria sterowania i systemów. Obecnie zatrudniony jako adiunkt w Katedrze Automatyki i Elektroniki WE PB. Autor i współautor ponad 20 publikacji. Główne kierunki badań naukowych to analiza i synteza układów dodatnich: z opóźnieniami, dwuwymiarowych ciągło-dyskretnych oraz układów o niepewnych parametrach.

e-mail: wtrzasko@.pb.edu.pl

Streszczenie

W pracy rozpatrzono problem obserwowalności dodatnich liniowych dwuwymiarowych układów ciągło-dyskretnych. Sformułowano definicje oraz podano warunki konieczne i wystarczające obserwowalności oraz względnej obserwowalności. Podano też metodę wyznaczania nieujemnego stanu początkowego dla dowolnej zadanej odpowiedzi układu. Rozważania zilustrowano przykładem.

Słowa kluczowe: 2W układy ciągło-dyskretne (hybrydowe), układy dodatnie, obserwowalność.

Relative observability of positive continuous-discrete time systems

Abstract

In the paper the observability problem for linear 2D positive continuous-discrete time systems described by the differential-difference state equations (formulas (1a) and (1b)) and output equation (1c) with boundary conditions (3) is considered. It should be noted that such a model is called a hybrid system in literature [1, 3, 4]. A 2D hybrid system is a dynamic system that includes both continuous- and discrete-time dynamics. It means that the 2D hybrid system state vector contains continuous-time and discrete-time state variables; its input and output vectors depend on continuous time *t* and discrete step *i*. The results presented in this work are based on solving the state equations (formula (4)) given in [1]. For simplicity it is assumed that the vector $x_2(t) := x_2$ of boundary conditions (3) is constant in the whole interval $t \in [0, t_f]$. The definition and necessary and sufficient conditions for the continuous –discrete system positivity are formulated. There is also introduced the definition of observability at the point $(t,i) \in R_+ \times Z_+$, $t = t_f > 0$, $i = k \geq 1$, and a simple condition of observability (Theorem 3) is given. Moreover, based on the left-inverse of the observability matrix (the formula (16)), a simple method for computing the initial state (10) when assuming the knowledge of the output sequence (15) at the points (t_f, i) $i = 0,1,\ldots,k$, is proposed. In Section 4 the relative observability with respect to state $x_1(t,i) \in \Re_+^{n_1}$ at the point $(t,i) \in R_+ \times Z_+$, $t = t_f > 0$, $i = k \geq 1$, is investigated. This is the special case of observability, but more useful in practice. The considerations are illustrated by a numerical example. Numerical calculations were performed in the Matlab program environment.

Keywords: continuous - discrete 2D systems (hybrid), positive systems, observability.

1. Wstęp

W układach dodatnich składowe wektorów wymuszeń, warunków początkowych, stanu i wyjścia przyjmują tylko wartości nieujemne. Przykłady dodatnich układów liniowych są podane w monografii [2] oraz cytowanej tam literaturze.

W teorii układów dodatnich zamiast przestrzeni liniowych korzystamy z teorii stożków. Teoria układów dodatnich jest więc dziedziną znacznie trudniejszą i mniej zaawansowaną od klasycznej teorii układów liniowych. Problem analizy i syntezy dodatnich układów liniowych jest tematem wielu publikacji w ostatnich kilku latach, np. [2, 5].

Ostatnio, nowa klasa dwuwymiarowych liniowych hybrydowych (ciągło - dyskretnych) układów dodatnich została zaproponowana w pracy [1]. W pracach [3, 4] podano warunki względnej obserwowalności stacjonarnych układów hybrydowych. Problem punktowej zupełności oraz względnej punktowej zupełności dodatnich liniowych dwuwymiarowych układów ciągło-dyskretnych rozpatrzono w pracy [7]. Natomiast w pracy [6] podano warunki względnej sterowalności tych układów.

W niniejszej pracy, wykorzystując rezultaty prac [1, 2, 3, 7], rozpatrzymy problem obserwowalności dodatnich liniowych dwuwymiarowych układów ciągło-dyskretnych, dla których rozwiązanie analityczne równań stanu zostały podane w pracy [1]. Najpierw, uwzględniając specyfikę dodatnich układów dwuwymiarowych, zostaną wprowadzone definicje obserwowalności oraz względnej obserwowalności. Następnie zostaną podane warunki konieczne i wystarczające obserwowalności takich układów oraz prosta metoda wyznaczania nieujemnych warunków brzegowych dla dowolnej zadanej odpowiedzi układu.

2. Dodatni układ ciągło-dyskretny

Niech $\Re^{n \times m}$ będzie zbiorem macierzy o wymiarach $n \times m$ o rzeczywistych elementach oraz $\Re^n = \Re^{n \times 1}$. Zbiór macierzy o wymiarach $n \times m$, których elementami są liczby rzeczywiste nieujemne, będziemy oznaczać przez $\Re_+^{n \times m}$, przy czym $\Re_+^n = \Re_+^{n \times 1}$. Zbiór liczb całkowitych dodatnich będziemy oznaczać przez Z_+, zaś zbiór liczb rzeczywistych nieujemnych przez $R_+ = [0, +\infty)$.

Weźmy pod uwagę dwuwymiarowy układ ciągło-dyskretny liniowy stacjonarny, nie poddany wymuszeniu ($u(t,i) = 0$). Układ ten w przestrzeni stanów jest opisany równaniami stanu: różniczkowym i różnicowym oraz równaniem wyjścia w postaci

$$\dot{x}_1(t,i) = A_{11}x_1(t,i) + A_{12}x_2(t,i), \quad t \in R_+, \tag{1a}$$

$$x_2(t,i+1) = A_{21}x_1(t,i) + A_{22}x_2(t,i), \quad i \in Z_+, \tag{1b}$$

$$y(t,i) = C_1x_1(t,i) + C_2x_2(t,i), \tag{1c}$$

przy czym $\dot{x}_1(t,i) = \dfrac{\partial x_1(t,i)}{\partial t}$, $x_1(t,i) \in \Re^{n_1}$, $x_2(t,i) \in \Re^{n_2}$, $y(t,i) \in \Re^p$ oraz $A_{11} \in \Re^{n_1 \times n_1}$, $A_{12} \in \Re^{n_1 \times n_2}$, $A_{21} \in \Re^{n_2 \times n_1}$, $A_{22} \in \Re^{n_2 \times n_2}$, $C_1 \in \Re^{p \times n_1}$, $C_2 \in \Re^{p \times n_2}$.

Układ (1) ma strukturę podobną do modelu 2W Roessera [2], gdzie $x_1(t,i) \in \Re^{n_1}$ jest odpowiednikiem wektora horyzontalnego, zaś $x_2(t,i) \in \Re^{n_2}$ wektora wertykalnego. W pracach [1, 3, 4] układy ciągło dyskretne są nazywane dwuwymiarowymi układami hybrydowymi.

Warunki brzegowe dla układu (1) mają postać

$$x_1(0,i) = x_1(i), \ i \in Z_+ \ \text{oraz} \ x_2(t,0) = x_2(t), \ t \in R_+. \tag{2}$$

Definicja 1. Układ ciągło-dyskretny (1) nazywamy dwuwymiarowym (2W) modelem wewnętrznie dodatnim, jeżeli dla wszystkich dodatnich warunków brzegowych

$$x_1(i) \in \Re_+^{n_1}, \ i \in Z_+ \ \text{oraz} \ x_2(t) \in \Re_+^{n_2}, \ t \in R_+, \tag{3}$$

zachodzi $x_1(t,i)\in\Re_+^{n_1}$, $x_2(t,i)\in\Re_+^{n_2}$ i $y(t,i)\in\Re_+^{p}$ dla wszystkich $t\in R_+$ i $i\in Z_+$.

Twierdzenie 1. [1] Rozwiązanie układu (1) spełniające warunki brzegowe (2) ma postać

$$x_1(t,i)=\begin{cases}\Phi(t)x_1(0)+P(t)x_2(t) \quad \text{dla} \quad i=0\\ \Phi(t)x_1(i)+\sum_{k=0}^{i-1}P(t)(A_{21}P(t)+A_{22})^{i-k-1}A_{21}\Phi(t)x_1(k)+\\ +P(t)(A_{21}P(t)+A_{22})^{i}x_2(t) \quad \text{dla} \quad i=1,2,..\end{cases} \tag{4a}$$

$$x_2(t,i)=\sum_{k=0}^{i-1}(A_{21}P(t)+A_{22})^{i-k-1}A_{21}\Phi(t)x_1(k)+ \\ +(A_{21}P(t)+A_{22})^{i}x_2(t) \quad \text{dla} \quad i=1,2,... \tag{4b}$$

przy czym $\Phi(t)=e^{A_{11}t}$, a $P(t)$ jest operatorem, określonym zależnością

$$P(t)x=\int_0^t\Phi(t-\tau)A_{12}x(\tau)d\tau. \tag{5}$$

Dowód. Dowód został podany w pracy [1] wykorzystując metodę indukcji względem *i*. □

Twierdzenie 2. Układ ciągło-dyskretny (1) jest dodatni wewnętrznie wtedy i tylko wtedy, gdy

1. A_{11} jest macierzą Metzlera, (6a)
2. $A_{12}\in\Re_+^{n_1\times n_2}$, $A_{21}\in\Re_+^{n_2\times n_1}$, $A_{22}\in\Re_+^{n_2\times n_2}$, $C_1\in\Re_+^{p\times n_1}$, $C_2\in\Re_+^{p\times n_2}$. (6b)

Dowód. Dowód przeprowadzimy podobnie jak w twierdzeniu 2 pracy [1].

Dostateczność. Ogólnie wiadomo, że macierz $\Phi(t)=e^{A_{11}t}\in\Re_+^{n_1\times n_1}$ wtedy i tylko wtedy, gdy A_{11} jest macierzą Metzlera. Jeżeli A_{11} jest macierzą Metzlera, zaś pozostałe macierze mają elementy nieujemne (6b) i warunki brzegowe spełniają (3), to z (4a) mamy $x_1(t,i)\in\Re_+^{n_1}$, a z równania (4b) $x_2(t,i)\in\Re_+^{n_2}$, zaś z równania (1c) $y(t,i)\in\Re_+^{p}$, $t\in R_+$ i $i\in Z_+$.

Konieczność. Niech $x_2(t)=0$, $t\in R_+$ i $x_1(0)=e_i$ (i-ta kolumna macierzy jednostkowej I_{n_1}). Z (1a) dla $i=0$, $t\in R_+$ i (4a) mamy $\dot{x}_1(t,0)=A_{11}\Phi(t)e_i$. Zauważmy, że aby trajektoria nie wyszła z ćwiartki $\Re_+^{n_1}$ musi być $\dot{x}_1(0,0)=A_{11}e_1\in\Re_+^{n_1}$, co implikuje $a_{ij}\ge 0$ dla $i\ne j$. Macierz A_{11} musi być macierzą Metzlera. Podobnie, dla $x_1(0)=0$, z (1a) mamy $\dot{x}_1(0,0)=A_{12}x_2(0)\in\Re_+^{n_1}$, co implikuje $A_{12}\in\Re_+^{n_1\times n_2}$, gdyż $x_2(0)$ może być dowolne. Zaś z (1b) dla $x_2(t)=0$, $t\in R_+$ mamy $x_2(t,1)=A_{21}x_1(t,0)\ge 0$, co implikuje $A_{21}\in\Re_+^{n_2\times n_1}$, gdyż $x_1(t,0)\in\Re_+^{n_1}$ może być dowolne. Podobnie, dla $x_1(0)=0$, z (1b) dla $i=0$ mamy $x_2(0,1)=A_{22}x_2(0)\ge 0$, co implikuje $A_{22}\in\Re_+^{n_2\times n_2}$, gdyż $x_2(0)\in\Re_+^{n_2}$ może być dowolne. Dla $x_2(0)=0$ z (1c) mamy $y(0,0)=C_1x_1(0)\in\Re_+^{p}$ oraz $C_1\in\Re_+^{p\times n_1}$, gdyż $x_1(0)\in\Re_+^{n_1}$ może być dowolne. Analogicznie, zakładając $x_1(0)=0$, dostaniemy $y(0,0)=C_2x_2(0)\in\Re_+^{p}$ oraz $C_2\in\Re_+^{p\times n_2}$, gdyż $x_2(t)\in\Re_+^{n_2}$ może być dowolne. □

W dalszych rozważaniach będziemy przyjmować, że składowa $x_2(t,0)$ warunków brzegowych (3) jest stała w całym przedziale, tzn. $x_2(t):=x_2$ dla $t\in[0,t_f]$.

Uwzględniając powyższe założenia i podstawiając rozwiązania (4) w punkcie $(t_f,k)\in R_+\times Z_+$, $t_f>0$, $k\ge 0$, do równania wyjścia (1c) otrzymamy

$$y(t_f,k)=\begin{cases}C_1\Phi(t_f)x_1(0)+(C_1P(t_f)+C_2)x_2 \quad \text{dla} \quad k=0\\ [C_1 \quad C_2]\begin{bmatrix}\boldsymbol{D}_1\\ \boldsymbol{D}_2\end{bmatrix}x_0 \quad \text{dla} \quad k=1,2,..\end{cases}, \tag{7}$$

gdzie

$$x_0=[x_1(0),x_1(1),\dots,x_1(k),x_2]^T\in\Re_+^{(k+1)n_1+n_2}, \tag{8a}$$

$$\boldsymbol{D}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{D}_1\\ \boldsymbol{D}_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}D_1(0) & D_1(1) & \cdots & D_1(k) & D_1(k+1)\\ D_2(0) & D_2(1) & \cdots & 0 & D_2(k+1)\end{bmatrix}, \tag{8b}$$

przy czym

$$D_1(j)=P(t_f)D_2(j), \tag{9a}$$

$$D_2(j)=D^{k-1-j}A_{21}\Phi(t_f), \text{ dla } j=0,1,\dots,k-1, \tag{9b}$$

$$D_1(k)=\Phi(t_f), \tag{9c}$$

$$D_1(k+1)=P(t_f)D^k, \ D_2(k+1)=D^k, \tag{9d}$$

$$D=A_{21}P(t_f)+A_{22}\in\Re_+^{n_2\times n_2}. \tag{9e}$$

3. Obserwowalność

Uwzględniając prace [1 - 5] możemy sformułować podaną poniżej definicję obserwowalności dodatniego układu ciągło - dyskretnego.

Definicja 2. Dodatni układ ciągło-dyskretny (1) nazywamy obserwowalnym w punkcie $(t,i)\in R_+\times Z_+$, $t=t_f>0$, $i=k\ge 1$, jeżeli na podstawie znajomości odpowiedzi $y(t,i)\in\Re_+^{p}$ w punktach (t_f,i) $i=0,1,\dots,k$, dla dowolnych niezerowych warunków brzegowych (8a) w postaci $x_1(0)\in\Re_+^{n_1}\ne 0$, $x_1(i)=0$, $1\le i\le k$, $x_2\in\Re_+^{n_2}\ne 0$ można jednoznacznie wyznaczyć stan

$$x_{00}=\begin{bmatrix}x_1(0)\\ x_2\end{bmatrix}\in\Re_+^{n_1+n_2}. \tag{10}$$

Twierdzenie 3. Dodatni układ ciągło-dyskretny (1) jest obserwowalny w punkcie $(t_f,k)\in R_+\times Z_+$, $t_f>0$, $k\ge 1$, wtedy i tylko wtedy, gdy z macierzy $\boldsymbol{S}$ można wybrać n_1+n_2 liniowo niezależnych wierszy takich, że macierz $\widetilde{\boldsymbol{S}}$ utworzona z tych wierszy jest uogólnioną macierzą permutacji, zwaną też macierzą monomialną (w każdym wierszu i każdej kolumnie tylko jeden element jest dodatni, a wszystkie pozostałe są zerowe), przy czym

$$\boldsymbol{S}:=[S_1 \quad S_2]=\begin{bmatrix}C_1\Phi(t_f) & C\\ CD^0A_{21}\Phi(t_f) & CD^1\\ \vdots & \vdots\\ CD^{k-1}A_{21}\Phi(t_f) & CD^k\end{bmatrix}\in\Re_+^{(k+1)p\times(n_1+n_2)}, \tag{11}$$

gdzie

$$C=C_1P(t_f)+C_2. \tag{12}$$

Dowód. Równanie (7), przy założeniach wynikających z definicji 2, możemy napisać w postaci

$$y(t_f,k)=\begin{cases}[C_1\Phi(t_f)\quad C]x_{00} & \text{dla } k=0\\ [CD^{k-1}A_{21}\Phi(t_f)\quad CD^k]x_{00} & \text{dla } k=1,2,..\end{cases}. \quad (13)$$

Korzystając z (13) kolejno w punktach (t_f,i) $i=0,1,\dots,k,$ dostaniemy

$$y_0=\boldsymbol{S}x_{00}, \quad (14)$$

przy czym

$$y_0:=[y(t_f,0)^T \quad y(t_f,1)^T \quad \dots \quad y(t_f,k)^T]^T\in\Re_+^{(k+1)p}. \quad (15)$$

Z założenia $x_{00}\in\Re_+^{n_1+n_2}$ i $y_0\in\Re_+^{(k+1)p}$ są dowolnymi wektorami. Wobec tego stan x_{00} możemy wyznaczyć z równania (14) wtedy i tylko wtedy, gdy macierz $\boldsymbol{S}$ (11) zawiera n_1+n_2 liniowo niezależnych monomialnych wierszy. □

Wykorzystując jeden ze wzorów na lewą odwrotność macierzy prostokątnej dla macierzy $\boldsymbol{S}$, możemy sformułować poniższy lemat.

Lemat 1. Jeżeli układ dodatni (1) jest obserwowalny oraz $[\boldsymbol{S}^T\boldsymbol{S}]^{-1}\boldsymbol{S}^T\in\Re_+^{(n_1+n_2)\times(k+1)p}$, to znając odpowiedź y_0 (15) można stan (10) wyznaczyć ze wzoru

$$x_{00}=[\boldsymbol{S}^T\boldsymbol{S}]^{-1}\boldsymbol{S}^T y_0. \quad (16)$$

Dowód. Jeżeli $rank\boldsymbol{S}=n_1+n_2$, to $\det(\boldsymbol{S}^T\boldsymbol{S})\neq 0$ i macierz $[\boldsymbol{S}^T\boldsymbol{S}]^{-1}\boldsymbol{S}^T$ jest dobrze zdefiniowana. Jeżeli $y_0\in\Re_+^{(k+1)p}$ oraz zachodzi $[\boldsymbol{S}^T\boldsymbol{S}]^{-1}\boldsymbol{S}^T\in\Re_+^{(n_1+n_2)\times(k+1)p}$ to wtedy $x_{00}\in\Re_+^{n_1+n_2}$ oraz

$$y_0=\boldsymbol{S}x_{00}=\boldsymbol{S}[\boldsymbol{S}^T\boldsymbol{S}]^{-1}\boldsymbol{S}^T y_0=y_0. \quad □(17)$$

4. Względna obserwowalność

Załóżmy, że składowa $x_2\in\Re_+^{n_2}\neq 0$ stanu $x_{00}\in\Re_+^{n_1+n_2}$ (10) jest znana. Będziemy poszukiwać rozwiązania tylko dla stanu $x_1(0)\in\Re_+^{n_1}\neq 0.$ Z równania (14) i (11) mamy

$$y_0-S_2x_2=\widetilde{y}_0=S_1x_1(0)=\widetilde{S}_1\Phi(t_f)x_1(0), \quad (18)$$

gdzie

$$\widetilde{S}_1=\begin{bmatrix}C_1\\ CD^0A_{21}\\ \vdots\\ CD^{k-1}A_{21}\end{bmatrix}\in\Re_+^{(k+1)p\times n_1}, \quad (19)$$

Uwzględniając powyższe, możemy sformułować definicję względnej obserwowalności dodatniego układu ciągło - dyskretnego.

Definicja 3. Dodatni układ ciągło-dyskretny (1) nazywamy względnie obserwowalnym dla stanu $x_1(t,i)\in\Re_+^{n_1}$ w punkcie $(t,i)\in R_+\times Z_+,$ $t=t_f>0,$ $i=k\geq 1,$ jeżeli na podstawie znajomości odpowiedzi $y(t,i)\in\Re_+^p$ w punktach (t_f,i) $i=0,1,\dots,k,$ dla dowolnych niezerowych warunków brzegowych (8a) w postaci $x_1(0)\in\Re_+^{n_1}\neq 0,$ $x_1(i)=0,$ $1\leq i\leq k,$ $x_2\in\Re_+^{n_2}\neq 0$ można jednoznacznie wyznaczyć stan $x_1(0)\in\Re_+^{n_1}.$

Twierdzenie 4. Dodatni układ ciągło-dyskretny (1) jest względnie obserwowalnym dla stanu $x_1(t,i)\in\Re_+^{n_1}$ w punkcie $(t_f,k)\in R_+\times Z_+,$ $t_f>0,$ $k\geq 1,$ wtedy i tylko wtedy, gdy

1. A_{11} jest diagonalną macierzą o ujemnych elementach,
2. z macierzy $\widetilde{S}_1$ (19) można wybrać n_1 liniowo niezależnych monomialnych wierszy takich, że macierz utworzona z tych wierszy jest macierzą monomialną.

Znając odpowiedź y_0 (15) i $x_2\in\Re_+^{n_2}\neq 0$ stan $x_1(0)\in\Re_+^{n_1}$ wyznacza się ze wzoru

$$x_1(0)=\Phi(t_f)^{-1}[\widetilde{S}_1^T\widetilde{S}_1]^{-1}\widetilde{S}_1^T\widetilde{y}_0. \quad (20)$$

Dowód. Z założenia $x_2\in\Re_+^{n_2}\neq 0$ i $y_0\in\Re_+^{(k+1)p}$ są dowolnymi wektorami, przy czym zawsze zachodzi zależność $\widetilde{y}_0=y_0-S_2x_2\in\Re_+^{(k+1)p}.$ Wobec tego $\Phi(t_f)x_1(0)\in\Re_+^{n_1}$ możemy wyznaczyć z równania (18) wtedy i tylko wtedy, gdy macierz $\widetilde{S}_1$ (19) zawiera n_1 liniowo niezależnych monomialnych wierszy.

Jeżeli A_{11} jest diagonalną macierzą o ujemnych elementach, to $\Phi(t)=e^{A_{11}t}$ jest również macierzą diagonalną i ma postać

$$\Phi(t)=e^{A_{11}t}=\mathrm{diag}[e^{a_1t},e^{a_2t},\dots,e^{a_{n_1}t}]\in\Re_+^{n_1\times n_1}. \quad (21)$$

Zatem istnieje też nieujemna macierz odwrotna $\Phi(t_f)^{-1}\in\Re_+^{n_1}$. Jeżeli $rank\widetilde{S}_1=n_1,$ to $\det(\widetilde{S}_1^T\widetilde{S}_1)\neq 0$ i w tym przypadku istnieje lewa odwrotność macierzy (19) o postaci $[\widetilde{S}_1^T\widetilde{S}_1]^{-1}\widetilde{S}_1^T$. Jeżeli. $[\widetilde{S}_1^T\widetilde{S}_1]^{-1}\widetilde{S}_1^T\in\Re_+^{n_1\times(k+1)p},$ to znając $y_0\in\Re_+^{(k+1)p}$ i $x_2\in\Re_+^{n_2}\neq 0$ otrzymamy $x_1(0)\in\Re_+^{n_1}$ z (20) oraz

$$\begin{aligned}y_0&=\widetilde{y}_0+S_2x_2=\widetilde{S}_1\Phi(t_f)x_1(0)+S_2x_2=\\ &=\widetilde{S}_1\Phi(t_f)\Phi(t_f)^{-1}[\widetilde{S}_1^T\widetilde{S}_1]^{-1}\widetilde{S}_1^T\widetilde{y}_0+S_2x_2=\widetilde{y}_0+S_2x_2.\end{aligned} \quad □\,(21)$$

Załóżmy, że macierz C_1 ma co najwyżej l_1 niezależnych wierszy, zaś macierz C (12) ma l niezależnych wierszy, przy czym $l_1<\min\{n_1,n_2\}$ oraz $l<\min\{n_1,n_2\}$. Łatwo wykazać, że każda macierz CD^iA_{21}, tworząca strukturę macierzy $\widetilde{S}_1$ (19) może mieć co najwyżej l niezależnych wierszy. Oznacza to, że jeżeli układ dodatni (1) jest względnie obserwowalny dla stanu $x_1(t,i)\in\Re_+^{n_1}$ w punkcie (t_f,k) to mamy $k\cdot l+l_1=n_1.$

Uwzględniając powyższe założenia, można sformułować następujący lemat.

Lemat 2. Układ dodatni (1) może być względnie obserwowalny dla stanu $x_1(t,i)\in\Re_+^{n_1}$ w punkcie $(t_f,k),$ jeżeli $k\geq E[(n_1-l_1)/l],$ gdzie $E[(n_1-l_1)/l]$ oznacza najmniejszą liczbę całkowitą większą lub równą $(n_1-l_1)/l.$

5. Przykład

Należy sprawdzić obserwowalność w punkcie $(t_f,k)=(1,k),$ $k\geq 1,$ dodatniego układu ciągło-dyskretnego (1) o macierzach:

$$A_{11}=\begin{bmatrix}-1 & 0\\ 0 & -2\end{bmatrix},\ A_{12}=\begin{bmatrix}1\\ 0\end{bmatrix},\ A_{21}=[0\quad 2],\ A_{22}=[0.2],$$
$$C_1=[1\quad 0],\ C_2=[1]. \quad (22)$$

Dla rozpatrywanego układu macierz podstawowa ma postać

$$\Phi(t) = e^{A_{11}t} = \begin{bmatrix} e^{-t} & 0 \\ 0 & e^{-2t} \end{bmatrix}, \tag{23}$$

operator (5)

$$P(t_f) = \begin{bmatrix} 1 - e^{-t_f} \\ 0 \end{bmatrix} \in \Re_+^2, \tag{24}$$

zaś macierze (9e) i (12), odpowiednio

$$D = A_{22} = 0.2 \in \Re_+^1, \ C = [2 - e^{-t_f}] \in \Re_+^1. \tag{25}$$

Dla $t_f = 1$ i $k = 3$ ze wzoru (11) otrzymamy macierz

$$\boldsymbol{S} == \begin{bmatrix} 0.3679 & 0 & 1.6321 \\ 0 & 0.4418 & 0.3264 \\ 0 & 0.0884 & 0.0653 \\ 0 & 0.0177 & 0.0131 \end{bmatrix} \in \Re_+^{4\times 3}. \tag{26}$$

Łatwo sprawdzić, że macierz (26) ma $n_1 + n_2 = 3$ liniowo niezależne wiersze, przy czym nie są one monomialne. Zatem nie jest spełniony warunek twierdzenia 3, co oznacza, że rozpatrywany układ nie jest obserwowalny w badanym punkcie.

Zbadamy teraz względną obserwowalność układu w punkcie $(t_f, k) = (1, k)$. Z lematu 2 wynika, że $k \ge E[(2-1)/1] = 1$. Zauważmy, że macierz A_{11} jest diagonalną macierzą o ujemnych elementach, zatem macierz $\Phi(t_f) \in \Re_+^{2\times 2}$ (23) jest macierzą monomialną i istnieje macierz odwrotna $\Phi(t_f)^{-1} \in \Re_+^{2\times 2}$. Ze wzoru (19) otrzymamy monomialną macierz

$$\widetilde{S}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3,2642 \end{bmatrix} \in \Re_+^{2\times 2}. \tag{27}$$

Z powyższego wynika, że warunki twierdzenia 4 są spełnione i układ jest względnie obserwowalny w punkcie $(t_f, k) = (1,1)$.

Niech odpowiedź układu (1) przy niezerowych warunkach brzegowych w postaci $x_1(0) \in \Re_+^2 \ne 0$, $x_1(1) = 0$, $x_2 = 1 \in \Re_+^1$, ma postać

$$y_0 = \begin{bmatrix} y(t_f,0) \\ y(t_f,1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \in \Re_+^2. \tag{28}$$

Łatwo sprawdzić, że zachodzi zależność $\widetilde{y}_0 = y_0 - S_2 x_2 \in \Re_+^2$. W tym przypadku stan $x_1(0) \in \Re_+^2$ można wyznaczyć ze wzoru

$$x_1(0) = \Phi(t_f)^{-1} \widetilde{S}_1^{-1} \widetilde{y}_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1.5248 \end{bmatrix} \in \Re_+^2. \tag{29}$$

W celu sprawdzenia otrzymanych wyników wyznaczymy rozwiązanie równań (1) o macierzach (22) w punkcie $(t_f, k) = (1,1)$ dla wektora warunków brzegowych

$$x_{00} = \begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1.5248 \\ 1 \end{bmatrix} \in \Re_+^3. \tag{30}$$

Z ogólnego rozwiązania równania (1a), o postaci

$$x_1(t,i) = \Phi(t) x_1(i) + P(t) x_2(t,i) \ . \tag{31}$$

oraz równania (1b) dla $i = 0,1,$ odpowiednio otrzymamy

$$x_1(t,0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1.5248 e^{-2t} \end{bmatrix}, \tag{32a}$$

$$x_2(t,1) = 0.2 + 3.0496 e^{-2t}, \tag{32b}$$

$$x_1(t,1) = \begin{bmatrix} 0.2 - 0.2e^{-t} + 3.0496 e^{-2t} - 3.0496 e^{-3t} \\ 0 \end{bmatrix}. \tag{32c}$$

Podstawiając powyższe wyniki do równania (1c) mamy

$$y(t,0) = 2, \quad y(t,1) = 0.4 - 0.2e^{-t} + 6.0991 e^{-2t} - 3.0496 e^{-3t}. \tag{33}$$

Z powyższych rozwiązań obliczymy wartości odpowiedzi w punktach $(t_f, k) \in R_+ \times Z_+$ dla $t_f = 1$ oraz $k = 0,1$:

$$y_0 = \begin{bmatrix} y(t_f,0) \\ y(t_f,1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \in \Re_+^2. \tag{34}$$

6. Wnioski końcowe

W pracy rozpatrzono problem obserwowalności i względnej obserwowalności dodatnich liniowych dwuwymiarowych układów ciągło-dyskretnych, opisanych równaniami stanu i wyjścia (1), przy założeniach (3) i (6).

Sformułowano podstawowe definicje oraz podano warunki konieczne i wystarczające obserwowalności i względnej obserwowalności. Podano prostą metodę wyznaczania nieujemnego stanu początkowego $x_{00} \in \Re_+^{n_1+n_2}$ (10), jeżeli znana jest odpowiedź układu $y_0 \in \Re_+^{(k+1)p}$ (15), a w przypadku względnej obserwowalności także składową $x_2 \in \Re_+^{n_2} \ne 0$.

Powyższe rozważania można łatwo uogólnić na dodatnie dwuwymiarowe układy ciągło-dyskretne ułamkowego rzędu.

Praca naukowa finansowana ze środków Ministerstwa Nauki i Szkolnictwa Wyższego, jako projekt badawczy nr G/WE/5/07.

7. Literatura

[1] Kaczorek T.: Positive 2D hybrid linear systems, Bull. Pol. Ac.: Sci. Tech. 55 (4), 2007, pp. 351–358.

[2] Kaczorek T.: Positive 1D and 2D Systems, Springer-Verlag, London, 2002.

[3] Marchenko V.M., Poddubnaya O.N., Zaczkiewicz Z.: On the observability of linear differential-algebraic systems with delays, IEEE Transactions of Automatic Control, vol. 51, no. 8, 2006, pp. 1387-1392.

[4] Marchenko V.M., Poddubnaya O.N., Zaczkiewicz Z.: Hybrid control and observation systems in symmetric form, V International Workshop of Robot Motion and Control, 2005, pp. 137-143.

[5] Kociszewski R.: Sterowalność i obserwowalność liniowych stacjonarnych układów dodatnich dyskretnych z opóźnieniami, Rozprawa doktorska, Politechnika Białostocka, Wydział Elektryczny, 2009.

[6] Trzasko W.: Względna sterowalność dodatnich układów ciągło-dyskretnych, Automation 2010, CD w Pomiary Automatyka Robotyka, nr 2, 2010.

[7] Trzasko W.: Względna punktowa zupełność dodatnich układów ciągło-dyskretnych, Automation 2009, CD w Pomiary Automatyka Robotyka, nr 2, 2009.

otrzymano / received: 25.02.2010
przyjęto do druku / accepted: 12.04.2010 *artykuł recenzowany*